Université de Nice
Département de Mathématiques

L1SV, année 2017-2018
Mathématiques pour la Biologie (semestre 1)

Cours 6 : Initiation aux équations différentielles

Avec le modèle logistique et son ancêtre le modèle malthusien, on a rencontré deux exemples d'équations différentielles. On va voir ici plus généralement ce qu'est une équation différentielle et comment on peut l'étudier. On indiquera pour cela trois approches, la résolution explicite de l'équation, le calcul numérique approché des solutions et l'étude qualitative ou géométrique.

1 Définitions et solutions explicites

On considère une quantité $y(t)$ (taille d'une population, concentration d'une substance...) qui évolue au cours du temps et sa dérivée $y'(t)$. On suppose qu'il y a une relation entre cette quantité et sa dérivée de la forme

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

Cette relation est une *équation différentielle du premier ordre* [1] et la résolution d'une telle équation consiste à trouver toutes les fonctions $y(t)$ qui satisfont cette équation, y étant l'*inconnue* de cette équation.

Exemple : Ainsi l'*équation différentielle de Malthus*, $y' = ry$ est définie par la fonction $f(y) = ry$ qui est une fonction linéaire. L'ensemble de ses solutions s'écrit $\{y(t) = y(0)e^{rt},\ y(0) \in \mathbb{R}\}$. Il y en a une infinité, il y a une solution pour chaque valeur de la *condition initiale* $y(0)$.

Exemple : Comme on l'a vu, l'*équation différentielle logistique* $y' = ry(1 - \frac{y}{K})$ est définie par la fonction $f(y) = ry(1 - \frac{y}{K})$ qui est un polynôme de degré deux.
L'ensemble de ses solutions s'écrit $\{y(t) = \dfrac{y(0)K}{y(0) + (K - y(0))e^{-rt}},\ y(0) \in \mathbb{R}\}$. Il y en a aussi une infinité.

Remarque : Dans les deux exemples précédents d'équations différentielles du premier ordre il y a une infinité de solutions qui dépendent d'une constante $y(0)$.
Si l'équation différentielle est d'ordre n les solutions dépendront de n constantes.
Par exemple les solutions de $y^{(n)} = 0$ sont tous les polynômes $a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1}t^{n-1}$.

Lorsque l'équation différentielle est de la forme $\frac{dy}{dt} = a(t)y + b(t)$, où $a(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions données, on dit que l'équation différentielle est *linéaire*. C'est le cas du modèle malthusien pour lequel $a(t) = r$ et $b(t) = 0$ (a et b sont des fonctions constantes) mais ce n'est pas le cas du modèle logistique.
Si l'on sait calculer une primitive de la fonction $a(t)$ alors l'équation linéaire $\frac{dy}{dt} = a(t)y + b(t)$ peut être *résolue explicitement*, c'est-à-dire qu'on peut écrire de façon explicite l'ensemble de ses solutions que l'on appelle encore *la solution générale*.
Tout d'abord, si $b(t) = 0$ et $A(t) = \int_0^t a(u)\,du$ la primitive de $a(t)$ qui s'annule en 0, alors $y(t) = y(0)e^{A(t)}$.
Si $b(t) \neq 0$ on doit d'abord trouver *une solution particulière* notée $y^*(t)$ de l'équation $\frac{dy}{dt} = a(t)y + b(t)$, la solution générale de cette équation s'écrit alors

$$y(t) = y^*(t) + (y(0) - y^*(0))\, e^{A(t)}$$

Exemple : On peut vérifier que $y^*(t) = te^{2t}$ est une solution particulière de l'équation $y' = 2y + e^{2t}$. On en déduit que la solution générale de cette équation s'écrit $y(t) = te^{2t} + y(0)e^{2t}$.

Au-delà des équations linéaires, il y a un petit nombre d'autres équations différentielles qui peuvent être résolues explicitement. Mais, le plus souvent, les équations différentielles que l'on est amené à utiliser ne peuvent pas être résolues de cette façon. On peut alors avoir recours au calcul numérique approché.

1. Les équations différentielles du 2^{e} ordre font intervenir non seulement y et y' mais aussi y'' et les équations d'ordre n font intervenir les dérivées jusqu'à l'ordre n.

2 Calcul approché des solutions

La méthode d'Euler est connue comme une méthode permettant de calculer une approximation de la primitive d'une fonction ou d'explorer les liens entre la fonction exponentielle et les séries géométriques. Nous allons voir qu'elle permet avant tout de calculer des solutions approchées d'équations différentielles.

L'idée de la méthode d'Euler est la suivante : pour tracer le graphe de la solution partant de la condition initiale $y_0 = y(t_0)$ dans le plan (t, y), on commence au point $M_0 = (t_0, y_0)$ et on profite du fait que, bien que la fonction $y(t)$ soit inconnue, la pente de son graphe est donnée par l'équation différentielle.
Comme $y' = f(y)$, l'équation différentielle donne en chaque point du plan (t, y), un vecteur $(1, f(y))$ tangent au graphe de la solution $y(t)$.
On part donc du point $M_0 = (t_0, y_0)$, on choisit un pas $h > 0$,
on trace un premier segment d'origine M_0, de pente $f(y_0)$ et d'extrémité le point $M_1 = (t_1, y_1)$ d'abscisse $t_1 = t_0 + h$ et d'ordonnée $y_1 = y_0 + hf(y_0)$.
Puis on recommence de M_1 à $M_2 = (t_2, y_2)$ mais en remplaçant la pente $f(y_0)$ du segment par $f(y_1)$ et ainsi de suite. On obtient les formules suivantes (pour $n \geqslant 1$) :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} t_n & = & t_{n-1} + h \\ y_n & = & y_{n-1} + hf(y_{n-1}) \end{array} \right. \tag{1}$$

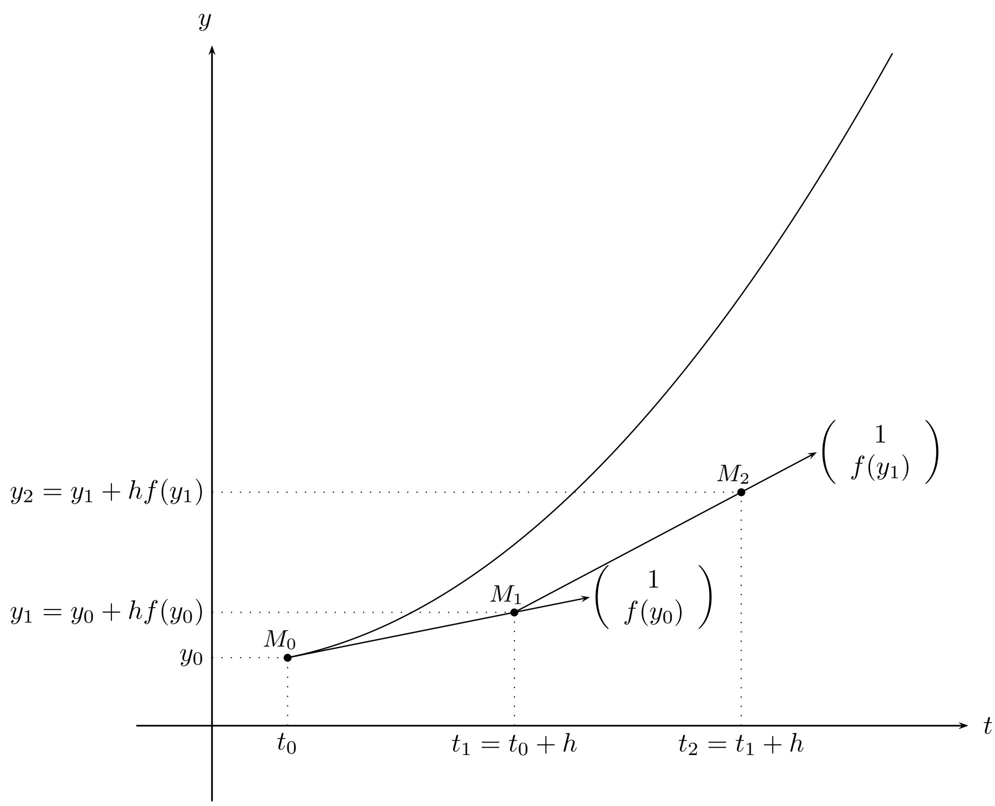

FIGURE 1 – La méthode d'Euler.

La solution approchée obtenue est d'autant plus proche de la solution exacte que le pas h est choisi petit. On peut en réalité vérifier que, lorsque ce pas tend vers zéro, la solution approchée tend vers la solution exacte. Mais, pour un pas donné, même petit, on n'est jamais complètement sûr que le comportement de la solution approchée soit le même que celui de la solution exacte : lorsque la solution exacte tourne, la solution approchée suit la tangente, elle s'éloigne donc de la solution exacte d'autant plus que le pas est grand. On peut dire que la solution approchée *dérape dans les virages*.
Comme toujours, il est prudent de contrôler le résultat fourni par l'algorithme d'Euler par des considérations de nature différente, comme par exemple une étude qualitative.

3 Étude qualitative

La principale caractéristique du modèle logistique qu'on a étudié précédemment est qu'il présente un *équilibre attractif* vers lequel tendent toutes les solutions du modèle, quelle que soit leur condition initiale (sauf si $y(0) = 0\,!$). Or l'existence d'équilibres et leurs propriétés, par exemple le fait que les autres solutions tendent vers un équilibre ou s'en éloignent, sont des éléments que l'on peut souvent déduire directement de l'équation différentielle, même si l'on ne sait pas calculer explicitement ses solutions.
Lorsque la fonction f ne dépend que de la variable y et pas de la variable t, l'étude du graphe de la fonction f (la parabole dans l'exemple du modèle logistique) suffit pour cela.

Définition : Pour une équation différentielle de la forme

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \tag{2}$$

on appelle *équilibre* ou *état stationnaire* une valeur constante y^* de la quantité y telle que si $y(0) = y^*$ alors $y(t) = y^*$ pour tout t (la quantité *reste à l'équilibre*). Un équilibre est donc une *solution constante* de l'équation différentielle. Une telle solution a nécessairement une dérivée nulle, c'est-à-dire que l'on a $f(y^*) = 0$. En d'autres termes y^* est aussi *un zéro* de la fonction f.

Exemples : Dans le modèle malthusien où $f(y) = ry$, il y a un seul équilibre $y^* = 0$ et dans le modèle logistique où $f(y) = ry(1 - \frac{y}{K})$, il y en a deux, $y^* = 0$ et $y^* = K$.

Dans un modèle de type (2), il y a autant d'équilibres qu'il y a de zéros différents de la fonction f. On peut donc visualiser les différents équilibres de l'équation en traçant le graphe de la fonction f. Les équilibres sont alors les abscisses des points d'intersection du graphe de f avec l'axe horizontal. *Attention* : cet axe horizontal est l'axe des y.

Ce graphe de f permet en outre de visualiser un schéma de la dynamique sur son axe horizontal : il suffit de mettre une flèche dans le sens des y croissants sur les segments de l'axe horizontal où $f > 0$ c'est-à-dire où le graphe de f est au dessus de l'axe, puisqu'on a alors $y' > 0$ dans (2),
et de même une flèche dans le sens des y décroissants sur les segments de l'axe où $f < 0$ et donc $y' < 0$.
Parfois ce schéma de la dynamique est suffisant et peut remplacer à lui seul une résolution de l'équation qui, de toute façon, est bien souvent impossible.

Définition : On dit qu'un équilibre y^* pour lequel on a $f'(y^*) < 0$ est un *équilibre stable* car dans ce cas l'évolution de toute solution dont la condition initiale est proche de l'équilibre y^* est de s'en rapprocher.
De même on dit qu'un équilibre y^* pour lequel on a $f'(y^*) > 0$ est un *équilibre instable* car dans ce cas l'évolution de toute solution dont la condition initiale est proche de l'équilibre y^* est de s'en éloigner.

Exemples : On peut vérifier en appliquant ce critère que l'unique équilibre $y^* = 0$ du modèle malthusien est stable lorsque $r < 0$ (extinction) et instable lorque $r > 0$ (explosion).
De même, si l'on suppose $r > 0$, on peut vérifier que l'équilibre $y^* = K$ (capacité biotique) du modèle logistique est un équilibre stable alors que $y^* = 0$ est un équilibre instable.

Remarque : Lorsque $f'(y^*) = 0$, on ne peut pas savoir à partir de f' si l'équilibre y^* est stable, instable ou ni l'un ni l'autre, mais on peut se reporter au graphe et au signe de f.

La condition $f'(y^*) < 0$ (resp. $f'(y^*) > 0$) est donc *un critère de stabilité* (resp. *d'instabilité*) très utile puisqu'il se calcule facilement.
Pour comprendre ce critère on se reporte au schéma de la dynamique obtenu à partir du graphe de f.
On voit que lorsque $f'(y^*) < 0$ le graphe de f passe au point y^* de valeurs positives à des valeurs négatives et donc que la solution $y(t)$ croît tant qu'elle est plus petite que y^* (puisque $y' = f(y) > 0$) et décroît dès qu'elle est plus grande ($y' = f(y) < 0$). Elle tend donc dans tous les cas à se rapprocher de l'équilibre.
De même, dans le cas où $f'(y^*) > 0$ le graphe de f passe au point y^* de valeurs négatives à des valeurs positives, donc la solution $y(t)$ décroît quand elle est plus petite que y^* et croît quand elle est plus grande. Elle tend à s'éloigner de l'équilibre.

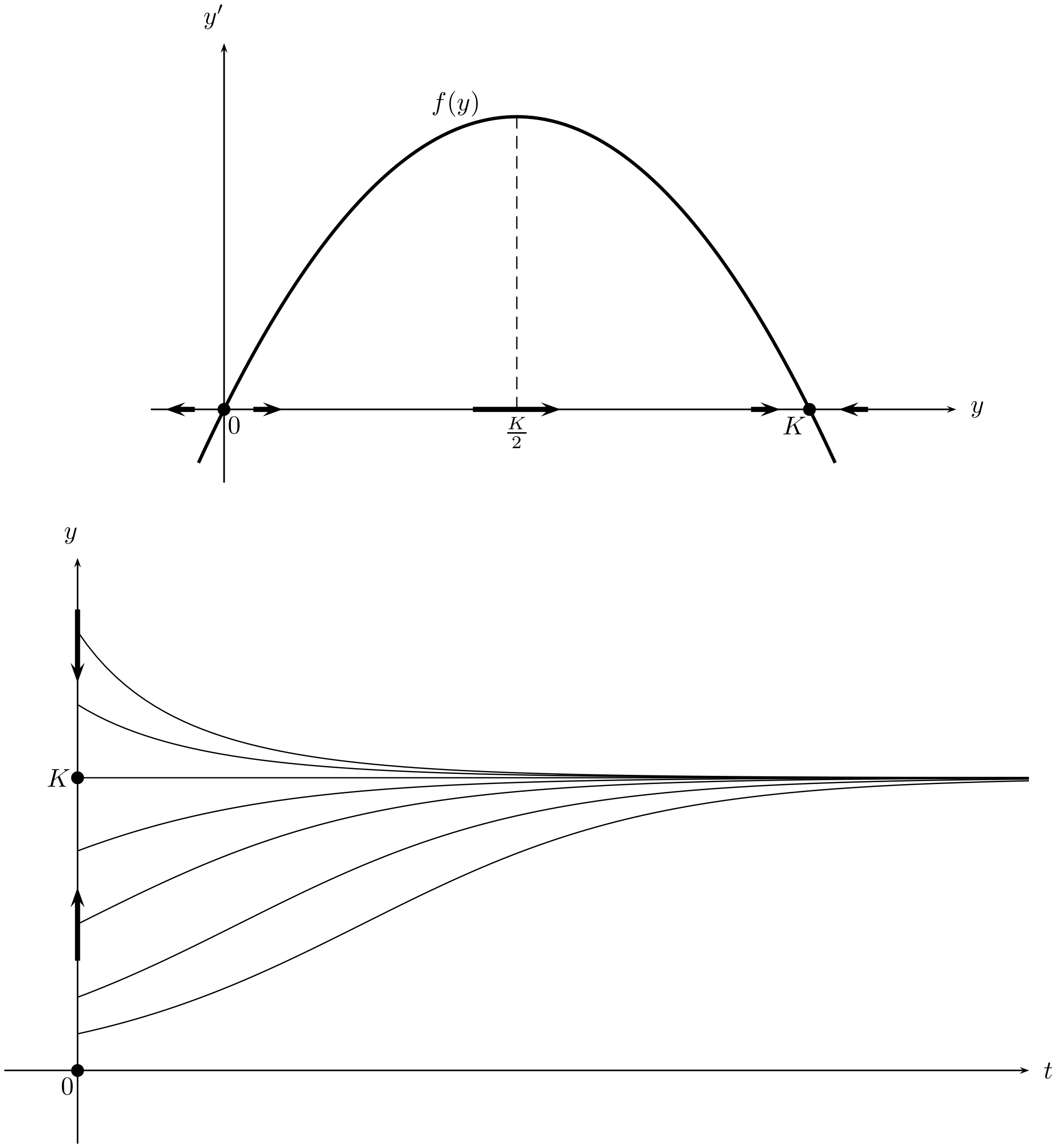

FIGURE 2 – Graphe de la fonction $f(y) = ry(1 - \frac{y}{K})$ dans le plan (y, y') et esquisse des solutions de l'équation différentielle $y' = ry(1 - \frac{y}{K})$ dans le plan (t, y). Sur l'axe des y, les points représentent les équilibres et les flèches indiquent le sens de variation des solutions (croissantes si $y' > 0$ et décroissantes si $y' < 0$).

La figure ci-dessus montre que pour une équation différentielle telle que (2), la détermination des équilibres et du sens de variation des solutions suffit bien souvent pour *tracer l'esquisse des solutions de l'équation*. C'est ce qu'on appelle l'étude qualitative.
Cette esquisse en dit souvent plus sur le comportement des solutions que l'expression explicite de la solution générale (lorsqu'elle peut être calculée) car son expression, fréquemment compliquée, se révèle alors bien peu parlante.

Le calcul numérique approché d'une solution permet de prévoir, avec précision si le pas est petit, son comportement à proximité du point de départ mais est peu fiable sur son évolution à long terme.

L'étude qualitative est peu précise numériquement mais permet de voir l'ensemble des solutions et de prévoir leur évolution à long terme.