

CORRIGÉ

TD 10 : Révisions

Exercice 1. (*Examen terminal année 2013-14*) La taille y d'une population de rongeurs est décrite par le modèle suivant :

$$y' = 0,4y \left(1 - \frac{y}{4000}\right). \quad (1)$$

1. Comment s'appelle ce modèle et quelle est la signification des constantes 0,4 et 4000 ?

Il s'agit d'un *modèle logistique* avec

un *taux de croissance intrinsèque* $r = 0,4$ et une *capacité biotique* $K = 4000$.

2. On admet que les solutions non-nulles de l'équation différentielle (1) sont $y(t) = \frac{4000}{1 + \left(\frac{4000}{y_0} - 1\right)e^{-0,4t}}$.

Simplifier la formule pour $y_0 = 80$. Toujours avec $y_0 = 80$ calculer la valeur de $y(t)$ pour $t = 5$ et pour $t = 20$. Donner une valeur approximative de $y(160)$.

Avec $y_0 = 80$ on a $y(t) = \frac{4000 \times 80}{80 + (4000 - 80)e^{-0,4t}} = \frac{4000}{1 + 49e^{-0,4t}}$

Donc $y(5) = \frac{4000}{1 + 49e^{-2}} \simeq 524,15$ et $y(20) = \frac{4000}{1 + 49e^{-8}} \simeq 3935,31$

Pour $t = 160$ on a $e^{-0,4t} = e^{-64}$ très proche de 0 donc $y(160)$ très proche de 4000.

3. Si la taille initiale y_0 de la population était égale à 1000, quel serait le comportement de $y(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$? Même question pour $y_0 = 8000$.

Lorsque t tend vers $+\infty$, $e^{-0,4t}$ tend vers 0 donc $y(t)$ tend vers $\frac{4000y_0}{y_0} = 4000$ quelque soit $y_0 \neq 0$.

Si $y_0 = 1000$ on a y' positif et $y(t)$ tend vers 4000 en croissant,

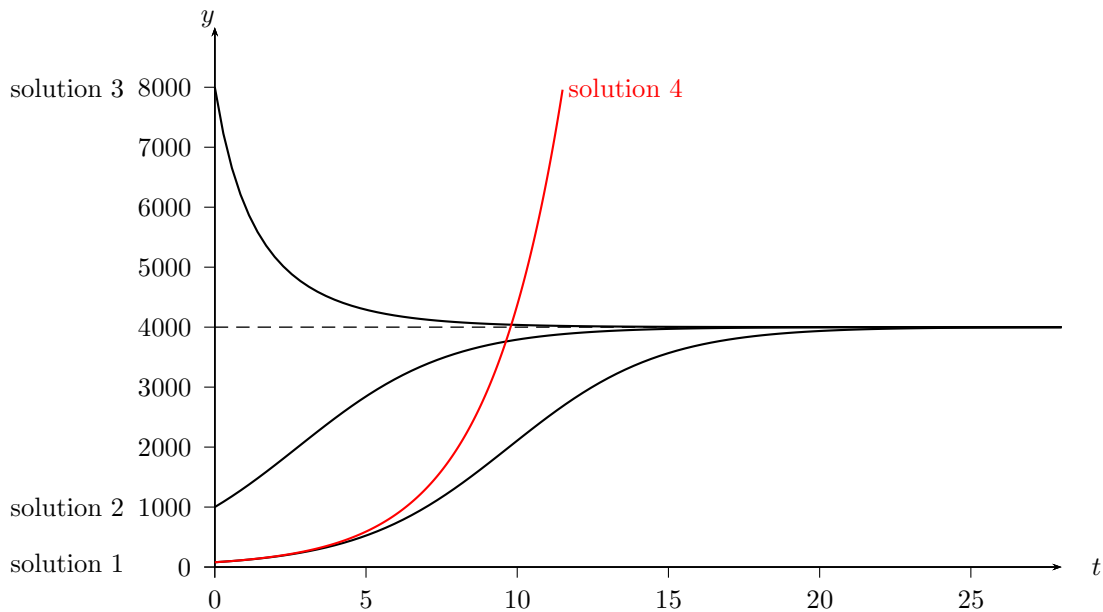
si $y_0 = 8000$ on a y' négatif et $y(t)$ tend vers 4000 en décroissant.

4. Si au lieu de l'équation (1) on choisissait comme modèle $y' = 0,4y$ comment s'appellerait ce modèle? Par quelle formule s'expriment ses solutions?

Quel serait le comportement des solutions lorsque t tend vers $+\infty$? Commenter.

C'est un *modèle malthusien*, ses solutions sont $y(t) = y_0 e^{0,4t}$, elles ont une croissance exponentielle lorsque t tend vers $+\infty$. Le modèle n'est donc pas réaliste à long terme.

5. Dessiner sur le même dessin (dans le plan avec des axes t et y) les graphes des solutions $y(t)$ de l'équation (1) avec $y_0 = 80$, $y_0 = 1000$ et $y_0 = 8000$ (on les nomme respectivement "solution 1, 2 et 3". Ajouter au dessin la solution de l'équation de la question 4 avec $y_0 = 80$ (nommée "solution 4"). Préciser sur le dessin quels sont les graphes des solutions 1, 2, 3 et 4.



6. Si on tient compte du prélèvement sur la population dû aux rapaces, le modèle devient

$$y' = 0,4y \left(1 - \frac{y}{4000}\right) - 300. \quad (2)$$

Trouver les équilibres de ce modèle : les calculer et faire un dessin dans le plan (y, y') du graphe de la fonction $0,4y \left(1 - \frac{y}{4000}\right) - 300$.

Donner la nature de chacun de ces équilibres (stable ou instable) en justifiant votre réponse.

On étudie la fonction $f(y) = 0,4y \left(1 - \frac{y}{4000}\right) - 300 = -10^{-4}y^2 + 0,4y - 300$.

Les équilibres sont les zéros de cette fonction soit $y_1 = 1000$ et $y_2 = 3000$.

Pour leur stabilité on étudie le signe de la dérivée $f'(y) = -2 \cdot 10^{-4}y + 0,4$ en y_1 et y_2 .

$$f'(y_1) = -2 \cdot 10^{-4} \cdot 1000 + 0,4$$

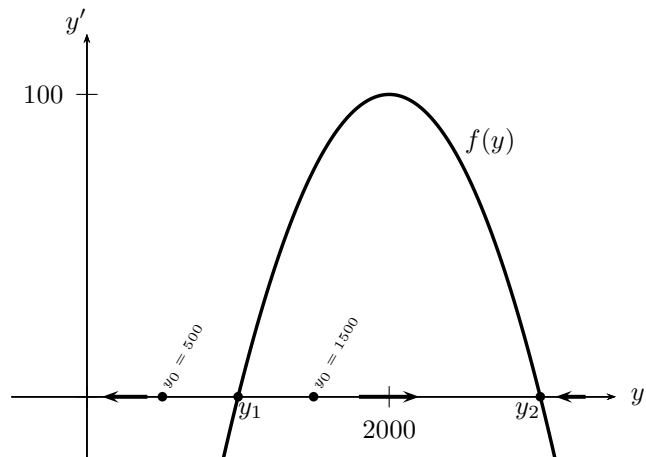
$$f'(y_1) = 0,2 > 0$$

y_1 est un équilibre instable

$$f'(y_2) = -2 \cdot 10^{-4} \cdot 3000 + 0,4$$

$$f'(y_2) = -0,2 < 0$$

y_2 est un équilibre stable



7. Quel est le comportement des solutions lorsque t croît et tend vers $+\infty$ avec $y_0 = 500$?

Est-ce qu'on peut prévoir l'extinction de la population à long terme ?

Si $y_0 = 500$ alors $y' < 0$, la population $y(t)$ va décroître de plus en plus vite jusqu'à extinction.

8. Mêmes questions avec $y_0 = 1500$.

Si $y_0 = 1500$ alors $y' > 0$, la population $y(t)$ va croître jusqu'à l'équilibre $y_2 = 3000$.

Exercice 2. (*Examen terminal année 2017-18*) On modélise la concurrence entre deux espèces par le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} x' &= (1 - \frac{1}{2}x - y)x \\ y' &= (1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y)y \end{cases} \quad (3)$$

1. Calculer les isoclines et les points d'équilibre du système (3). Lequel des points d'équilibre n'admet pas d'interprétation biologique ?

L'isocline $x' = 0$ consiste en deux droites : $x = 0$ et $1 - \frac{x}{2} - y = 0$ (A).

L'isocline $y' = 0$ consiste, elle aussi, en deux droites : $y = 0$ et $1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 0$ (B).

Pour calculer les points d'équilibre on considère donc les systèmes suivants :

$$x = 0, \quad y = 0 \Rightarrow (0,0)$$

$$x = 0, \quad 1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 0 \Rightarrow (0,2)$$

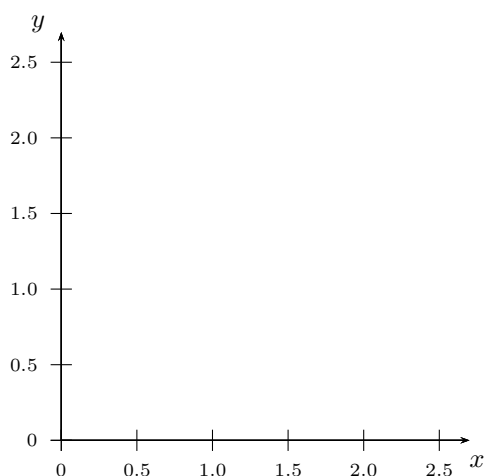
$$1 - \frac{x}{2} - y = 0, \quad y = 0 \Rightarrow (2,0)$$

$$1 - \frac{x}{2} - y = 0, \quad 1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 0 \Rightarrow (6, -2)$$

Pour calculer le dernier point d'équilibre (dont les coordonnées vérifient le système d'équations (A) et (B)) on considère l'équation (A) - 2(B) : $-1 + x/6 = 0$. Donc $x = 6$ et on trouve de l'équation (A) que $y = -2$.

Le point d'équilibre $(6, -2)$ n'admet pas d'interprétation biologique (effectifs de l'espèce y strictement négatifs).

2. Dessiner dans le plan des variables (x,y) les isoclines du système et les trois points d'équilibre admettant une interprétation biologique.



On calcule les vecteurs tangent dans les points

$$A = (1,0) \Rightarrow (x', y') = (0.5, 0)$$

$$B = (0,1) \Rightarrow (x', y') = (0, 0.5)$$

$$C = (1, 1/2) \Rightarrow (x', y') = (0, \frac{5}{24})$$

$$D = (1, 4/3) \Rightarrow (x', y') = (-\frac{5}{6}, 0)$$

Le dessin scanné est sur la dernière page.

3. Calculer la matrice jacobienne du système (3) en fonction de (x,y) . Pour chacun des trois points d'équilibre admettant une interprétation biologique, déterminer la nature de cet équilibre.

Les côtés droits des deux équations du système (3) sont

$$f(x,y) = x - \frac{x^2}{2} - xy, \quad g(x,y) = y - \frac{xy}{3} - \frac{y^2}{2}.$$

La matrice jacobienne A vaut

$$\begin{pmatrix} \partial f / \partial x & \partial f / \partial y \\ \partial g / \partial x & \partial g / \partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x - y & -x \\ -y/3 & 1 - \frac{x}{3} - y \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (\text{tr } A, \det A) = (2, 1)$$

Donc en $(0,0)$ il y a un nœud instable dégénéré.

$$A(0,2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2/3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (\text{tr } A, \det A) = (-2, 1)$$

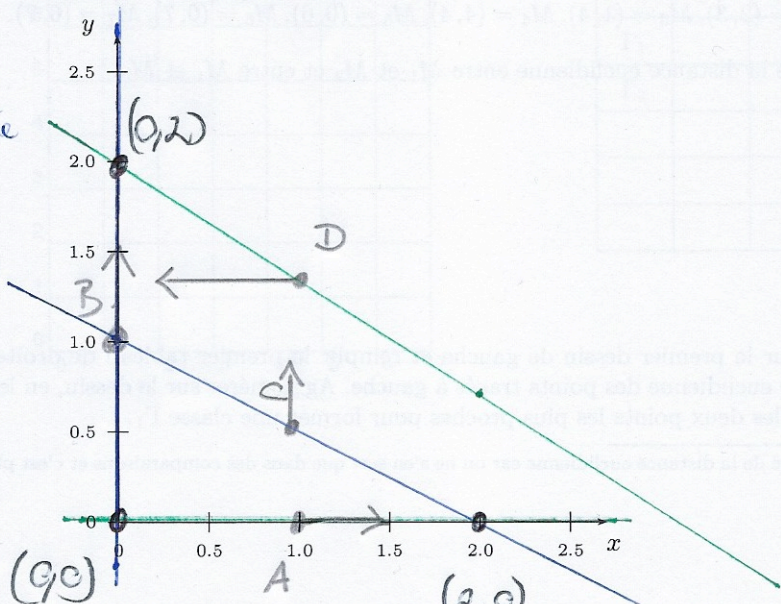
Donc en $(0,2)$ il y a un nœud stable dégénéré.

$$A(2,0) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \Rightarrow (\text{tr } A, \det A) = (-2/3, -1/3)$$

Donc en $(2,0)$ il y a un col.

4. Marquer sur la figure ci-dessus les points $A = (1,0)$, $B = (0,1)$, $C = (1,1/2)$ et $D = (1,4/3)$. Calculer les vecteurs du champ défini par le système (3) dans les points A, B, C, D (mettre le calcul à droite de la figure). Porter ces vecteurs sur la figure.
5. Écrire le système (3) dans la situation où l'espèce y n'est pas présente. Comment s'appelle cette équation? Supposons que $y_0 = 0$ et $x_0 = 1$. Vers quelle valeur tend $x(t)$ lorsque $t \rightarrow \infty$?
En remplaçant y par 0 on obtient $x' = (1 - \frac{x}{2})x$, $y' = 0$.
L'équation $x' = (1 - \frac{x}{2})x$ est une équation logistique. Chaque solution avec $x_0 > 0$ tend (lorsque $t \rightarrow \infty$) vers la capacité biotique 2.

isodine $x' = 0$



isodine $y' = 0$