On cherche $N_M \in \mathbb{N}$ tq $|u_n - \ell| \le \frac{1}{M}$ $\forall n \ge N_M$.

Plus explicite: $|\underbrace{u_n}_{\frac{1}{n+1}} - \underbrace{\ell}_{0}|$

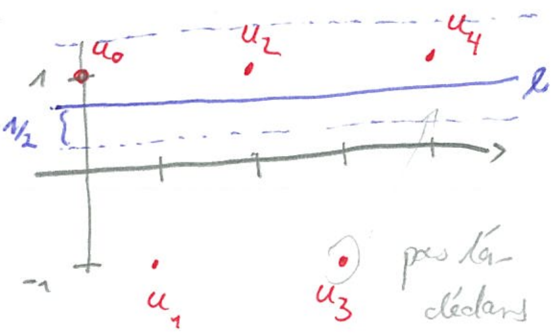
$$\iff \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{M}.$$

Cette inégalité est vraie si $n = M-1, M, M+1, M+2, \ldots$

Donc $N_M = M-1$ marche, ~~On a~~ c'est-à-dire

$$\frac{1}{n+1} \le \frac{1}{M} \quad \forall n \ge M-1 \quad \boxtimes$$

Exemple: La suite $u_n = (-1)^n$ est divergente.




<u>Dém</u>: On a $u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

Supposons par absurde que $u_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.

$1^{er}$ cas: $\ell \ge 0$. Soit $M = 2$.

Alors $\nexists\, N_M \in \mathbb{N}$ tq $|u_n - \ell| \le \frac{1}{2}$ $\forall n \ge N_M$.

En effet si $n$ impair alors $u_n = -1$ et donc

$$|u_n - \ell| = \underbrace{|-1-\ell|}_{-(1+\ell)} \overset{\ell \ge 0}{=} 1+\ell \ge 1 > \frac{1}{2}$$

2nd cas: $\ell < 0$: exo. $\boxtimes$

Q: Soit $S = 1-1+1-1+\ldots = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$. C'est combien?

$u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 1 & n \text{ pair} \\ 0 & n \text{ impair} \end{cases} \Rightarrow u_n$ ne converge pas. pas de sense!

Défn : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

- majorée (resp minorée) s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que

$$u_n \leq m \quad (\text{resp } m \leq u_n) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

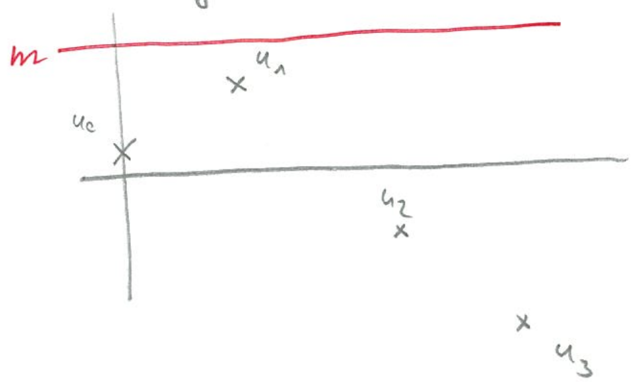
- bornée si elle majorée et minorée.
- croissante (resp. décroissante) si

$$u_n \leq u_{n+1} \quad (\text{resp. } u_n \geq u_{n+1}) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

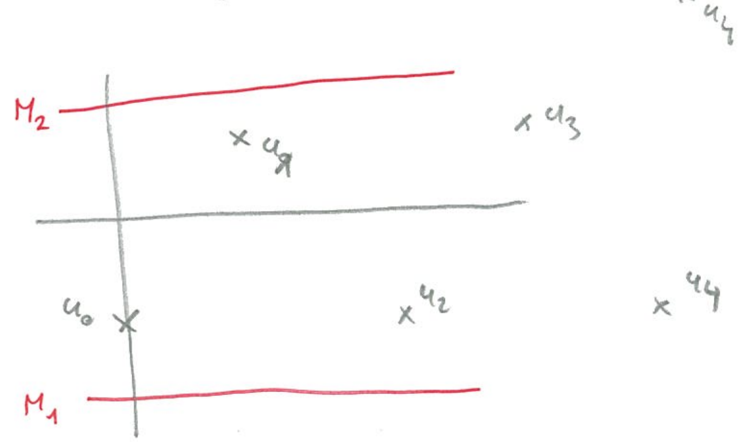
- monotone si elle est croissante ou décroissante.

Dessin :

majorée




bornée



Prop: Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors elle est bornée.

Dém: TD.

. Ex: La suite $u_n = n^2$ diverge, puisque elle n'est pas bornée.

• Bornée $\not\Rightarrow$ Convergente: $u_n = (-1)^n$ est bornée, mais divergente.

Thm: Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est croissante et majorée (resp. décroissante et minorée) est convergente.

Dém: La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, donc l'ensemble

$A = \{ u_n \mid n\in\mathbb{N} \}$ admet une borne supérieure $l\in\mathbb{R}$

(cf. définition des nombres réels $\mathbb{R}$)

On va mq $u_n$ converge vers $l$:

soit $M\in\mathbb{N}$ arbitraire mais fixe. Alors $\exists\, N_M \in\mathbb{N}$ tel que

$$u_{N_M} \geq l - \frac{1}{M} \iff l - u_{N_M} \leq \frac{1}{M} \qquad (1)$$

sinon $l - \frac{1}{M}$ majorante de A, mais $l > l - \frac{1}{M}$ est la borne supérieure

Puisque $u_n$ croissante on a

$$u_n \geq u_{N_M} \quad \forall\, n \geq N_M. \qquad (2)$$

$\Rightarrow \forall\, n \geq N_M$ on a $|u_n - l| = l - u_n$

$$= l - u_{N_M} + \underbrace{u_{N_M} - u_n}_{\overset{(2)}{\leq} 0} \leq l - u_{N_M} \overset{(1)}{\leq} \frac{1}{M}$$

$\boxtimes$

Exemple : Soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{6} \qquad \frac{1}{24}$

- Mq $u_n$ est majorée :

  Notons que $k! = 1\cdot 2\cdot 3 \cdot \ldots k \geq 1\cdot \underbrace{2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2}_{k-1 \text{ fois}} = 2^{k-1}$

  $$\Rightarrow \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

  $$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}}_{\text{série géométrique}} \underset{\text{facile !}}{\overset{\text{TD}}{=}} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \leq 2.$$

- $u_n$ est croissante (exo)

$\overset{\text{Thm}}{\Rightarrow}$ $u_n$ est convergente. NB. On ne sait pas calculer la limite.

Règles de calculs.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $l_1$

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ " " " " " $l_2$

Alors la suite $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l_1+l_2$

" " " $(u_n\cdot v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ " " $l_1\cdot l_2$.

Si en plus $l_2\neq 0$ et $v_n\neq 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ alors

la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{l_1}{l_2}$.

Ex : . $u_n = \frac{1}{n}$ converge vers $l_1 = 0$

. $v_n = \frac{1}{n^2}$ converge vers $l_2 = 0$.

$\Rightarrow$ $u_n + v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ converge vers $l_1 + l_2 = 0$

$u_n \cdot v_n = \frac{1}{n^3}$ " " $l_1 \cdot l_2 = 0$.

Mais $\frac{u_n}{v_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = n$ ne converge pas (non bornée).

Défn : Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si

$$\forall M \in \mathbb{N} \; \exists N_M \in \mathbb{N} \text{ tq } u_n \geq M \; \forall n \geq N_M.$$

Dans ce cas on écrit $\lim_{n \to \infty} u_n = +\infty$.

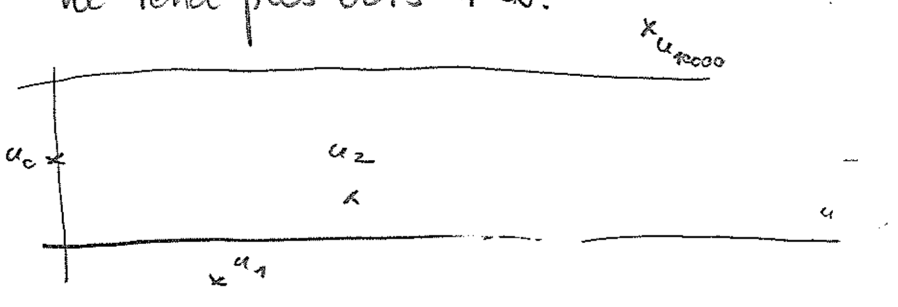
NB : C'est un abus de notation, ce n'est pas une limite au sens de la convergence.

Il ne faut jamais dire "la suite converge vers $+\infty$".

Ex : 1) La suite $u_n = n^2$ tend vers $+\infty$.

2) La suite $u_n = \begin{cases} n^2 & \text{si } n \text{ paire} \\ 0 & \text{si } n \text{ impaire} \end{cases}$

ne tend pas vers $+\infty$.



Défn: Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Règles de calcul:

a) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l>0$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors $(u_n\cdot v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

b) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $(\underset{\neq 0}{v_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $0$.

Exo: trouver les règles pour $l<0$ ou $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = -\infty$.

Exemple: $u_n = \frac{1}{n}$ converge vers $l=0$

$v_n = \sqrt{n}$ tend vers $+\infty$.

mais $u_n\cdot v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ ne tend pas vers $+\infty$.