Feuille d'exercices 11

Exercice 1.

a) Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle homogène

$$y' + y = 0.$$

b) Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle

$$y' + y = x.$$

En déduire toutes les solutions.

Exercice 2. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad (2+x)y' + y = 2.$$

a) Déterminer toutes les solutions de l'équation homogène associée à (E) sur l'intervalle $]-2, \infty[$.

b) Déterminer une solution de (E).

c) Déterminer l'unique solution ψ de (E) telle que $\psi(-1) = 0$.

d) Dessiner les graphes de plusieurs solutions de (E).

Exercice 3. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad xy' + y = \cos x.$$

a) Déterminer toutes les solutions de l'équation homogène associée à (E) sur l'intervalle $]0, \infty[$.

b) Déterminer une solution de (E).

c) Déterminer l'unique solution ψ de (E) telle que $\psi(1) = 1$.

Exercice 4. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad x^3y' - x^2y = 1.$$

a) Déterminer toutes les solutions de l'équation homogène associée à (E) sur l'intervalle $]0, \infty[$.

b) Déterminer une solution de (E).

c) Déterminer l'unique solution ψ de (E) telle que $\psi(1) = 1$.

Exercice 5. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad x(x-1)y' + y = x.$$

a) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction

$$h : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R},\ x \ \mapsto\ \lambda \frac{x}{x-1}$$

est une solution de l'équation homogène associée à (E).

b) Montrer que

$$g :]-\infty, 0[\to \mathbb{R},\ x \ \mapsto\ \ln(-x)\ \frac{x}{x-1}$$

et

$$f :]0, 1[\to \mathbb{R},\ x \ \mapsto\ \ln x\ \frac{x}{x-1}$$

sont des solutions de (E) sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ (resp. $]0, 1[$).

c) Soit $\varphi :]-\infty, 0[\to \mathbb{R}$ (resp. $\psi :]0, 1[\to \mathbb{R}$) une solution de (E) sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ (resp. $]0, 1[$). Montrer que

$$\lim_{x \to 0^-} \varphi(x) = 0 = \lim_{x \to 0^+} \psi(x).$$

d) Montrer qu'il existe une fonction continue $\tau :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$ qui est une solution de (E) sur $]-\infty, 1[\setminus \{0\}$. Montrer que τ n'est pas dérivable en 0.

Exercice 6. Soient $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. On suppose que $b(y) \neq 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. On appelle

$$(E) \qquad y' = a(x)b(y)$$

une équation différentielle à variables séparées. On veut déterminer la solution $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de (E) telle que $\varphi(x_0) = y_0$. On pose

$$A : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \ \mapsto\ \int_{x_0}^{x} a(t)dt$$

$$B : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y \ \mapsto\ \int_{y_0}^{y} \frac{1}{b(t)}dt.$$

a) Montrer qu'on a

$$B(\varphi(x)) = A(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que la fonction $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective. En déduire une expression pour φ.

c) Trouver la solution ψ de l'équation différentielle

$$y' = e^y$$

telle que $\psi(0) = 0$.