CHAPITRE IX - CERCLES

(Ce qui se dit ici des cercles dans le plan, vaudrait, mutatis mutandis, pour les sphères d'un espace affine euclidien de dimension quelconque).

§1 PUISSANCE

1.1 D'abord un numéro de rappels "triviaux" : X est un plan euclidien.
Le cercle de centre $O \in X$ et de rayon $R > 0$ est le lieu des points $M \in X$ tels que $d(O,M) = R$. On le note souvent $\Gamma(O,R) = \Gamma$. $X - \Gamma$ est découpé en deux parties : l'intérieur de Γ, $Int(\Gamma) = \{M \in X \mid d(O,M) < R\}$ et son extérieur $Ext(\Gamma) = \{M \in X \mid d(O,M) > R\}$

Si D est une droite de X, on a l'une des 3 situations :

- $D \cap \Gamma = \emptyset \Leftrightarrow d(O,D) > R \Leftrightarrow D \subset Ext(\Gamma)$ (on dit que D est extérieure à Γ)
- $D \cap \Gamma = \{T\} \Leftrightarrow d(O,D) = R \Leftrightarrow D \cap \Gamma \neq \emptyset$ et $D \cap Int\,\Gamma = \emptyset$ (on dit que D est tangente à Γ au point de contact T). On a $\langle OT \rangle \perp D$.
- $D \cap \Gamma = \{A,B\} \Leftrightarrow d(O,D) < R \Leftrightarrow D \cap Int\,\Gamma \neq \emptyset$ (on dit que D est sécante à Γ, ou encore coupe Γ en A et B).

Dans tous les cas la réflexion d'axe $O + \vec{D}^{\perp}$ conserve toute la figure.
Si D passe par O, on dit que c'est un diamètre de Γ, et dans ce cas, si $D \cap \Gamma = \{A,B\}$, on dit que A et B sont diamétralement opposés sur Γ ou encore que Γ est le cercle de diamètre AB.

Si $C \in Int\,\Gamma$, toute droite issue de C est sécante à Γ.
Si $C \in \Gamma$ toute droite issue de C est sécante à Γ, sauf $C + \langle \vec{OC} \rangle^{\perp}$, qui est tangente à Γ en C. Si $C \in Ext\,\Gamma$, il existe, menées de C, des droites sécantes à Γ, extérieures à Γ, et deux tangentes à Γ, en T et T'. On a $CT^2 = CT'^2 = d^2 - R^2$, où $d = d(O,C)$.

Si $\Gamma = \Gamma(O,R)$ et $\Gamma' = \Gamma(O',R')$ sont deux cercles distincts, et $d = d(O,O')$ on a l'une des trois situations :

- $\Gamma \cap \Gamma' = \emptyset \Leftrightarrow$
  - $d > R+R' \Leftrightarrow \Gamma' \subset Ext\,\Gamma \Leftrightarrow \Gamma \subset Ext\,\Gamma'$ (on dit que Γ et Γ' sont extérieurs l'un à l'autre)
  - ou $d < R'-R \Leftrightarrow \Gamma \subset Int\,\Gamma'$ (on dit que Γ est intérieur à Γ')
  - ou $d < R-R' \Leftrightarrow \Gamma' \subset Int\,\Gamma$ (" Γ' " Γ)
- $\Gamma \cap \Gamma' = \{T\} \Leftrightarrow$
  - $d = R+R' \Leftrightarrow \dots$ (on dit qu'ils sont tangents extérieurement)
  - ou $d = R'-R$ ... (Γ est tangent intérieurement à Γ')
  - ou $d = R-R'$ ...
- $\Gamma \cap \Gamma' = \{A,B\} \Leftrightarrow |R-R'| < d < R+R'$ (on dit que Γ et Γ' sont sécants en A et B)

Si $O \neq O'$ la réflexion d'axe $\langle OO' \rangle$ conserve toute la figure.
Si $O = O'$, on dit que Γ et Γ' sont concentriques, l'un est intérieur à l'autre, et toute réflexion d'axe passant par O les conserve.

OUF!

1.2 On appelle puissance d'un point $A \in X$ par rapport à un cercle $\Gamma = \Gamma(O,R)$, et on note $p(A,\Gamma)$, le nombre réel $d^2 - R^2$, où $d = d(A,O)$.

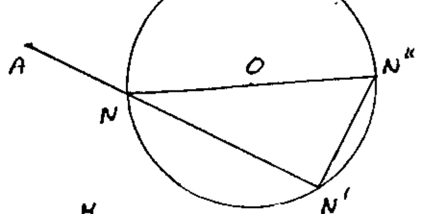
1.3 Proposition: a) Soient M et M' deux points diamétralement opposés de Γ. On a: $p(A,\Gamma) = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM'}$.

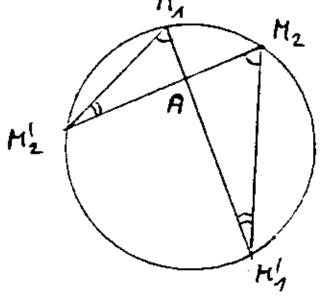
b) Soit D une droite issue de A, sécante à Γ en $\{N, N'\}$. On a:
$$p(A,\Gamma) = \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AN'}$$

c) Soit D une droite issue de A tangente à Γ en T. On a:
$$p(A,\Gamma) = AT^2$$

d) Si deux droites issues de $A \notin \Gamma$ coupent Γ en $\{M_1, M_1'\}$ et $\{M_2, M_2'\}$, les triangles AM_1M_2 et $AM_2'M_1'$ sont (indirectement) semblables.

Preuve:





a) On a $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM'} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}) \cdot (\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OM})$
$= d^2 - R^2$

b) Soit N'' le point diamétralement opposé à N. Le triangle N, N', N'' est rectangle en N' (VIII.3.13), qui est donc la projection orthogonale de N'' sur $\langle AN \rangle$ (on suppose $A \neq N$, sinon on prend N')
D'où $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AN'} = \overrightarrow{AN} \cdot (\overrightarrow{AN'} + \overrightarrow{N'N''}) = p(A,\Gamma)$ par a).

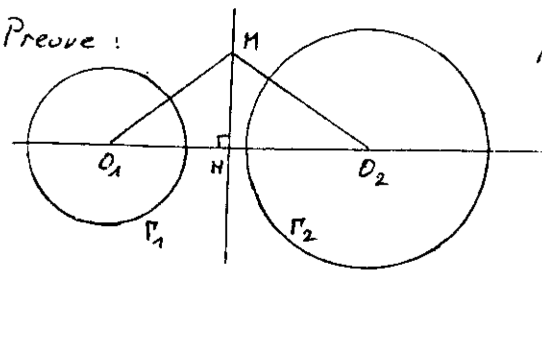
c) est clair par Pythagore, ou le même raisonnement qu'au b).

d) est clair par b) et VIII.3.5.b), ou directement par VIII.3.5c) et VIII.2.6 et 2.10. appliqués avec discernement! ■

On remarquera que $A \in \mathrm{Int}\,\Gamma \Leftrightarrow p(A,\Gamma) < 0$; $A \in \mathrm{Ext}\,\Gamma \Leftrightarrow p(A,\Gamma) > 0$; $A \in \Gamma \Leftrightarrow p(A,\Gamma) = 0$.

1.4 Proposition: Étant donnés deux cercles Γ_1 et Γ_2 non concentriques, le lieu des points M du plan qui ont même puissance par rapport à Γ_1 et Γ_2 est une droite orthogonale à la droite des centres. On l'appelle axe radical de Γ_1 et Γ_2.
(si Γ_1 et Γ_2 sont concentriques, ce lieu est vide)

Preuve:



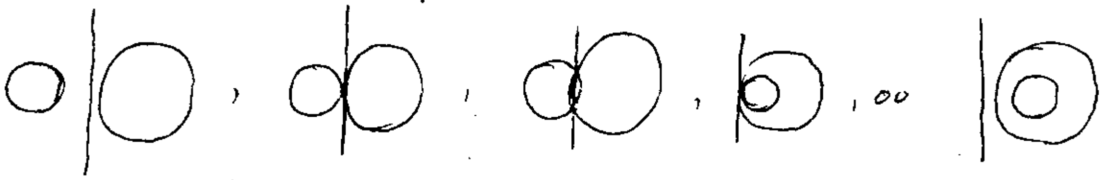
Posons $\Gamma_1 = \Gamma(O_1, R_1)$, $\Gamma_2 = \Gamma(O_2, R_2)$, $M \in X$, et H la projection orthogonale de M sur O_1O_2, $d_1 = d(O_1, M)$ $d_2 = d(O_2, M)$, $e_1 = O_1H$, $e_2 = O_2H$, et $h = HM$. Par Pythagore, on a:

$$d_1^2 - R_1^2 = d_2^2 - R_2^2 \iff e_1^2 - R_1^2 = e_2^2 - R_2^2 .$$

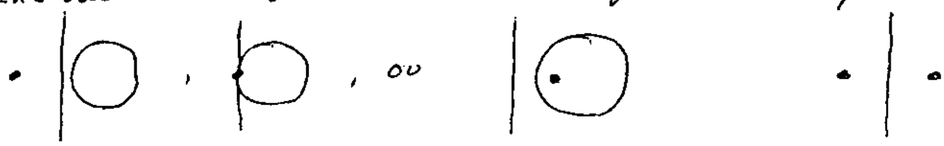
Or e_1+e_2 ou $|e_1-e_2|$ vaut $d(O_1,O_2) = d \neq 0$. Par suite l'équation $e_1^2 - e_2^2 = R_1^2 - R_2^2$ fixe le signe de $e_1 - e_2$, et implique

$$|e_1 - e_2| = \frac{R_1^2 - R_2^2}{d} \quad \text{ou} \quad e_1 + e_2 = \frac{R_1^2 - R_2^2}{d} \quad \text{suivant le cas.} \blacksquare$$

La discussion implique que l'on a l'un des cas de figure suivants:



Elle vaut encore si l'un des cercles dégénère en un point (R_1 ou $R_2 = 0$):

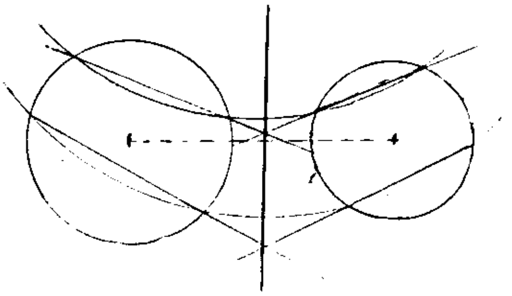


et même les deux: l'axe radical de deux cercles-points est leur médiatrice.

<u>1.5 Proposition.</u> <u>Etant donnés trois cercles $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ de centres non alignés, il existe un et un seul point ω du plan ayant même puissance par rapport aux trois cercles. On l'appelle centre radical des trois cercles.</u>

Preuve: Si Δ_i est l'axe radical de Γ_j et Γ_k ($\{i,j,k\}$ permutation de $\{1,2,3\}$) $\Delta_1 \not\parallel \Delta_2$, donc $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \{\omega\}$, et $p(\omega,\Gamma_2) = p(\omega,\Gamma_3) = p(\omega,\Gamma_1)$, donc $\omega \in \Delta_3$. $\blacksquare$

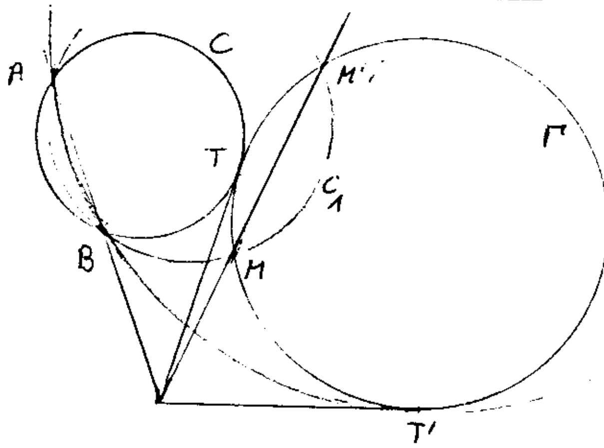
<u>1.6</u> L'axe radical de deux cercles se construit comme l'indique la figure ci-contre.



On peut donc construire "à la règle et au compas" l'axe radical de 2 cercles, ou le centre radical de 3 cercles.

Achevons ce paragraphe en donnant deux "applications"

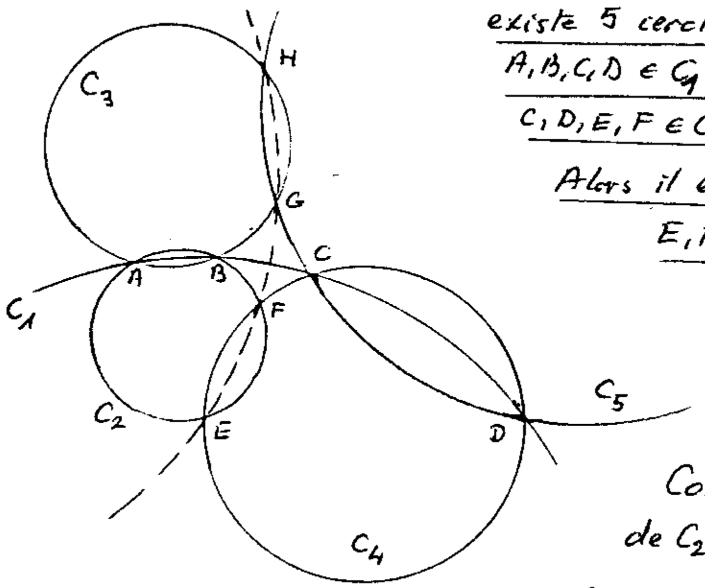
<u>1.7 Construction d'un cercle C passant par deux points donnés A et B et tangent à un cercle donné Γ:</u> Soit C_1 un cercle passant par A et B et sécant à Γ en $\{M, M'\}$, $\omega = MM' \cap AB$, T et T' les pieds des tangentes menées de ω à Γ, C le cercle circonscrit à ABT. On a $\omega T^2 = p(\omega,\Gamma) = \overrightarrow{\omega M}\cdot\overrightarrow{\omega M'} = p(\omega, C_1) = (\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega B}) = p(\omega, C)$. Par suite ωT est tangente à C. $\blacksquare$



La preuve montre qu'il y a 0, 1, ou 2 solutions. La discussion est laissée au lecteur.

1.8 "Théorème du sixième cercle" : A, B, C, D, E, F, G, H sont distincts, et il existe 5 cercles C_j ($j = 1, .., 5$) tels que $A, B, C, D \in C_1$; $A, B, E, F \in C_2$; $A, B, G, H \in C_3$; $C, D, E, F \in C_4$; et $CDGH \in C_5$.

Alors il existe un cercle C_6 tel que $E, F, G, H \in C_6$.



Preuve : Soit ω le centre radical de C_1, C_2 et C_4. On a $\omega = AB \cap CD \cap EF$. Comme AB est l'axe radical de C_2 et C_3, et CD celui de C_4 et C_5,

$p(\omega, C_3) = p(\omega, C_2) = p(\omega, C_4) = p(\omega, C_5)$

Donc $\omega \in GH$ qui est l'axe radical de C_3 et C_5, et $\vec{\omega G} \cdot \vec{\omega H} = \vec{\omega A} \cdot \vec{\omega B} = \vec{\omega E} \cdot \vec{\omega F}$. E, F, G, H sont donc cocycliques. ■

§2 INVERSION

2.1 L'inversion $i = i(O, k)$ de centre (ou "pôle") $O \in X$ et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ est la bijection de $X - \{O\}$ définie par $\vec{OM'} = \dfrac{k \cdot \vec{OM}}{\|\vec{OM}\|^2}$ ($M \in X$, $M' = i(M)$).

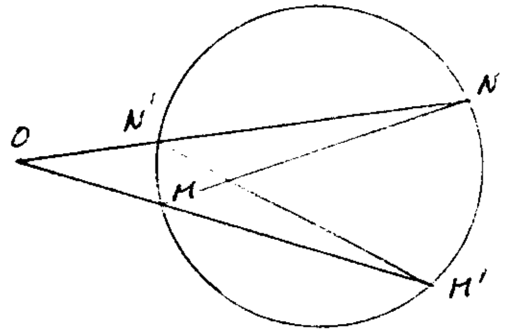
autrement dit : $\vec{OM} \cdot \vec{OM'} = k$ (et O, M, M' alignés)

i est involutive ($i^2 = id$), et le lieu des invariants de i est $\emptyset$ si $k < 0$, $\Gamma(O, \sqrt{k})$ si $k > 0$. Dans ce cas on l'appelle "l'inversion de cercle Γ".

2.2 Lemme : Soient $M, N \in X - \{O\}$, $M' = i(M)$, $N' = i(N)$. Alors M, N, M', N' sont cocycliques, ou alignés avec O.

Preuve : Cela résulte de la définition et de 1.3.b). ■

En particulier (par 1.3.d), les triangles OMN et $ON'M'$ sont semblables.



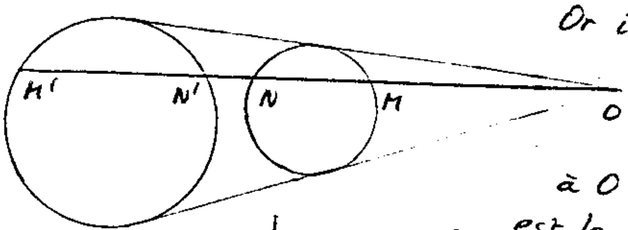
2.3 *Proposition :* a) Si $\Gamma(\omega,\cdot)$ est un cercle ne passant pas par O, $\Gamma' = i(\Gamma) = \Gamma(\omega',\cdot)$ est un cercle ne passant pas par O, et $\omega\omega'$ passe par O.

b) Si $\Gamma(\omega,\cdot)$ est un cercle passant par O, $\Gamma' = i(\Gamma)$ est une droite orthogonale à $O\omega$

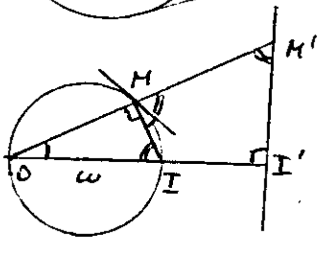
c) Si Δ est une droite, et $H \neq O$ la projection orthogonale de O sur Δ, $\Delta' = i(\Delta)$ est un cercle centré sur OH.

d) Si Δ est une droite passant par O, $i(\Delta) = \Delta$.

Preuve : a) Soit $p = p(O,\Gamma) \neq 0$. D'après 1.3.b) l'inversion $i(O,p)$ conserve Γ.



Or $i(O,k) = h(O,\frac{k}{p}) \circ i(O,p)$, et $h(\Gamma)$ est un cercle Γ'...



b) Si I est diamétralement opposé à O sur Γ, $M \in \Gamma$, $M' = i(M)$, et I' est la projection orthogonale de M' sur OI, les triangles OMI et $OI'M'$ sont semblables et par suite $\frac{OM}{OI'} = \frac{OI}{OM'}$, d'où $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OI'} = k$, et $I' = i(I)$.

c) résulte de b) et de l'involutivité, d) est clair ■

2.4 *Proposition : Une inversion change les angles en leurs opposés.*

Preuve : C'est en effet une application différentiable, dont la différentielle est une similitude indirecte, qui a cette propriété. ■

Mais certains cas particuliers sont visibles par des moyens plus élémentaires, comme les angles égaux de la figure du 2.3.b).

2.5 Il est tentant de considérer une inversion de pôle O comme une bijection de $\tilde{X} = X \amalg \{\infty\}$ en posant $i(O) = \infty$ et $i(\infty) = O$. Si de plus on appelle cercle dans $\tilde{X}$ un cercle de X ou une droite de X complétée par $\{\infty\}$, les énoncés de 2.2 et 2.3 se simplifient : deux points et leurs "inverses" sont toujours cocycliques, et l'"inverse" d'un cercle est un cercle.

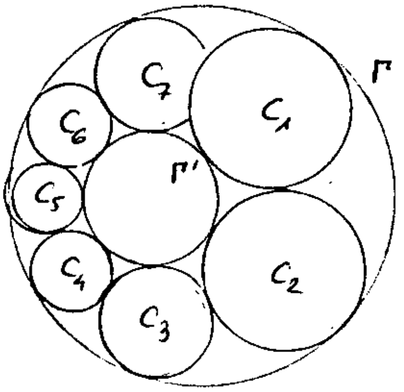
Il faut prendre garde que $\tilde{X}$ n'est pas le complété projectif $\overline{X}$ de X (c'est par contre $\overline{\mathbb{C}}$ si on identifie X à $\mathbb{C}$ ...)

Les réflexions apparaissent alors comme des inversions particulières, dont le cercle d'invariants est une droite, et le pôle est ∞.

On pourra par exemple vérifier que si f et g sont des inversions ou réflexions, $g \circ f \circ g^{-1}$ est encore une inversion ou une réflexion, suivant que l'image par g de l'ensemble des invariants de f est un cercle (au sens habituel) ou une droite.

2.6 L'intérêt de l'inversion, outre pour la chasse au lion, est qu'elle fournit des preuves élégantes d'énoncés de géométrie euclidienne faisant intervenir des cercles, des droites, et des angles. On remarquera qu'on peut toujours trouver une inversion qui transforme deux cercles donnés en:
a) deux droites concourantes, s'ils sont sécants
b) deux droites parallèles, s'ils sont tangents
c) deux cercles concentriques, sinon. (on choisit le pôle en un point commun dans les deux premiers cas, en un point-limite du faisceau qu'ils engendrent dans le dernier - voir pour cela 3.4 et 3.5).

2.7 Un exemple de la méthode du 2.6 est donné par le théorème connu sous le nom d'"alternative de Steiner": Γ' intérieur à Γ. On part d'un premier cercle bitangent C_1, et on construit C_{j+1} tangent à Γ, Γ' et C_j ... Alors



- ou bien la suite est infinie
- ou bien : $\exists n : C_{n+1} = C_1$

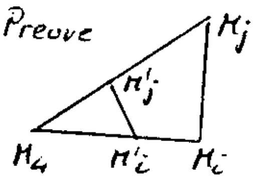
L'existence de n, et le nombre n lui-même ne dépendent que de Γ et Γ' (pas de C_1).

Preuve: C'est clair quand Γ et Γ' sont concentriques, et on applique 2.6.c). ■

2.8 Un autre exemple d'application est le célèbre

Théorème de Ptolémée: M_1, M_2, M_3, M_4 distincts. $d_{ij} = d(M_i, M_j)$ $(1 \leq i, j \leq 4)$.
Alors: a) On a toujours $d_{12}d_{34} \leq d_{13}d_{24} + d_{14}d_{23}$
et l'égalité implique que les quatre points sont cocycliques (ou alignés)
b) Les quatre points sont cocycliques ou alignés si et seulement si l'on a l'une des égalités $\boxed{\pm d_{12}d_{34} \pm d_{13}d_{24} \pm d_{14}d_{23} = 0}$

Preuve



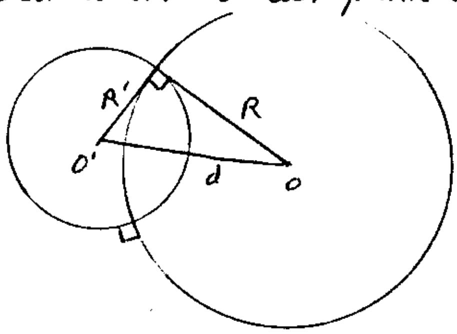
Soit i l'inversion de pôle M_4 et de puissance 1, $M'_j = i(M_j)$ $(j = 1,2,3)$, et $d'_{ij} = d(M'_i, M'_j)$. On a:

$$d'_{ij} = M'_iM'_j = M_iM_j \cdot \frac{M_4M'_i}{M_4M_j} = M_iM_j \cdot \frac{M_4M'_i \cdot M_4M_i}{M_4M_j \cdot M_4M_i} = \frac{d_{ij}}{d_{i4}\,d_{j4}}$$

Par suite $d_{14}d_{23} + d_{13}d_{24} - d_{12}d_{34} = d_{14}d_{24}d_{34}\,(d'_{23} + d'_{13} - d'_{12})$,
et le a) résulte de l'inégalité triangulaire et de 2.3.b).
Le b) aussi, car de 3 points alignés, l'un est toujours entre les autres. ■

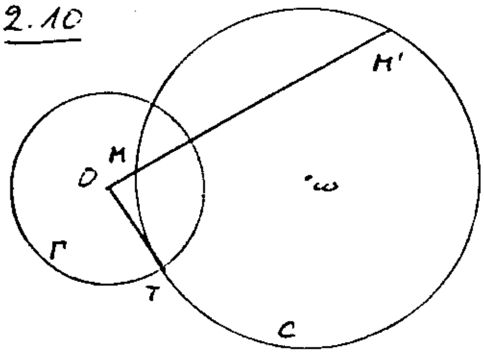
« Le produit des diagonales d'un quadrilatère convexe inscrit à un cercle est la somme des produits des cotés opposés. »

2.9 On dit que deux cercles sont orthogonaux s'ils se coupent à angle droit, c'est-à-dire si aux points d'intersection la tangente à l'un est le diamètre de l'autre.



Avec les notations du 1.1, cela équivaut donc à : $\boxed{d^2 = R^2 + R'^2}$

2.10



Soit $i = i(O,k^2)$ une inversion qui laisse invariants les points de $\Gamma = \Gamma(O,k)$.

Proposition. Pour un cercle C, sont équivalents :

a) C passe par un couple $\{M, M'\}$ de points échangés par i.

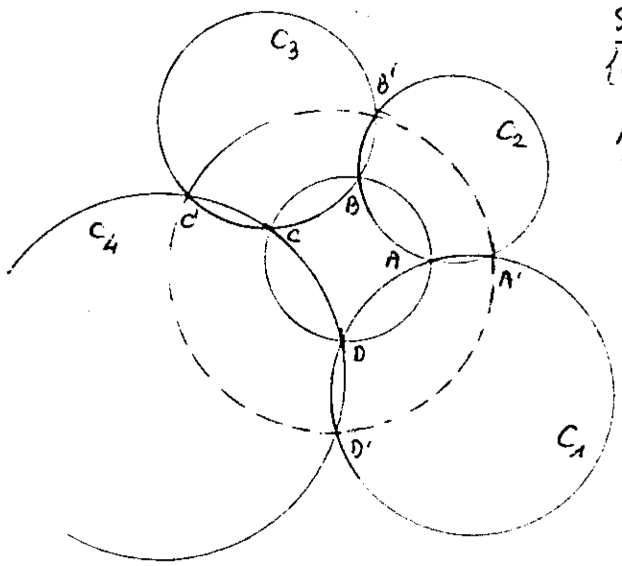
b) C est globalement invariant par i.

c) C est orthogonal à Γ.

Preuve : a) $\Leftrightarrow$ b) car si $N \in C$ et $N' = i(N)$, on a
$$\vec{ON}\cdot\vec{ON'} = p(O,C) = \vec{OM}\cdot\vec{OM'} = k^2$$

b) $\Rightarrow$ c) Posons $C = \Gamma(\omega,R)$ et $d = O\omega$. Comme O est extérieur à C, puisque $p(O,C) = k^2 > 0$, on peut mener de O une tangente à C en T. Alors $T = i(T)$, et $k^2 = OT^2 = d^2 - R^2$. La réciproque c) $\Rightarrow$ b) se fait de même. ∎

2.11 Citons encore ici le "Théorème des six cercles de Miquel" :



Si $\{A,A'\} = C_1 \cap C_2$, $\{B,B'\} = C_2 \cap C_3$, $\{C,C'\} = C_3 \cap C_4$, $\{D,D'\} = C_4 \cap C_1$, alors

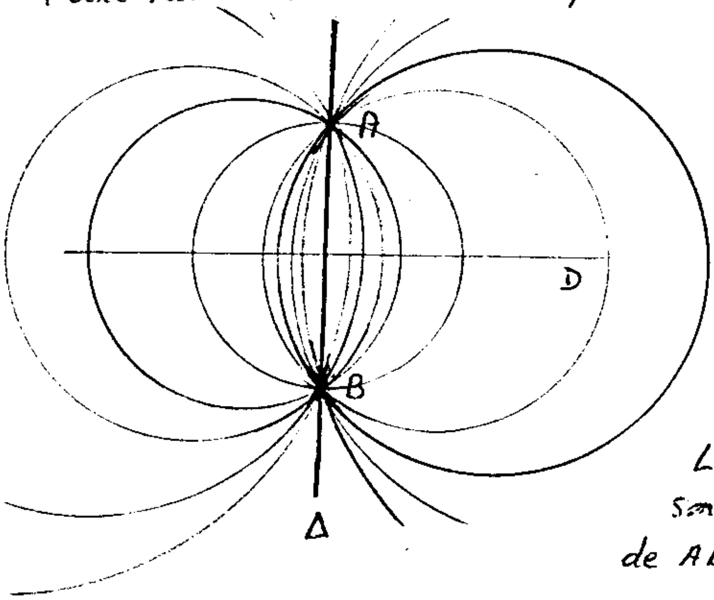
A,B,C,D cocycliques $\Leftrightarrow$ A',B',C',D' cocycliques

Preuve : Si A,B,C,D sont cocycliques, une inversion de pôle D transforme la figure en celle de l'énoncé VIII. 2.9. ∎

On peut aussi démontrer directement le théorème de Miquel, à l'aide d'"angles inscrits" (VIII. 2.6).

(§3) FAISCEAUX DE CERCLES

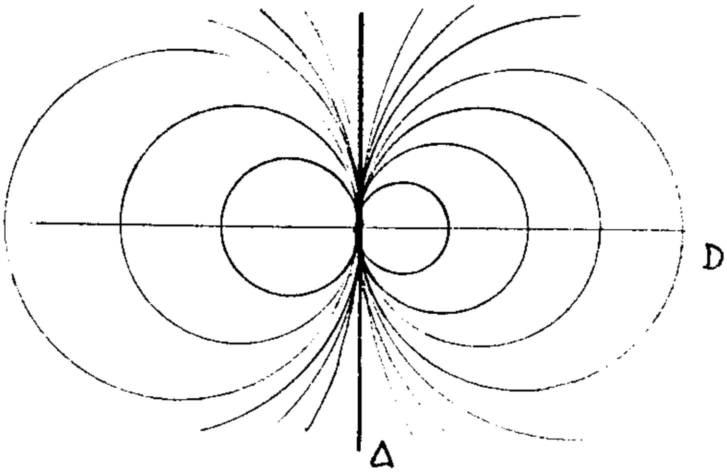
3.1 On appelle faisceau de cercles engendré par C_1 et C_2 la famille de tous les cercles qui ont même axe radical avec C_1 que C_2. On l'appelle l'axe radical du faisceau. Il y a 3 cas de figure:

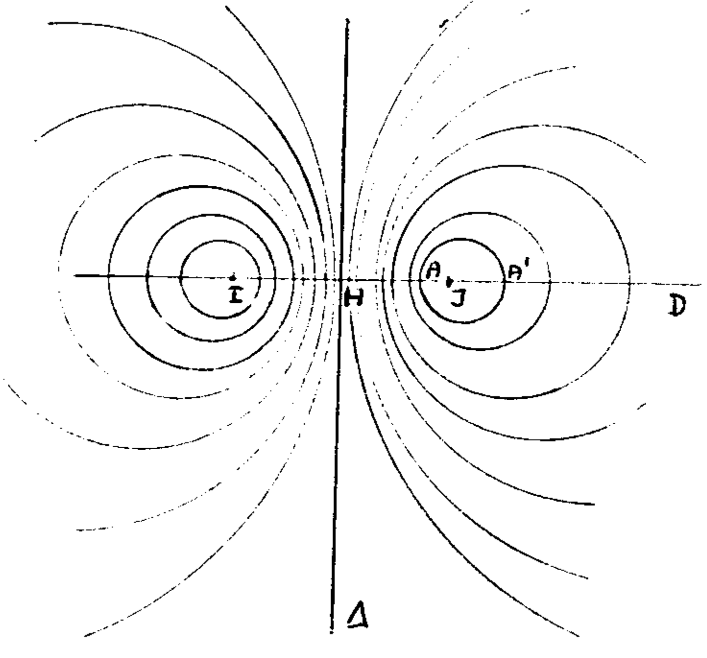


1) Si $C_1 \cap C_2 = \{A, B\}$, $\Delta = \langle AB \rangle$ est leur axe radical, et $p(A, C_1) = p(B, C_1) = 0$ implique que chaque cercle du faisceau passe par A et B. Réciproquement tout cercle passant par A et B appartient au faisceau. On parle du faisceau à points de base A et B

Les centres des cercles du faisceau sont les points de la médiatrice D de AB, appelée droite des centres

2) Si $C_1 \cap C_2 = \{T\}$, l'axe radical est la tangente commune au point T, et de même, les cercles du faisceau sont les cercles tangents en T à Δ. Ils sont centrés sur la droite $D = T + \vec{\Delta}^{\perp}$, appelée la droite des centres. On parle d'un faisceau de cercles tangents



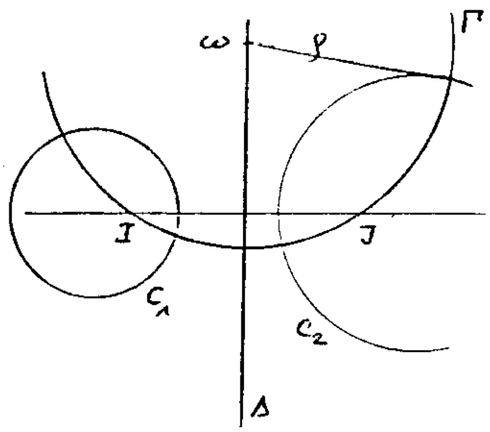


3) Si $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, Δ étant l'axe radical, et D la droite qui joint les centres, tout cercle du faisceau est centré sur D. Si $H = D \cap \Delta$ et $C_1 \cap D = \{A, A'\}$, le faisceau contient les deux cercles-points I et J, définis par
$\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HA'} = \overrightarrow{HI}^2 = \overrightarrow{HJ}^2$,
symétriques par rapport à H.
Les centres des autres cercles sont les points de la "droite des centres" D, privée de l'intervalle $[I, J]$.
On parle du faisceau à points limites I et J.

4) Si C_1 et C_2 sont concentriques, on peut admettre pour faisceau engendré par C_1 et C_2 la famille des cercles de même centre.

5) Un faisceau de droites est la famille formée par toutes les droites qui passent par un point donné, ou de direction donnée. On admet que ce sont des faisceaux de cercles "dégénérés". D'ailleurs tout faisceau de cercles ne contient-il pas un cercle "dégénéré" en droite, son axe radical?

3.2 Proposition: L'ensemble des cercles orthogonaux à tous les cercles d'un faisceau $\mathcal{F}$ forme un autre faisceau $\mathcal{F}'$, appelé faisceau dual. On a $\mathcal{F}'' = \mathcal{F}$. Le dual du faisceau à points de base (A,B) est le faisceau à points limites (A,B). Le dual d'un faisceau de cercles tangents en T est un faisceau de cercles tangents en T. Etc..



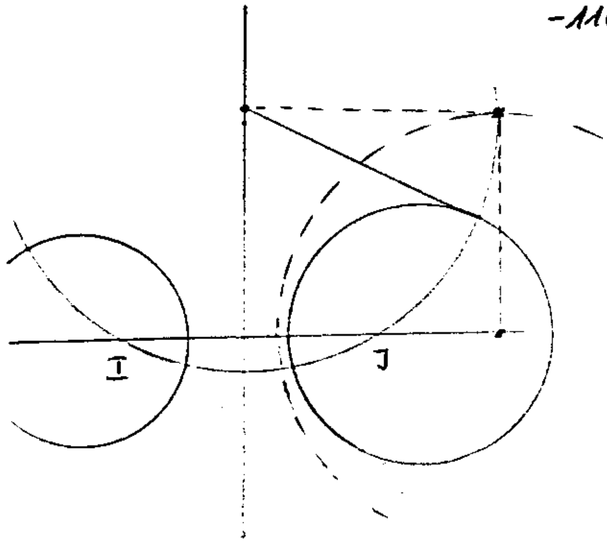
Preuve: Si Γ est orthogonal à C_1 et C_2, centré en ω et de rayon ρ, on a $p(\omega, C_1) = \rho^2 = p(\omega, C_2)$, donc $\omega \in \Delta$, et $\forall C \in \mathcal{F}$ $p(\omega, C) = \rho^2$, donc $\Gamma \perp C$.
Réciproquement dès que ω est un point de Δ extérieur à C_1 et C_2, le cercle de centre ω et de rayon $\sqrt{p(\omega, C_1)}$ est orthogonal à C_1 et à tous les cercles du faisceau. Si $\mathcal{F}$ est à points limites I et J, on a en particulier $\rho^2 = \omega I^2 = \omega J^2$, donc Γ passe par I et J... ∎

3.3 Proposition: Par un point du plan qui n'est pas un point de base passe un et un seul cercle d'un faisceau donné (éventuellement dégénéré)

Preuve: C'est clair pour un faisceau à point de base, donc aussi pour un faisceau à points limites en utilisant 3.2. C'est aussi clair dans tous les autres cas. ∎

3.4 Il y a lieu de donner des constructions à la règle et au compas
- des points limites d'un faisceau défini par deux cercles sans intersection
- du cercle d'un faisceau donné passant par un point donné
- du cercle d'un faisceau donné de centre donné.

Les constructions sont indiquées par la figure suivante:
(on sait toujours construire l'axe radical par 1.6):



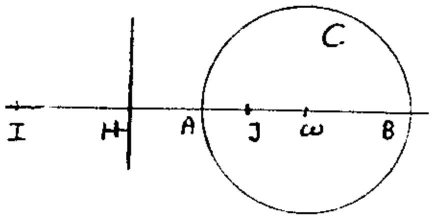
<u>3.5 Proposition: L'image d'un faisceau par une inversion ou par une similitude est un faisceau.</u>

Preuve: C'est clair pour un faisceau à points de base, puisque ces applications transforment tout cercle en cercle. C'est vrai aussi, par 3.2 pour un faisceau à points limites, puisqu'elles conservent l'orthogonalité. ■

<u>3.6 Proposition: Soient C un cercle et I et J deux points $\notin C$. Sont équivalents:</u>

a) <u>L'inversion dont les invariants sont les points de C échange I et J</u>

b) <u>C appartient au faisceau à points limites I et J.</u>



On en donne deux preuves:

1) Soit ω le centre de C. Sous chacune des hypothèses, on a $\omega \in \langle IJ \rangle$. Posons $\{A, B\} = C \cap \langle IJ \rangle$, et $H = \frac{I+J}{2}$.

$$(a) \Leftrightarrow \overrightarrow{\omega A}^2 = \overrightarrow{\omega B}^2 = \overrightarrow{\omega I}.\overrightarrow{\omega J} = (\overrightarrow{\omega H} + \overrightarrow{HI})(\overrightarrow{\omega H} + \overrightarrow{HJ})$$
$$= \overrightarrow{\omega H}^2 - \overrightarrow{HJ}^2 = \overrightarrow{\omega H}^2 - \overrightarrow{\omega A}^2 + \overrightarrow{\omega A}^2 - \overrightarrow{HJ}^2$$
$$= \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HJ}^2 + \overrightarrow{\omega A}^2 \text{ par } 1.3.$$

Donc $(a) \Leftrightarrow \overrightarrow{HJ}^2 = \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HB} \Leftrightarrow (b)$. ■

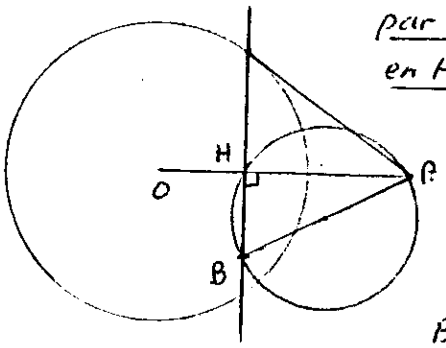
2) L'inversion de cercle C échange I et J si et seulement si elle conserve globalement tous les cercles du faisceau à points de base I et J, donc par 2.10 si et seulement si C est orthogonal à tous les cercles passant par I et J, et on conclut par 3.2. ■

<u>3.7 Remarque</u> La dernière égalité de la première preuve de 3.6 signifie précisément (d'après VI.1.11.c) que <u>la division I, J, A, B est harmonique.</u>

§4 POLARITÉ

4.1 On dit que deux points A et B sont conjugués par rapport au cercle C si le cercle de diamètre AB est orthogonal à C.

4.2 Proposition: Soit $C = \Gamma(O,R)$. Si $A \neq O$, le lieu des points conjugués de A par rapport à C est une droite orthogonale à $\langle OA \rangle$ en H tel que $\overline{OH}.\overline{OA} = R^2$. On l'appelle la polaire de A par rapport à C. Toute droite qui ne passe pas par O est la polaire d'un point et d'un seul, appelé son pôle.



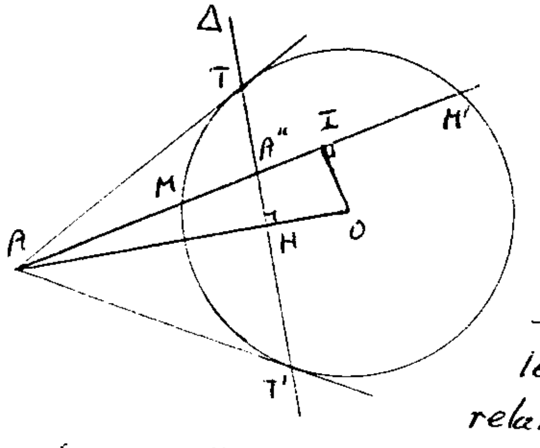
Preuve: Soit H la projection orthogonale d'un point B sur OA. Le cercle de diamètre AB passe par H. Alors B conjugué de A par rapport à $C \Leftrightarrow \overline{OA}.\overline{OH} = R^2$ par 2.10. ∎

4.3 Proposition: Trois points sont alignés si et seulement si leurs polaires sont concourantes (ou parallèles s'ils sont alignés avec O).

Preuve: Le point de concours des polaires des deux premiers est le pôle de la droite qui les joint. ∎

4.4 Si A est extérieur à C, la polaire passe par les pieds des tangentes menées de A à C (figure ci-dessus), puisque ces points sont visiblement conjugués de A. Ceci donne une construction facile de la polaire de A. Si $A \in C$, sa polaire est la tangente en A à C. Si A est intérieur, on peut tracer deux sécantes passant par A, construire leurs pôles P et P', et la polaire de A est $\langle PP' \rangle$.

4.5 Proposition: Soit D une sécante à C, $\{M,M'\} = D \cap C$, et $A, A' \in D$. A et A' sont conjugués par rapport à C si et seulement si la division (A, A', M, M') est harmonique.

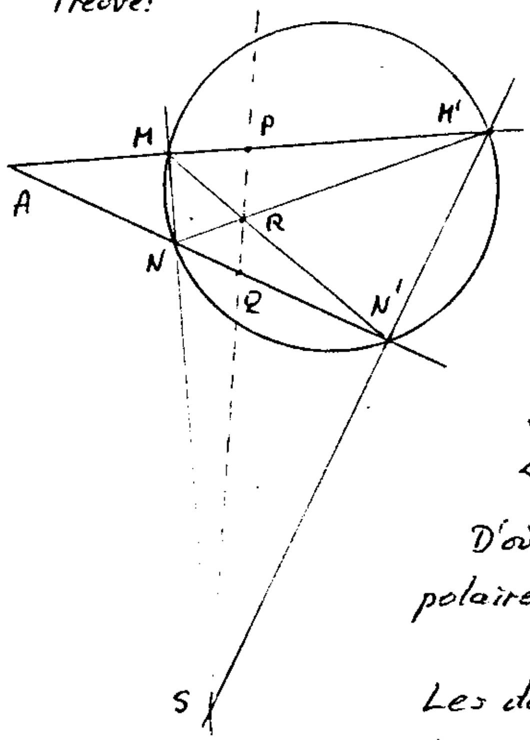


Preuve: Supposons A extérieur et soit Δ la polaire de A qui coupe C en T et T', $\langle OA \rangle$ en H et D en A''. L'inversion de centre A et de puissance AT^2 conserve le cercle C, échange Δ avec le cercle de diamètre OA, et envoie donc H sur M', et A'' sur la projection orthogonale de O sur $\langle AA' \rangle$, c'est-à-dire le milieu I de MM'. D'où $\overline{AM}.\overline{AM'} = \overline{AA''}.\overline{AI}$, relation qui implique (cf. 3.7) que la division (A, A'', M, M') est harmonique. ∎

En particulier la polaire de A contient tous les conjugués harmoniques de A sur les sécantes issues de A (et rien d'autre si A est intérieur).

4.6 Corollaire : Si deux sécantes issues de A coupent C en $\{M,M'\}$ et $\{N,N'\}$, $\langle MN'\rangle$ et $\langle NM'\rangle$ se coupent sur la polaire de A, ainsi que $\langle M,N\rangle$ et $\langle M',N'\rangle$.

Preuve:



Soient P et Q les conjugués harmoniques de A par rapport à $\{M,M'\}$ et à $\{N,N'\}$. La polaire de A est la droite $\langle PQ\rangle$ par 4.5.

Or la polaire de A par rapport aux droites $\langle MN'\rangle$ et $\langle NM'\rangle$ passe par P, Q et $\langle MN'\rangle \cap \langle NM'\rangle = R$, et celle de A par rapport aux droites $\langle MN\rangle$ et $\langle M'N'\rangle$ passe par P, Q, et $\langle MN\rangle \cap \langle M'N'\rangle = S$. ∎

D'où une construction géométrique de la polaire.

Les deux notions de polarité introduites jusqu'ici, par rapport à un cercle dans ce paragraphe, et par rapport à deux droites au chapitre VI, §2, sont des cas particuliers de la polarité par rapport à une conique, qui sera étudiée au chapitre XI.

§5 EXERCICES

5.1 a) Reprendre le 1.1 par des calculs dans un repère orthonormé
b) Achever les démonstrations qui n'ont été qu'indiquées : 2.4, 5, 6c ; 3.1, 2, 3, 4, 5
c) Démontrer le 2.6.c de deux façons (3.5 et cas dégénéré de 3.2 ; calcul direct)

5.2 Donner une preuve directe (par "angles inscrits") du théorème des six cercles (2.11).

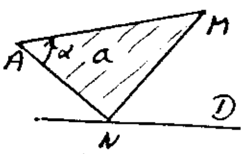
5.3 Dans le cas de deux cercles concentriques dans l'alternative de Steiner (2.7), calculer la condition sur le rapport de leurs rayons pour que le tracé soit clos après n cercles ?

5.4 a) Il y a toujours deux dilatations du plan qui envoient un cercle donné sur un cercle donné. Si ce sont des homothéties leurs centres ω et ω' sont alignés avec les centres O et O' des deux cercles et (O, O', ω, ω') est harmonique
b) ω et ω' sont les pôles des inversions échangeant les cercles. Toute tangente commune aux deux cercles coupe $\langle OO' \rangle$ en ω ou ω'.
c) Donner une construction à la règle et au compas de ω et ω' et des tangentes communes
d) Etant donnés trois cercles du plan il existe "en général" six inversions qui échangent deux d'entre eux. Leurs pôles sont trois à trois alignés sur quatre droites. En donner une construction.

5.5 Soient C et C' deux cercles d'axe radical Δ. D'un point M de C extérieur à C' on abaisse une tangente à C' et on note T le point de contact. Montrer que $MT^2/d(M, \Delta)$ est constant (indépendant de M).

5.6 Lieu des centres des cercles tangents à deux cercles donnés

5.7



Etant donnés une droite D, un point $A \notin D$, un angle α et un nombre positif a, pour tout point N de D on définit le point M par $(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AM}) = \alpha$ et aire $\widehat{AMN} = a$.
Lieu de M quand N parcourt D.

5.8 Soit Γ un cercle et A, B, C, P quatre points distincts. Montrer que les cercles de diamètres PA, PB et PC se coupent (outre en P) en trois points alignés.

5.9 a) Constater qu'un faisceau de cercles n'est autre qu'une famille linéaire de cercles, c'est-à-dire une droite de l'espace projectif de tous les cercles-ou-droites du plan (réels ou non). On commencera par étudier la famille de cercles (C_λ) d'équations $(A+\lambda A')x^2+y^2-2(B+\lambda B')x-2(C+\lambda C')y+(D+\lambda D')=0$ dans un repère orthonormé donné.
b) Condition pour que deux cercles soient orthogonaux ?
Equation du faisceau dual ?

5.10 a) Soient A, B, C trois points non alignés. Les bissectrices de (AB, AC) recoupent BC en D et D'. Montrer que $\frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC}$

b) Le lieu des points M du plan dont le rapport des distances à deux points B et C est une constante donnée $\left(\frac{MB}{MC} = k > 0\right)$ est un cercle C_k dont on précisera les points d'intersection avec BC. La famille (C_k) est un faisceau de cercles. Lequel?

c) Le lieu des points M du plan d'où l'on voit BC sous un angle donné $((MB, MC) = \alpha)$ est un cercle Γ_α. La famille (Γ_α) est un faisceau. Lequel?

d) Étant donnés deux points z_1 et z_2 du plan complexe, préciser une construction géométrique du point z tel que $\frac{z-z_1}{z-z_2} = a e^{i\theta}$ (a, θ donnés)

5.11 Soit C un cercle de centre O, A et A' deux points, Δ et Δ' leurs polaires par rapport à C. Montrer que $\frac{d(A, \Delta')}{OA} = \frac{d(A', \Delta)}{OA'}$

5.12 a) Montrer que les polaires d'un point par rapport à tous les cercles d'un faisceau sont "en général" concourantes. Quel est le point de concours?

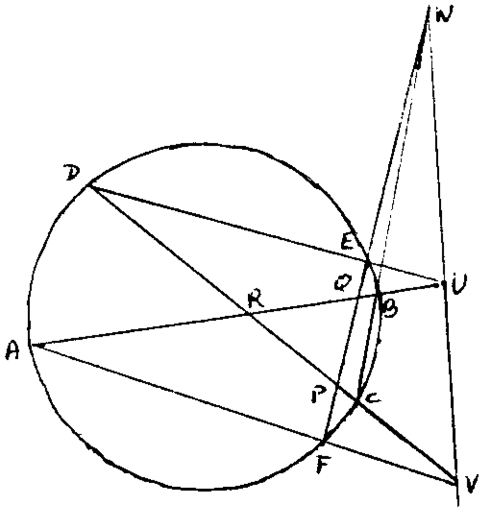
b) Discuter les cas particuliers. Montrer qu'un point-limite a même polaire par rapport à tous les cercles du faisceau.

5.13 a) Equation de la polaire d'un point par rapport à un cercle? Condition pour que deux points soient conjugués? Vérifier que trois points sont alignés si et seulement si leurs polaires concourent.

b) Soit C un cercle de centre O et ABC un triangle dont aucun coté ne passe par O. Les pôles A', B', C' des cotés BC, CA, AB sont les sommets d'un triangle dont les cotés sont les polaires de A, B, C. L'application $\{ABC\} \mapsto \{A'B'C'\}$ est une dualité des triangles encore appelée polarité. Si $\{ABC\}$ et $\{A'B'C'\}$ sont polaires l'un de l'autre, montrer que AA', BB', et CC' sont concourantes et $AB \cap A'B'$, $BC \cap B'C'$, $CA \cap C'A'$ sont alignés.

c) Décrire les triangles autopolaires par rapport à C, puis les cercles par rapport à qui un triangle donné est autopolaire.

5.14 <u>"L'hexagone de Pascal" et ses cas dégénérés</u>



a) $ABCDEF$ est un hexagone inscrit à un cercle. Montrer que les trois points de rencontre des cotés opposés

$U = AB \cap DE$, $V = BC \cap EF$, $W = CD \cap FA$

sont alignés

(On peut utiliser quatre fois le théorème de Ménélaüs appliqué au triangle PQR)

b) "A la limite si $A \to F$ et $C \to D$", on obtient l'énoncé suivant

Si un quadrilatère est inscrit à un cercle, les deux points de rencontre des cotés opposés et les deux points de rencontre des tangentes aux sommets opposés sont alignés.

Le démontrer directement par des considérations de polarité.

c) "A la limite si $A \to F$, $B \to C$, $D \to E$" on obtient:
Soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC, et α, β, γ les tangentes à (C) en A, B, C : Les trois points $\alpha \cap BC$, $\beta \cap CA$, et $\gamma \cap AB$ sont alignés.
Le démontrer directement par des considérations angulaires.

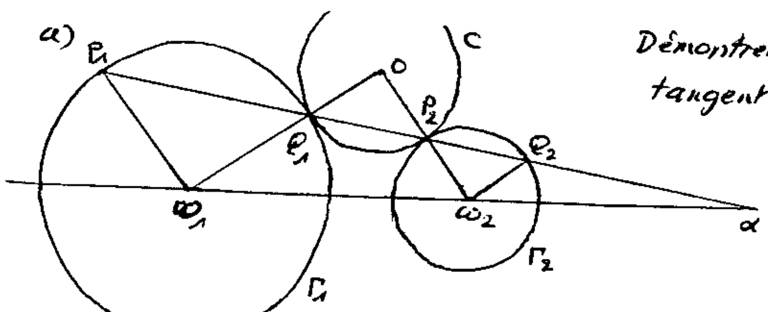
5.15 Le problème d'Apollonius : tracer les cercles tangents à trois cercles donnés.

I) Méthode de réduction: a) Se convaincre qu'il y a jusqu'à huit solutions

b) Ramener la question à la construction d'un cercle passant par un point donné et tangent à deux cercles donnés

c) Résoudre géométriquement la question précédente en distinguant trois cas de figure

II) Méthode "de Gergonne"

a) 

Démontrer le lemme: si C est tangent à Γ_1 et Γ_2, homothétiques de centre α, on a
$p(\alpha, C)^2 = p(\alpha, \Gamma_1) . p(\alpha, \Gamma_2)$

b) En déduire que la construction suivante "marche":
- on construit le centre radical O de C_1, C_2, C_3
- on construit les six centres d'inversion qui échangent deux de ces trois cercles (cf. 5.4.d)
- on choisit l'une des quatre droites qui portent trois des points précédents, soit D, et on construit les pôles P_1, P_2, P_3 de D par rapport à C_1, C_2, C_3
- $\langle OP_j \rangle \cap C_j = \{T_j, T'_j\}$ $(j = 1,2,3)$
- les points T_j et T'_j (convenablement choisis) sont les points de contact avec C_j de deux des cercles cherchés.

5.16 Le cercle "de Feuerbach" (ou "d'Euler" ou "des neuf points")

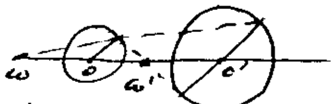
a) Soit H l'orthocentre d'un triangle ABC. Il existe un cercle appelé comme ci-dessus et qui passe par les milieux IJK des cotés, les pieds LMN des hauteurs et les milieux P, Q, R de HA, HB, HC

b) Son centre ω est le milieu de OH et son rayon est $\frac{1}{2}R$ ($\Gamma(O,R)$ est le cercle circonscrit)

c) (Théorème de Feuerbach) Il est tangent aux quatre cercles inscrit et exinscrits au triangle.

Indications pour les exercices

5.3 $\frac{R'}{R} = \frac{1-\sin\frac{\pi}{n}}{1+\sin\frac{\pi}{n}}$

5.4 c) Construction : 

d) Les diagonales du quadrilatère complet obtenu sont les droites des centres. (Composer les inversions)

5.5 Commencer par vérifier que la distance d'un point à droite, et sa puissance par rapport à un cercle sont données par leurs équations !

5.6 Uniquement par le calcul (c'est la réunion de deux coniques)

5.7 $N \mapsto M$ est le produit d'une inversion et d'une rotation

5.8 Une inversion de pôle P ramène la figure à celle de la droite de Simson

5.10 a) Tracer par B la parallèle à AC et utiliser des triangles isocèles

b) C'est le faisceau à points-limites B et C

c) C'est le faisceau dual

d) Séparer module et argument.

5.11 Nommer les pieds des polaires et les projections de A et A' sur OA', Δ', OA, Δ
Ecrire des rapports de similitude.

5.12 Utiliser la notion de points conjugués.

5.14 On verra au chapitre XI des preuves plus unifiées

5.15 Le c) contient la construction de l'intersection d'une parabole et d'une droite, à trouver au chapitre X.

5.16 a) $IJKL$ est un trapèze isocèle, donc inscriptible
Appliquer ensuite la même idée au triangle HBC, d'orthocentre A

b) $\omega = \frac{C+H}{2}$ par Thalès car il est sur les médiatrices de LI, JM, KN.

c) Soient A_1 et A_2 les points de contact de BC avec les cercles inscrit et exinscrit ~~et~~ On a $I = \frac{A_1+A_2}{2}$, donc $IA_1 = IA_2 = \rho$ et l'inversion de pôle I et de puissance ρ^2 transforme le cercle de Feuerbach en une parallèle à la tangente menée de I à ce cercle, donc une parallèle à la tangente menée de A au cercle circonscrit. Or celle-ci est symétrique de BC par rapport à AI. Donc l'image du cercle de Feuerbach par cette inversion est l'autre tangente commune aux cercles inscrit et exinscrit ...