CHAPITRE VIII - GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE ÉLÉMENTAIRE (ET PLANE)

§1 ANGLES (DE DEMI-DROITES), BISSECTRICES, CAS D'ÉGALITÉ

1.1 Le groupe orthogonal $O(\vec{P})$ d'un plan euclidien s'identifie, par le choix d'une base orthonormée, au groupe $O(2)$ des matrices $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ telles que $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $a^2+b^2=c^2+d^2=1$, et $ac+bd=0$.

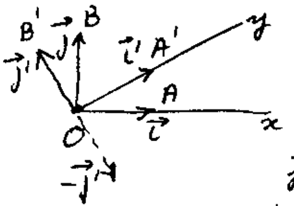
La dernière condition implique que $\binom{c}{d}$ est lié à $\binom{-b}{a}$, donc, à cause des autres, de la forme $\binom{-\varepsilon b}{\varepsilon a}$, avec $\varepsilon=\pm 1$; dans ce cas $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \varepsilon$.

D'où $O(2) = SO(2) \amalg O^-(2)$, avec $O^-(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \right\}$ et $SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right\}$.

1.2 L'application $\varphi : \mathbb{C} \to M_2(\mathbb{R})$, $a+ib \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ est un morphisme d'anneaux injectif, qui envoie $\mathbb{C}^*$ dans $GL(2,\mathbb{R})$, et $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\}$ sur $SO(2)$.
$SO(2) \xrightarrow[\sim]{\varphi^{-1}} \mathbb{U}$ est un isomorphisme de groupes (d'ailleurs bicontinu pour les topologies naturelles). En particulier $SO(2)$ est commutatif.

1.3 Lemme. Soit P un plan affine euclidien, Ox et Oy des demi-droites de même sommet. Il existe un et un seul déplacement ρ de P tel que $\rho(Ox)=Oy$. C'est une rotation de centre O.

Preuve



Soient $\vec{OA}=\vec{\imath}$, $\vec{OA'}=\vec{\imath}'$ des vecteurs unitaires portés par Ox et Oy, complétés en deux repères orthonormés $\{O,A,B\}$ et $\{O,A',B'\}$ par $\vec{OB}=\vec{\jmath}$ et $\vec{OB'}=\vec{\jmath}'$.
Toute isométrie f de P telle que $f(Ox)=Oy$ vérifie : $f(O)=O$, $\vec{f}(\vec{\imath})=\vec{\imath}'$ et $\vec{f}(\vec{\jmath})=\pm\vec{\jmath}'$. De plus, il y en a une seule f_0 telle que $f_0(O)=O$, $\vec{f_0}(\vec{\imath})=\vec{\imath}'$, $\vec{f_0}(\vec{\jmath})=\vec{\jmath}'$.
Par suite $f=f_0$, ou $f=\sigma_{\langle Oy\rangle}\circ f_0$, et de ces deux isométries, une seule est un déplacement. Il conserve O, donc c'est une rotation de centre O. ■

Autrement dit, l'ensemble des demi-droites issues de O est un espace homogène principal sous le groupe des rotations de centre O, qui est canoniquement isomorphe (par le choix de l'origine en O) au groupe $SO(\vec{P})$, donc commutatif par 1.2.

1.4 On appelle angle de deux demi-droites Ox et Oy, et on note (Ox,Oy) la classe d'équivalence modulo déplacement du couple ordonné des deux demi-droites (de même sommet, pour l'instant).

Soit θ un angle, $\{Ox, Oy\}$ et $\{Ox', Oy'\}$ deux de ses représentants de même origine, et ρ et ρ' les rotations de centre O définies d'après 1.3 par $\rho(Ox) = Oy$ et $\rho'(Ox') = Oy'$. Enfin soit ρ_0 un déplacement qui fait passer du premier couple au second. ρ_0 conserve O, donc c'est une rotation de centre O, et $\rho_0(Ox) = Ox'$, $\rho_0(Oy) = Oy'$. Par suite :

$\rho' \circ \rho_0 (Ox) = \rho'(Ox') = Oy' = \rho_0(Oy) = \rho_0 \circ \rho(Ox)$, d'où $\rho' \circ \rho_0 = \rho_0 \circ \rho$ par 1.3, puis $\rho' = \rho$ puisque les rotations de centre O sont un groupe commutatif.

Il s'ensuit que l'application $\theta \mapsto \rho$ de l'ensemble $\mathcal{A}$ des angles dans $SO(\vec{P})$ est bien définie, et par suite (et par 1.3) bijective. On munit $\mathcal{A}$ de la structure de groupe commutatif induite de celle de $SO(\vec{P})$ par cette identification, et comme $SO(\vec{P})$ est commutatif, on note $\mathcal{A}$ additivement. Par pléonasme, on parle de la "rotation ρ d'angle θ", et on a $\rho_\theta \circ \rho_{\theta'} = \rho_{\theta+\theta'}$.

1.5 Étant données quatre demi-droites de sommet O, on a :

$$\boxed{(Ox, Oy) = (Ox', Oy') \iff (Ox, Ox') = (Oy, Oy')}$$

ce qui résulte de la relation de Chasles (cf. I.3.7)

$$\boxed{(Ox, Oy) + (Oy, Oz) = (Ox, Oz)}$$

qui résulte elle-même de 1.3, de même que $\boxed{(Oy, Ox) = -(Ox, Oy)}$

1.6 Lemme : Soit D une droite passant par O, ρ une rotation de centre O. On a :

$$\boxed{\sigma_D \circ \rho \circ \sigma_D = \rho^{-1}}$$

Preuve : D'après VII.3.7, $\sigma_D \circ \rho$ étant un antidéplacement conservant O, c'est une réflexion, donc involutive : $\sigma_D \circ \rho \circ \sigma_D \circ \rho = id$. ■

1.7 Corollaire : Un déplacement conserve les angles, un antidéplacement les change en leur opposé.

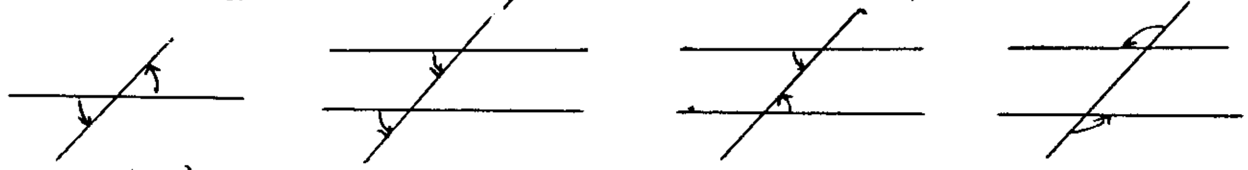
Preuve : La première assertion résulte de la définition 1.4, et implique qu'il suffit de vérifier la seconde pour une réflexion. C'est alors l'énoncé 1.6. ■

1.8 Par définition, le groupe des angles est isomorphe à $SO(\vec{P})$, donc à $SO(2)$ par le choix d'une base orthonormée. Si l'on change de base orthonormée, l'élément M de $SO(2)$ correspondant à un angle donné est changé en $A^{-1}MA$, où A est la matrice de changement de base, et $A \in O(\vec{P})$. Si $A \in SO(\vec{P})$, $A^{-1}MA = M$ puisque ce groupe est commutatif. Mais si $A \in O^-(\vec{P})$, on a $A^{-1}MA = M^{-1}$ par le lemme 1.6.

En conclusion, l'identification $\mathcal{A} \simeq SO(2)$ dépend du choix de l'une des deux classes de repères orthonormés de P modulo déplacement, c'est-à-dire du choix d'une orientation de P. Si l'on change d'orientation, on compose l'identification précédente avec l'automorphisme principal $\theta \longmapsto -\theta$ du groupe $\mathcal{A}$.

1.9 On parle aussi de l'angle (Ax, By) de deux demi-droites qui n'ont pas même sommet : c'est (Ax, Ay') où $Ay' = t_{\vec{BA}}(By)$, ou (Bx', By) où $Bx' = t_{\vec{AB}}(Ax)$.
De même sont bien définis les angles de deux demi-droites vectorielles de $\vec{P}$, de deux bi-points, de deux vecteurs (non nuls ! : $(\vec{AB}, \vec{CD}) = (\mathbb{R}^{+}\vec{AB}, \mathbb{R}^{+}\vec{CD})$), etc... toutes ces notions définissent sans ambiguïté un élément de $\mathcal{A}$.

1.10 Des angles classiquement appelés "opposés par le sommet", "correspondants" "alternes-internes", "alternes-externes" sont égaux d'après 1.7 (dans chaque cas, on a noté sous la figure entre parenthèses le déplacement qui les échange ; les droites non concourantes de chaque figure sont supposées parallèles)

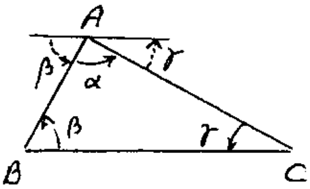


(demi-tour) (translation) (les deux) (les deux)

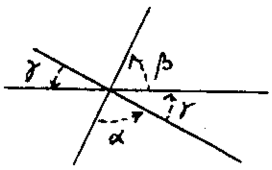
On appelle angle plat et on note ϖ l'angle formé par deux demi-droites "opposées par le sommet", c'est-à-dire dont la réunion est une droite. (Une rotation d'angle ϖ est un demi-tour).

1.11 Théorème : « La somme des angles d'un triangle vaut ϖ », soit :
$\forall A, B, C$ $$\boxed{(\vec{AB}, \vec{AC}) + (\vec{BC}, \vec{BA}) + (\vec{CA}, \vec{CB}) = \varpi}$$

Preuve :



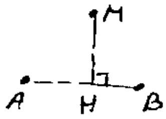
ou bien



(par 1.10) ■

1.12 Théorème : Le lieu des points du plan équidistants de deux points distincts A et B est la droite $\frac{A+B}{2} + \langle AB \rangle^{\perp}$. On l'appelle "médiatrice" de (A,B)

Preuve :



Soit $M \in P$ et H sa projection orthogonale sur $\langle AB \rangle$.
Par le théorème de Pythagore, $MA^2 = MH^2 + HA^2$ et $MB^2 = MH^2 + HB^2$,
d'où $MA = MB \Leftrightarrow HA = HB \Leftrightarrow H = \frac{A+B}{2}$. ■

1.13 Théorème : a) Etant données deux demi-droites Ox et Oy issues de O, il existe une seule droite Δ telle que σ_Δ échange Ox et Oy. On l'appelle "bissectrice" de Ox et Oy, ou par abus de l'angle (Ox, Oy). C'est la même que celle de Oy et Ox.
b) Si δ est l'une des demi-droites issues de O et portées par Δ, on a $(Ox, \delta) = (\delta, Oy)$, et réciproquement cette propriété caractérise Δ.

Preuve : a) Si Δ est solution, $\sigma_\Delta(O) = O$, donc Δ passe par O. Soit ρ la rotation de centre O et d'angle (Ox, Oy), $A \neq O$ un point de Ox, $B = \rho(A) \in Oy$, Δ_1 la médiatrice de (A,B). Δ_1 passe par O, et $H = \langle AB \rangle \cap \Delta_1$ est le milieu

de (A,B) par 1.12. Donc $B=\sigma_{\Delta_1}(A)$ et par suite $\sigma_{\Delta_1}(Ox)=Oy$.
Donc Δ_1 est une solution, et si Δ en est une autre, on a
$\sigma_{\Delta_1}\circ\sigma_{\langle Ox\rangle}(Ox)=\sigma_{\Delta_1}(Ox)=Oy=\sigma_\Delta(Ox)=\sigma_\Delta\circ\sigma_{\langle Ox\rangle}(Ox)$, d'où par 1.3
$\sigma_{\Delta_1}\circ\sigma_{\langle Ox\rangle}=\sigma_\Delta\circ\sigma_{\langle Ox\rangle}$, puis $\sigma_{\Delta_1}=\sigma_\Delta$ et $\Delta_1=\Delta$.

b) On a en utilisant 1.7 : $(\delta,Oy)=(\sigma_\Delta(\delta),\sigma_\Delta(Ox))=-(\delta,Ox)=(Ox,\delta)$.
Réciproquement si δ est une demi-droite issue de O telle que $(\delta,Oy)=(Ox,\delta)$, posant $\Delta=\langle\delta\rangle$ il vient $(\delta,Oy)=-(\delta,Ox)=(\sigma_\Delta(\delta),\sigma_\Delta(Ox))=(\delta,\sigma_\Delta(Ox))$, d'où $\sigma_\Delta(Ox)=Oy$ par 1.3, puis la conclusion par a). ■

1.14 Lemme : Étant données deux droites D et D', sont équivalents

a) $\sigma_D\circ\sigma_{D'}=\sigma_{D'}\circ\sigma_D$
b) D' est invariante par σ_D
c) D est invariante par $\sigma_{D'}$
d) $D=D'$ ou $D\perp D'$

Preuve : Tout est vrai si $D=D'$. Supposons $D'\neq D$. (b) et (c) s'échangent en échangeant D et D', ce qui conserve (a) et (d). Il suffit donc de vérifier l'équivalence de (a), (b), et (d).
(a) $\Rightarrow$ (b) : Si $M\in D'$ et $M'=\sigma_D(M)$, on a $M'=\sigma_D\circ\sigma_{D'}(M)=\sigma_{D'}\circ\sigma_D(M)=\sigma_{D'}(M')$, donc $M'\in D'$.
(b) $\Rightarrow$ (d) : Si $M\in D'-D$ et $M'=\sigma_D(M)\neq M$, tout point de D est équidistant de M et M', donc D est la médiatrice de $\langle MM'\rangle=D'$, et $D\perp D'$.
(d) $\Rightarrow$ (a) car si $D'\perp D$ et $O=D\cap D'$, on a $\sigma_{D'}\circ\sigma_D=\sigma_O=\sigma_D\circ\sigma_{D'}$ (par un calcul dans un repère orthonormé d'axes D et D'). ■

1.15 Théorème : Étant données deux droites D_1 et D_2 concourantes en O, il existe deux et seulement deux droites Δ telles que σ_Δ échange D_1 et D_2. On les appelle les "bissectrices" des droites D_1 et D_2. Elles sont orthogonales et se coupent en O.

Preuve : Si Δ est une solution, σ_Δ conserve O, donc Δ passe par O. Soient δ_1,δ_1' et δ_2,δ_2' les demi-droites issues de O et portées respectivement par D_1 et D_2, Δ_0 et Δ_0' les bissectrices de (δ_1,δ_2) et de (δ_1,δ_2'). Si $\sigma_\Delta(D_1)=D_2$, on a $\sigma_\Delta(\delta_1)=\delta_2$ ou δ_2', donc $\Delta=\Delta_0$ ou Δ_0'. Réciproquement il est clair que $\sigma_\Delta(D_1)=D_2=\sigma_{\Delta'}(D_1)$. De plus :
$\sigma_O\circ\sigma_\Delta(\delta_1)=\sigma_O(\delta_2)=\delta_2'=\sigma_{\Delta'}(\delta_1)$, d'où $\sigma_O\circ\sigma_\Delta=\sigma_{\Delta'}$ et $\sigma_O=\sigma_{\Delta'}\circ\sigma_\Delta$.
Comme $id=\sigma_O^2=\sigma_{\Delta'}\circ\sigma_\Delta\circ\sigma_{\Delta'}\circ\sigma_\Delta$, il vient $\sigma_{\Delta'}\circ\sigma_\Delta=\sigma_\Delta\circ\sigma_{\Delta'}$, et par 1.14, $\Delta\perp\Delta'$. ■

1.16 On note souvent $\widehat{xOy}$ ou $\widehat{BAC}$ l'angle (Ox, Oy) ou $(\vec{AB}, \vec{AC})$ au signe près et on l'appelle angle géométrique, ou angle non orienté (on appelle alors angle orienté un élément de $\mathcal{A}$).

On dit que deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont égaux si l'un se déduit de l'autre par une isométrie. Dans ce cas leurs trois cotés sont égaux, et leurs trois angles géométriques aussi. (En fait leurs trois angles orientés sont soit tous égaux, soit tous opposés par 1.7 ; on dit que les triangles sont "directement" ou "inversement" égaux). Mais on a plusieurs réciproques :

1.17 "Cas d'égalité des triangles" (Proposition)

Deux triangles sont égaux dès qu'ils ont :

a) leurs trois cotés égaux
b) deux cotés et l'angle qu'ils forment égaux
c) un coté et les angles égaux

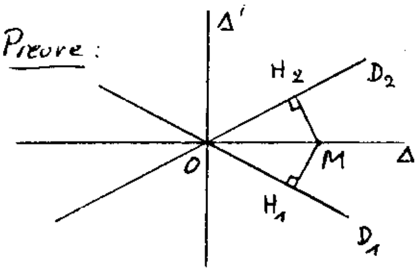
(il s'agit ici d'angles géométriques, et dans le (c) il suffit de vérifier l'égalité de deux des angles, d'après 1.11).

Preuves : Assez longues à détailler, elles sont ici laissées en exercice. Disons seulement qu'elles sont toutes fondées sur le lemme suivant :

Étant donnés quatre points A, B, A', B' tels que $AB = A'B' \neq 0$, il y a exactement deux isométries du plan qui envoient A sur A' et B sur B'. Une seule est directe et l'autre est sa composée par $\sigma_{\langle A'B' \rangle}$ à gauche, ou par $\sigma_{\langle AB \rangle}$ à droite.

1.18 Proposition : Le lieu des points du plan équidistants de deux droites concourantes D_1 et D_2 est $\Delta \cup \Delta'$, où Δ et Δ' sont les bissectrices de D_1 et D_2.

Preuve :

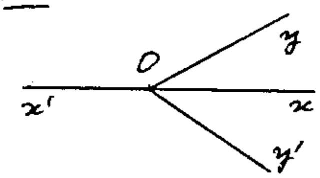


Soient H_1 et H_2 les projections orthogonales d'un point M du plan sur D_1 et sur D_2, et $O = D_1 \cap D_2$. Supposons $M \neq O$.
$d(M, D_1) = d(M, D_2) \Leftrightarrow MH_1 = MH_2$, et par le theorème de Pythagore, on a alors $OH_1 = \sqrt{OM^2 - MH_1^2} = \sqrt{OM^2 - MH_2^2} = OH_2$. Par 1.17.a) les triangles OMH_1 et OMH_2 sont donc égaux, et l'isométrie qui les échange conserve O et M, donc c'est $\sigma_{\langle OM \rangle}$ ou id. Comme $D_1 \neq D_2$, $H_1 \neq H_2$, et c'est $\sigma_{\langle OM \rangle}$. En particulier $\sigma_{\langle OM \rangle}(D_1) = D_2$, d'où $\langle OM \rangle = \Delta$ ou Δ' par 1.15.

Réciproquement, si $M \in \Delta$ par exemple, $\sigma_\Delta(D_1) = D_2$, $\sigma_\Delta(M) = M$, et $d(M, D_1) = d(M, D_2)$ puisque σ_Δ est une isométrie. ∎

(§2) ANGLES DE DROITES, ANGLES INSCRITS

2.1



Remarquons d'abord que le groupe $\mathcal{A}$ a un seul élément d'ordre 2, qui est ϖ : soit en effet $\alpha \in \mathcal{A}$ tel que $2\alpha = 0$, et $\alpha = (Ox, Oy)$. Soit Ox' l'autre demi-droite de $\langle Ox \rangle$, et $Oy' = \sigma_{\langle Ox \rangle}(Oy)$. Par 1.7,

$$\alpha = -(Ox, Oy') = (Oy', Ox)$$

d'où $0 = 2\alpha = (Oy', Ox) + (Ox, Oy) = (Oy', Oy)$. Donc $Oy' = Oy$, ce qui implique par 1.14 $Oy = Ox$ ou Ox', donc $\alpha = 0$ ou ϖ. ■

Par suite $\{0, \varpi\}$ est un sous groupe de $\mathcal{A}$. On pose $\mathcal{A}' = \mathcal{A}/_{\{0,\varpi\}}$ et on l'appelle le "groupe des angles de droites"

2.2 Proposition: Étant données deux droites D_1 et D_2 concourantes en O, δ_1, δ_1', δ_2, δ_2' les demi-droites de sommet O qu'elles définissent, et Δ et Δ' les bissectrices de D_1 et D_2, les quatre angles

$$(\delta_1, \delta_2), \quad (\delta_1, \delta_2'), \quad (\delta_1', \delta_2), \quad (\delta_1', \delta_2')$$

et les quatre angles des rotations

$$\sigma_\Delta \circ \sigma_{D_1}, \quad \sigma_{\Delta'} \circ \sigma_{D_1}, \quad \sigma_{D_2} \circ \sigma_\Delta, \quad \sigma_{D_2} \circ \sigma_{\Delta'}$$

ont tous la même image dans $\mathcal{A}'$. On l'appelle "l'angle de droites (D_1, D_2)".

Preuve: Si $(\delta_1, \delta_2) = \alpha$, $(\delta_1, \delta_2') = (\delta_1, \delta_2) + (\delta_2, \delta_2') = \alpha + \varpi$, et de même $(\delta_1', \delta_2) = \varpi + \alpha$ et $(\delta_1', \delta_2') = 2\varpi + \alpha = \alpha$.

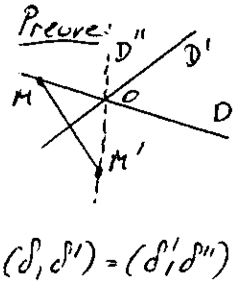
D'autre part les quatre rotations écrites envoient δ_1 sur δ_2 ou sur δ_2', et sont donc des rotations d'angle α ou $\alpha + \varpi$. ■

2.3 Corollaire: L'application $\theta \xmapsto{2\cdot} 2\theta$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ est surjective et se factorise à travers $\mathcal{A}'$ en $2\cdot = \partial \circ p$, où $p : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ est la projection canonique, et ∂ est un isomorphisme de groupes. De plus $\partial((D_1, D_2))$ est l'angle de $\sigma_{D_2} \circ \sigma_{D_1}$. En particulier pour quatre droites concourantes:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[rr, "2\cdot"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathcal{A} \\ & \mathcal{A}' \arrow[ur, "\partial"'] & \end{tikzcd}$$

$$(D_1, D_2) = (D_3, D_4) \iff \sigma_{D_2} \circ \sigma_{D_1} = \sigma_{D_4} \circ \sigma_{D_3}$$

Preuve:



Soit $\theta \in \mathcal{A}$, $\sigma_{D'} \circ \sigma_D$ une rotation d'angle θ, $O = D \cap D'$, $M \in D - D'$, $M' = \sigma_{D'} \circ \sigma_D(M) = \sigma_{D'}(M)$, et $\langle OM' \rangle = D''$. D' est la médiatrice de (M, M'), donc par 1.15 une bissectrice de D et D''. Soit δ' l'une des demi-droites portées par D', $\delta = \mathbb{R}_+ \cdot \overrightarrow{OM}$, $\delta'' = \mathbb{R}_+ \cdot \overrightarrow{OM'}$. Par 1.13.b), on a $(\delta, \delta') = (\delta', \delta'')$, d'où $2(\delta, \delta') = (\delta, \delta'') = \theta$, et $\partial((D, D')) = \theta$. ■

2.4 Remarques : 1) L'isomorphisme ∂ se note abusivement $2\cdot$.

2) En particulier les preuves de 2.3 et 2.2 nous montrent que les bissectrices Δ et Δ' de deux droites D_1 et D_2 sont les deux seules droites passant par $D_1 \cap D_2$ et telles que $(D_1, \Delta) = (\Delta, D_2)$ et $(D_1, \Delta') = (\Delta', D_2)$.

3) Tout angle a deux moitiés qui diffèrent de ϖ (puisque ∂ est un isomorphisme)
Les deux moitiés de l'angle nul sont les angles nul et plat ($\mathrm{Ker}\, 2\cdot = \{0, \varpi\}$)
Les deux moitiés de l'angle plat sont les deux angles droits (id est : formés par deux demi-droites orthogonales) : ceci résulte du lemme 1.14 :

$$D' \perp D \Leftrightarrow \sigma_{D'} \circ \sigma_D = \sigma_D \circ \sigma_{D'} \Leftrightarrow \text{cette rotation est involutive}$$
$$\Leftrightarrow \text{c'est la rotation d'angle } \varpi \text{ (par 2.1)}$$
$$\Leftrightarrow (D, D') \text{ est une moitié de } \varpi \text{ (par 2.3)}$$

4) $\mathcal{A}'$ étant un groupe isomorphe à $\mathcal{A}$, on a une relation de Chasles
$$(D_1, D_2) + (D_2, D_3) = (D_1, D_3)$$
et sa conséquence :
$$(D_1, D_2) = (D_3, D_4) \Leftrightarrow (D_1, D_3) = (D_2, D_4)$$
En particulier $D_1' \perp D_1$ et $D_2' \perp D_2$ implique $(D_1', D_2') = (D_1, D_2)$.

2.5 Il est naturel d'appeler "angle de droites" une classe d'équivalence de couples ordonnés de droites concourantes modulo déplacement, puis de définir $(\vec{D_1}, \vec{D_2})$ et (D_1, D_2) pour un couple de droites quelconque, comme on l'a fait en 1.9 pour des demi-droites. Si à un représentant (D_1, D_2) on associe l'élément de $\mathcal{A}'$ qui est l'image de l'angle de la rotation $\sigma_{D_2} \circ \sigma_{D_1}$ par ∂^{-1} (et 0 si D_1 est parallèle à D_2), on obtient une bijection naturelle entre cet ensemble de classes et le groupe $\mathcal{A}'$, cohérente avec la notation (D_1, D_2) de 2.2.

C'est donc en fait cet ensemble de classes d'équivalence de couples de droites qu'on a muni de la structure de groupe abélien de $\mathcal{A}'$.
En particulier, pour quatre droites quelconques du plan :
$$(D_1, D_2) = (D_3, D_4) \Leftrightarrow \overrightarrow{\sigma_{D_2} \circ \sigma_{D_1}} = \overrightarrow{\sigma_{D_4} \circ \sigma_{D_3}}$$

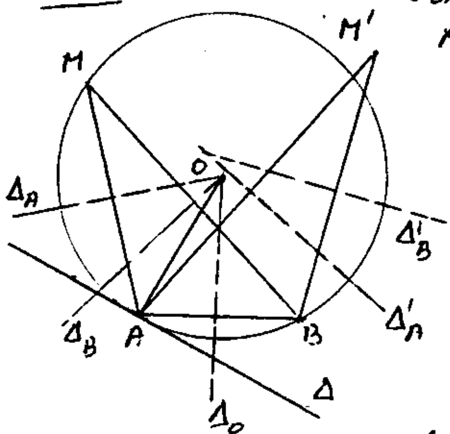
2.6 Théorème "des angles inscrits" : Soit Γ un cercle de centre O ; M, A, B trois points distincts de Γ, Δ la tangente en A à Γ (id est la perpendiculaire en A au "rayon" OA).

a) Le lieu des points M' du plan distincts de A et B et tels que
$$(M'A, M'B) = (MA, MB) \quad (\text{"angle inscrit"})$$
est le cercle Γ (privé de A et B)

b) $(MA, MB) = (\Delta, AB)$

c) $2\,(MA, MB) = (\vec{OA}, \vec{OB})$ ("angle au centre")

<u>Preuve:</u>



Soient $\Delta_A, \Delta_B, \Delta'_A, \Delta'_B, \Delta_0$ les médiatrices respectives de $MA, MB, M'A, M'B, AB$.

$\sigma_{\Delta_0}\circ\sigma_{(OA)}$ et $\sigma_{\Delta_B}\circ\sigma_{\Delta_A}$ sont des rotations de centre O qui envoient A sur B. Elles sont donc égales, et

$(\Delta, AB) = (OA, \Delta_0) = (\Delta_A, \Delta_B) = (MA, MB)$

par 2.4, 4°, d'où le (b).

Si Δ' est tangente en A au cercle de centre O' circonscrit à $M'AB$, on aura de même

$(M'A, M'B) = (\Delta', AB)$

D'où $(M'A, M'B) = (MA, MB) \iff (\Delta', AB) = (\Delta, AB)$

$\iff \Delta' = \Delta \iff O' = O \iff M' \in \Gamma$, soit (a).

Enfin le (c) résulte immédiatement de $(MA, MB) = (\Delta_A, \Delta_B)$ et de 2.3.

2.7 Corollaire: Étant donnés trois points M, A, B, MA et MB sont orthogonales si et seulement si M appartient au cercle de diamètre AB.

Preuve: Par 2.6.c), (MA, MB) droit $\iff (\vec{OA}, \vec{OB})$ plat $\iff O = \frac{A+B}{2}$, puisque $OA = OB$.

Notons d'ailleurs que ce corollaire peut se montrer indépendamment du théorème 2.6, et même de toute notion d'angle, puisque, dès que M, A, B sont trois points et $O = \frac{A+B}{2}$, on a

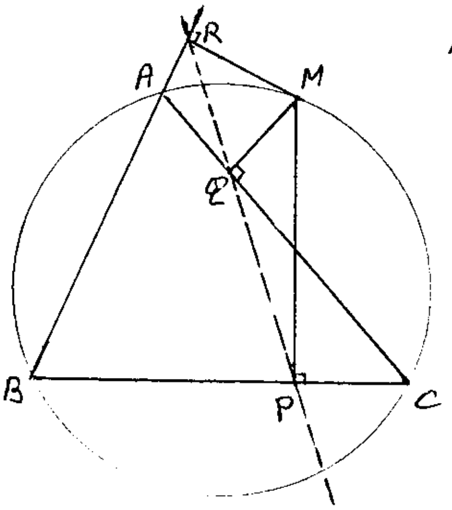
$$\vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 = (\vec{MO} + \vec{OA})^2 + (\vec{MO} - \vec{OA})^2 = 2\vec{MO}^2 + 2\vec{OA}^2 = 2\vec{MO}^2 + \frac{\vec{AB}^2}{2}$$

D'où: $MA \perp MB \iff \vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 = \vec{AB}^2 \iff \vec{MO}^2 = \vec{OA}^2 \iff OM = OA$

Donnons pour finir ce paragraphe deux exemples classiques d'utilisation de 2.6 et 2.7

2.8 "Droite de Simpson": Soient A, B, C trois points non alignés, et P, Q, R les projections orthogonales d'un point M sur BC, CA, AB. Alors:

P, Q, R alignés $\iff M, A, B, C$ cocycliques



Preuve: Par 2.7, sont cocycliques M, A, Q, R ; M, B, R, P ; et M, C, P, Q ; d'où par 2.6:

$(QA, QR) = (MA, MR)$

$(MP, MR) = (BP, BR) = (BC, BA)$

$(QC, QP) = (MC, MP)$

Par suite,

P, Q, R alignés $\iff (QC, QP) = (QA, QR)$

$\iff (MC, MP) = (MA, MR)$

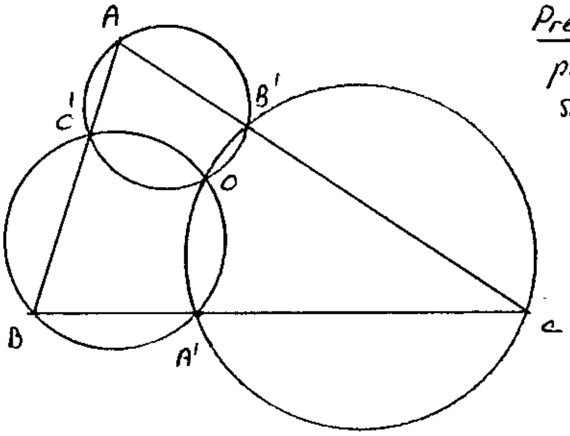
$\iff (MC, MA) = (MP, MR)$

$\iff (MC, MA) = (BC, BA)$

$\iff M, A, B, C$ cocycliques par 2.6

(La "droite de Simpson" est la droite PQR)

2.9 Proposition A, B, C non alignés, et $A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$. Alors les cercles circonscrits à $AB'C'$, $A'BC'$, et $A'B'C$ sont concourants



Preuve: Soit O le point de concours des deux premiers cercles (autre que C' – cf IX.1.1 pour son existence). Par 2.6

$(OB', OC') = (AB', AC')$ et $(OC', OA') = (BC', BA')$

d'où
$$(OB', OA') = (OB', OC') + (OC', OA') = (AC, AB) + (BA, BC) = (CA, CB) = (CB', CA')$$
et on conclut par 2.6. ■

2.10: Avec les notations de 2.6.a), on appelle arc capable le lieu des points M' du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B})$. C'est celui des deux arcs découpés par $\langle AB \rangle$ sur Γ qui contient M.

§3 SIMILITUDES

3.1 Définition: Soit X un espace affine euclidien. On appelle similitude de X de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^+$ une application $f : X \to X$ qui multiplie les distances par λ: $\forall x, y \in X \quad d(f(x), f(y)) = \lambda d(x, y)$.
Il s'ensuit que la composée $h^{-1} \circ f$, où h est n'importe quelle homothétie de rapport λ, est une isométrie, et par VII.1.6, c'est donc une application affine bijective. Donc toute similitude est une bijection affine de X, et $\vec{f} = \lambda \vec{g}$, avec $\vec{g} \in O(\vec{X})$.

3.2 On dit que la similitude f est directe si $\vec{g} \in SO(\vec{X})$, indirecte (ou inverse) sinon. L'ensemble des similitudes (resp. des similitudes directes) est donc l'image réciproque du sous-groupe $\mathbb{R}^+ . O(\vec{X})$ (resp. $\mathbb{R}^+ . SO(\vec{X})$) de $GL(\vec{X})$ par $GA(X) \to GL(\vec{X})$. Ce sont donc des groupes.

Dans la suite de ce paragraphe, on suppose que X est un plan.
Une similitude transforme donc une droite en droite, et un cercle de rayon R en un cercle de rayon λR. Une similitude directe conserve les angles, et une similitude indirecte les change en leurs opposés, par 1.7, puisque une dilatation les conserve par III.2.7.

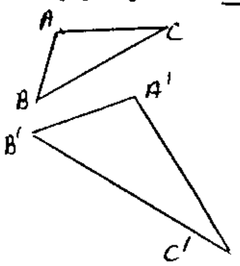
3.3 Proposition Une similitude directe qui n'est pas une translation a un et un seul point fixe ω. C'est de façon unique le produit commutatif d'une rotation de centre ω et d'une homothétie de centre ω et de même rapport. L'angle de la rotation s'appelle angle de la similitude, et ω son centre.

Preuve: Si $\lambda=1$, f est un déplacement, et par VII.3.7, si ce n'est pas une translation, c'est une rotation. Si $\lambda\neq 1$, $\vec{f}-id$ est injective, donc surjective.
Soit $x_0\in X$, et $f=t_{\vec{v}}\circ g$, avec $g\in GA(X)_{x_0}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{x_0 f(x_0)}$.
Il existe $\vec{w}\in\vec{X}$ tel que $\vec{v}=\vec{f}(\vec{w})-\vec{w}$. Posant $\omega=x_0-\vec{w}$, il vient
$f(\omega)=f(x_0)+\vec{f}(\overrightarrow{x_0\omega})=f(x_0)-\vec{f}(\vec{w})=f(x_0)-\vec{v}-\vec{w}=x_0-\vec{w}=\omega$.
Si x_1 est un autre point fixe de f, on a $\overrightarrow{\omega x_1}=\overrightarrow{f(\omega)f(x_1)}=\vec{f}(\overrightarrow{\omega x_1})$, donc $\|\overrightarrow{\omega x_1}\|=\lambda\|\overrightarrow{\omega x_1}\|$, d'où $x_1=\omega$. D'où la première assertion.
Comme $h(\omega,\frac{1}{\lambda})\circ f$ est un déplacement conservant ω, c'est une rotation de centre ω (éventuellement id), soit ρ, et le produit $h(\omega,\lambda)\circ\rho=f$ est bien commutatif. ■

3.4 Proposition: Une similitude indirecte est ou bien une réflexion, ou un retournement-glissement, ou encore le produit commutatif d'une réflexion par rapport à une droite Δ et d'une homothétie de rapport $\lambda\neq 1$ centrée sur Δ. Une similitude indirecte qui n'est pas une isométrie ($\lambda\neq1$) a un et un seul point fixe (le centre de l'homothétie).

Preuve: Si $\lambda=1$, cela résulte de VII.3.7. Sinon f a un seul point fixe ω par le même raisonnement que ci-dessus, et $h(\omega,\frac{1}{\lambda})\circ f$ est une isométrie indirecte conservant ω, donc, toujours par VII.3.7, de la forme σ_Δ, où Δ est une droite passant par ω. ■

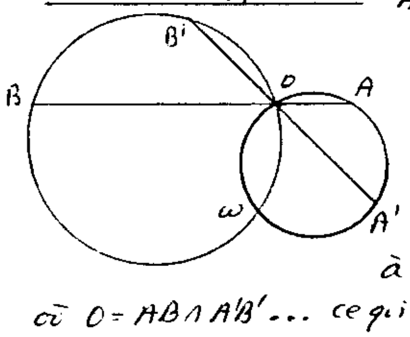
3.5 Cas de similitude (des triangles) On dit que deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables s'ils s'échangent par une similitude ("directement" ou "inversement" semblables, selon que cette similitude, qui est alors unique, est directe ou non).



Proposition: Pour cela, il suffit qu'ils aient
a) leurs trois côtés proportionnels
b) deux de leurs côtés proportionnels et l'angle au sommet égal
c) leurs angles égaux (deux suffisent par 1.11)

(Il s'agit d'angles géométriques, et les trois angles sont alors simultanément égaux ou opposés).
Preuve: En transformant l'un des deux par homothétie, on se ramène aux cas d'égalité du 1.17. ■

3.6 Proposition Étant donnés A, A', B, B' dans le plan ($A\neq A'$ et $B\neq B'$) il existe une et une seule similitude directe s telle que $s(A)=A'$ et $s(B)=B'$. Si ce n'est pas une translation, son rapport est $\frac{A'B'}{AB}$ et son angle $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'})$.



Preuve: Si s est de rapport λ et d'angle θ, on a nécessairement $\lambda=\frac{A'B'}{AB}$, $\theta=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'})$. Si $\lambda=1$ et $\theta=0$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$ et $s_0=t_{\overrightarrow{AA'}}$ est une solution. $t_{\overrightarrow{A'A}}\circ s$ est alors une isométrie directe conservant A et B, donc l'identité. Si $\lambda\neq1$ ou $\theta\neq0$, nécessairement $s=h(\omega,\lambda)\circ\rho(\omega,\theta)$ pour un certain point ω. Dans ce cas $(\overrightarrow{\omega A},\overrightarrow{\omega A'})=\theta=(\overrightarrow{\omega B},\overrightarrow{\omega B'})$ et ω est d'après 2.6 à l'intersection des deux cercles circonscrits à OAA' et OBB', où $O=AB\cap A'B'$... ce qui donne d'ailleurs une construction du centre à la règle et au compas. ■

(§4) MESURE DES ANGLES

4.1 La série entière $\sum_0^\infty \frac{z^n}{n!} = e^z$ est uniformément absolument convergente sur tout compact de $\mathbb{C}$, donc resommable et dérivable terme à terme, d'où :

$(e^z)' = e^z$, $e^0 = 1$, $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$, d'où $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$ et $e^z \neq 0$.

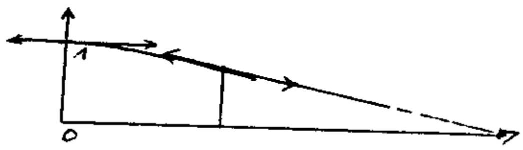
Donc $z \mapsto e^z$ est un morphisme de $(\mathbb{C},+)$ dans $(\mathbb{C}^*,\times)$ et en particulier pour $a,b \in \mathbb{R}$, $e^{a+ib} = e^a e^{ib}$. Si $a>0$, $e^a = \sum \frac{a^n}{n!} > 0$, donc aussi $e^{-a} = \frac{1}{e^a} > 0$. De plus $a>0 \Rightarrow$ $e^a > \sum_{n=0}^N \frac{a^n}{n!} \xrightarrow[a\to+\infty]{} +\infty$. Donc $a \mapsto e^a$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^+$.

Comme $\overline{e^{it}} = e^{-it} = (e^{it})^{-1}$, il vient $|e^{it}| = 1$ pour $t \in \mathbb{R}$, et $\begin{matrix} t \mapsto e^{it} \\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}^* \end{matrix}$ est en fait un morphisme $(\mathbb{R},+) \to (\mathbb{U},\times)$

Posant $\underline{\mathrm{Cos}\,t = \mathrm{Re}(e^{it})}$ et $\underline{\mathrm{Sin}\,t = \mathrm{Im}(e^{it})}$, on définit donc deux fonctions C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et les relations précédentes impliquent que Cos est paire, Sin impaire, $\mathrm{Sin}\,0 = 0$, $\mathrm{Cos}\,0 = 1$, $\mathrm{Cos}^2 t + \mathrm{Sin}^2 t = 1$ $(\forall t)$, $(\mathrm{Cos}\,t)' = -\mathrm{Sin}\,t$ et $(\mathrm{Sin}\,t)' = \mathrm{Cos}\,t$.

t	0	$+$	α
$\mathrm{Sin}\,t$	0	$\nearrow +$	
$\mathrm{Cos}\,t$	1	$\searrow +$	

Sur tout intervalle $[0,\alpha]$ où le Cos reste >0, c'est donc une fonction strictement décroissante et concave. Par suite son graphe reste au dessous de ses tangentes, qui coupent l'axe.



Autrement dit, la fonction Cos s'annule sur $\mathbb{R}^+$.

t	0		$\frac{\pi}{2}$
$\mathrm{Cos}\,t$	1	$\searrow$	0
$\mathrm{Sin}\,t$	0	$\nearrow$	1

Soit $\alpha_0 = \{\inf t>0 \mid \mathrm{Cos}\,t = 0\}$. On a $\alpha_0 > 0$ puisque $\mathrm{Cos}\,0 = 1$. Posons $\pi = 2\alpha_0$. On a sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ le tableau de variations ci-contre. De $\mathrm{Cos}^2 + \mathrm{Sin}^2 = 1$, on déduit $\mathrm{Sin}\,\frac{\pi}{2} = 1$, puisque $\mathrm{Cos}\,\frac{\pi}{2} = 0$.
D'où $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, et $e^{i(\frac{\pi}{2}+t)} = i e^{it}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$
D'où encore $e^{i\pi} = -1$, puis $e^{3i\frac{\pi}{2}} = -i$, $e^{2i\pi} = 1$, $e^{i(t+2\pi)} = e^{it}$.

La fonction e^{it} est donc périodique de période 2π, et les variations de Cos et Sin sont sur $[0,2\pi]$ les suivantes (qui montrent que 2π est la plus petite période

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\mathrm{Cos}\,t$	1	$\searrow +$	0	$\searrow -$	-1	$\nearrow -$	0	$\nearrow +$	1
$\mathrm{Sin}\,t$	0	$\nearrow +$	1	$\searrow +$	0	$\searrow -$	-1	$\nearrow -$	0

4.2 En particulier on a la suite exacte $\{0\} \longrightarrow 2\pi\mathbb{Z} \xhookrightarrow{i} \mathbb{R} \xrightarrow{e^{i\cdot}} \mathbb{U} \to \{1\}$
et l'isomorphisme $\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}} \underset{\arg}{\overset{e^{i\cdot}}{\rightleftarrows}} \mathbb{U}$

Nous avons vu (cf. 1.8) que $\mathcal{A} \simeq SO(\vec{P})$ est isomorphe à $SO(2)$ par le choix d'une base orthonormée, ou mieux d'une <u>orientation</u> de P, et en 1.2 que $SO(2)$ et isomorphe à $\mathbb{U}$ (par φ^{-1}). En composant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \simeq SO(\vec{P}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[rrr, bend right, "\mu"'] & SO(2) \arrow[r, "\varphi^{-1}", "\sim"'] & \mathbb{U} \arrow[r, "\arg"] & \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}} \end{tikzcd}$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \longmapsto a+ib$$

on obtient un isomorphisme de groupes μ de $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$, appelé mesure des angles (Si l'on change d'orientation, la mesure des angles change de signe, d'après 1.8).

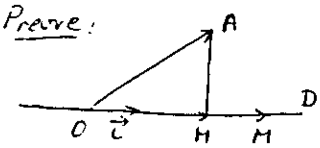
4.3 La mesure d'un angle (de demi-droites, de vecteurs ...) est donc un nombre réel modulo 2π, qui n'est autre que l'argument du nombre complexe qui lui correspond (par φ^{-1}). La mesure d'un angle géométrique sera donc un nombre réel modulo 2π et modulo le signe, ou plutôt le représentant $\mu(\alpha)$ de celle-ci dans l'intervalle $[0,\pi]$ ("angle saillant"). Un tel angle α est dit aigu si $\mu(\alpha) < \frac{\pi}{2}$, obtus si $\mu(\alpha) > \frac{\pi}{2}$ (et droit si $\mu(\alpha) = \frac{\pi}{2}$!)

4.4 Dans la pratique, on utilise bien d'autres notions d'angles, orientés ou non, qui nécessitent chacune une définition précise :
- l'angle de deux hyperplans (en dimension n) Π_1 et Π_2 sera sans doute
$$\frac{1}{2}\left(\sigma_{\Pi_2}\circ\sigma_{\Pi_1}\Big|_{(\Pi_1\cap\Pi_2)^\perp}\right)$$
- en dimension 3 l'angle d'une droite D et d'un plan P sera l'angle (D,D') où D' est la projection orthogonale de D sur P.
- toujours en dimension 3, on parle de "la rotation d'axe Δ et d'angle α", où $\alpha\in\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$, mais il faut noter que ceci n'a de sens que si on a choisi une orientation du plan $\vec{\Delta}^\perp$, ce qu'on fait d'habitude en orientant d'une part l'espace entier, d'autre part Δ.
- l'angle de deux cercles (plus généralement de deux courbes régulières) en un point commun sera l'angle de leurs tangentes en ce point.
- etc...

§5 PRODUITS SCALAIRE, VECTORIEL, MIXTE

5.1 Proposition. Soit D une droite du plan, $O\in D$, A un autre point et H sa projection orthogonale sur D. On a $\boxed{OH = OA\ \mathrm{Cos}\,\alpha}$ où α est l'angle $\widehat{AOH}$

Preuve :



Si $A\notin O+\vec{D}^\perp$, $H\neq O$ et α est bien défini (sinon on a $0=0$). Posons $\vec{\imath} = \frac{\overrightarrow{OH}}{\|\overrightarrow{OH}\|}$ et $\|OA\| = r$. Dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ les coordonnées de A sont $(r\,\mathrm{Cos}\,\alpha, r\,\mathrm{Sin}\,\alpha)$ et celles de H sont $(r\,\mathrm{Cos}\,\alpha, 0)$. ∎

5.2 Corollaire $\forall\, \vec{u},\vec{v}\in\vec{P}$ $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\ \mathrm{Cos}\,\alpha}$, où $\alpha = (\vec{u},\vec{v})$

Preuve. C'est clair si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. Sinon, soit $O\in P$, $A = O+\vec{v}$, $M = O+\vec{u}$, H la projection orthogonale de A sur $\langle OM\rangle$. On a
$\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{HA} = \pm\|\overrightarrow{OM}\|\|\overrightarrow{OH}\|$ suivant que l'angle α est aigu ou obtus, c'est-à-dire suivant le signe de $\mathrm{Cos}\,\alpha$. On conclut par 5.1. ∎

5.3 On va consacrer la fin de ce paragraphe à deux notions d'usage courant de la géométrie d'un espace affine euclidien E de dimension 3, orienté par le choix d'une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\vec{E}$: celles de produit vectoriel de deux vecteurs, et de produit mixte de trois vecteurs (de $\vec{E}$). On n'en parle ici que parce qu'elles sont rarement enseignées, dans l'enseignement secondaire parce que jugées trop délicates, et dans les universités parce que jugées trop élémentaires !

5.4 On appelle <u>produit mixte</u> de trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de $\vec{E}$, et on note $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ leur déterminant dans la base $\mathcal{B}$. Naturellement il ne dépend que de l'<u>orientation</u> de $\vec{E}$, c'est-à-dire de la classe de $\mathcal{B}$ modulo $SO(\vec{E})$, et un changement d'orientation le change de signe.
$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une forme trilinéaire alternée non nulle de $\vec{E}\times\vec{E}\times\vec{E}$ dans $\mathbb{R}$, la seule qui vaut 1 sur $\mathcal{B}$.

5.5 Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz (ou par 5.2), étant donnés deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ de $\vec{E}$ on a

$$\vec{u}^2 . \vec{v}^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2 \begin{cases} > 0 & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont libres} \\ = 0 & \text{s'ils sont liés} \end{cases}$$

On appelle <u>produit vectoriel</u> de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et l'on note $\vec{u}\wedge\vec{v}$
- le vecteur nul si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
- s'ils sont libres, le seul vecteur de $\vec{E}$ <u>orthogonal</u> à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et tel que

$$\boxed{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}\wedge\vec{v}) = \vec{u}^2 . \vec{v}^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2}$$

Dans le second cas en effet, si $\vec{w}$ est un vecteur non nul de la droite $<\vec{u}, \vec{v}>^\perp$, $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est une base, donc $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \lambda \neq 0$, et nécessairement

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \frac{1}{\lambda}\left(\vec{u}^2 . \vec{v}^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2\right).\vec{w}$$

5.6 Dès que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont indépendants, $\vec{u}\wedge\vec{v} \neq \vec{0}$ et $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}\wedge\vec{v}\}$ est une base <u>directe</u>, puisque $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}\wedge\vec{v}) > 0$. Réciproquement, si $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ est une base orthonormée directe, on a d'après la définition 5.5 :

$$\boxed{\vec{i}\wedge\vec{j} = \vec{k} \ , \ \vec{j}\wedge\vec{k} = \vec{i} \ , \ \vec{k}\wedge\vec{i} = \vec{j}}$$

Comme le produit mixte est trilinéaire et alterné, on vérifie aisément que $\vec{v}\wedge\vec{u} = -\vec{u}\wedge\vec{v}$ et $(\lambda\vec{u})\wedge\vec{v} = \vec{u}\wedge(\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u}\wedge\vec{v})$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, puis que $(\vec{u}_1+\vec{u}_2)\wedge\vec{v} = \vec{u}_1\wedge\vec{v} + \vec{u}_2\wedge\vec{v}$ lorsque $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}\}$ est une permutation de $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.
En décomposant $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, on obtient alors que <u>le produit vectoriel est une application bilinéaire alternée de $\vec{E}\times\vec{E}$ dans $\vec{E}$</u>.

5.7 <u>Proposition</u> $\boxed{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \operatorname{Sin}\alpha}$, où α est l'angle géométrique $(\vec{u}, \vec{v})$

<u>Preuve</u> : C'est clair si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont liés ($\operatorname{Sin}\alpha = 0$ et $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0}$). Sinon ils engendrent un plan $\vec{P}$ dans lequel $\vec{v}$ se décompose en $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$, avec $\vec{v}_1$ colinéaire et $\vec{v}_2$ orthogonal à $\vec{u}$, $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$. On a $\|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}\| \operatorname{Cos}\alpha$ par 5.1 et $\|\vec{v}\|^2 = \|\vec{v}_1\|^2 + \|\vec{v}_2\|^2$, d'où $\|\vec{v}_2\| = \|\vec{v}\| \operatorname{Sin}\alpha$. Si l'on pose $\vec{u}' = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$, $\vec{v}' = \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|}$, $\{\vec{u}', \vec{v}'\}$ est une base orthonormée de $\vec{P}$, et par 5.6 : $1 = \|\vec{u}'\wedge\vec{v}'\| = \left\| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \wedge \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} \right\|$, d'où

$$\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \operatorname{Sin}\alpha = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}_2\| = \|\vec{u}\wedge\vec{v}_2\| = \|\vec{u}\wedge\vec{v}_1 + \vec{u}\wedge\vec{v}_2\| = \|\vec{u}\wedge\vec{v}\|. \ \blacksquare$$

<u>5.8</u> <u>Théorème</u>. $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \vec{E}$ $\boxed{(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})}$

<u>Preuve</u>. Les trois termes sont des formes trilinéaires, et il suffit de vérifier qu'elles coïncident sur les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ d'une base orthonormée directe : cela résulte alors de 5.6. ■

<u>5.9 Corollaire</u> : <u>Si $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ est une base orthonormée directe, dans laquelle $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées (x,y,z) et (x',y',z'), celles de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sont les "mineurs" $(yz'-zy', zx'-xz', xy'-yx')$.</u>

<u>Preuve</u> : Il suffit dans 5.8 de remplacer $\vec{w}$ par $\vec{i}, \vec{j}$, ou $\vec{k}$, et de développer le déterminant par rapport à la troisième colonne. ■

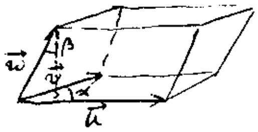
<u>5.10</u> "<u>Formule du double produit vectoriel</u>" : $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \vec{E}$

$$\boxed{\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}}$$

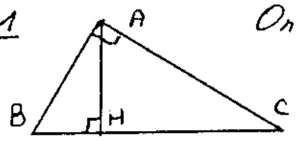
<u>Preuve</u> : Utilisant la trilinéarité de chaque terme, on peut se borner à vérifier la formule sur les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ d'une base orthonormée directe, en utilisant encore 5.6. ■

<u>5.11</u> La formule 5.7 montre que <u>$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ est l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$</u>. La formule 5.2 et le théorème 5.8 permettent alors de conclure que <u>$|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$ est le volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$, et $\vec{w}$</u> :

$$|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Cos} \beta .$$



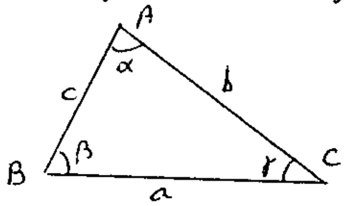
(§6) <u>RELATIONS DANS LE TRIANGLE</u>



<u>6.1</u> On dit que le triangle ABC est <u>rectangle</u> en A si $\widehat{BAC}$ est droit. Soit H la <u>projection</u> orthogonale de A sur "<u>l'hypoténuse</u>" BC. On a $\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2}$ (Pythagore : VII.1.2) et

$\boxed{\frac{HB}{HA} = \frac{HA}{HC} = \frac{AB}{AC}}$ les trois triangles ABC, HBA et HAC étant semblables entre eux (le premier inversement aux deux autres) d'après 3.5.c), puisque leurs angles sont égaux (utilisant 1.11).

<u>6.2</u> Dans toute la suite de ce paragraphe, ABC est un triangle quelconque (trois points non alignés) et l'on note $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$,
$\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{CBA}$, $\gamma = \widehat{ACB}$

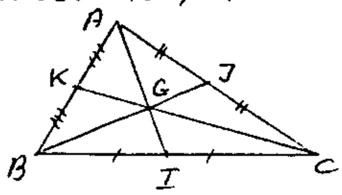


On a en <u>particulier</u>

$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \operatorname{Cos} \alpha}$ par 5.2, puisque

$$\vec{BC}^2 = \vec{BA}^2 + \vec{AC}^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} .$$

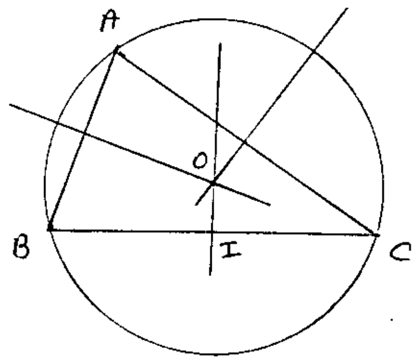
6.3 On rappelle (cf. IV.2-7) que les trois médianes d'un triangle sont concourantes, en son centre de gravité $G = \frac{A+B+C}{3}$, et si $I = \frac{A+B}{2}$,



$J = \frac{C+A}{2}$, $K = \frac{A+B}{2}$, on a

$$G = \frac{A+2I}{3} = \frac{B+2J}{3} = \frac{C+2K}{3}.$$

6.4 De même les trois médiatrices (des cotés) d'un triangle sont concourantes au point O qui est le centre du cercle circonscrit au triangle (seul cercle passant par A, B, C) : en effet comme $\langle AB \rangle \not\parallel \langle BC \rangle$ par exemple, les médiatrices de AB et BC se coupent en un seul point O, et $OA = OB = OC$, donc O est sur la médiatrice de CA. Réciproquement si un cercle passe par A, B, C, son centre O vérifie $OA = OB = OC$...



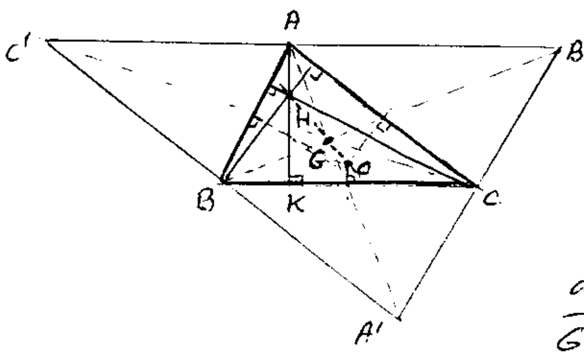
On note R le rayon du cercle circonscrit. On a :

$$\boxed{2R = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}}$$

puisque $\alpha = \widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = \widehat{BOI}$ (par 2.6.c et 1.13.b)

d'où $\frac{a}{2} = BI = \sqrt{OB^2 - OI^2} = \sqrt{R^2 - R^2\cos^2\alpha} = R\sin\alpha$ (par 5.1). ■

6.5 De même les trois hauteurs d'un triangle (c'est-à-dire les perpendiculaires par un sommet au coté opposé) sont concourantes en un point H, appelé orthocentre du triangle : en effet, ce sont les médiatrices du triangle $A'B'C'$, où A', B', C' sont les intersections des parallèles menées de chaque sommet au coté opposé. De plus si G' est le centre de gravité de $A'B'C'$, on a par 6.3



$\overrightarrow{G'A'} = -2\overrightarrow{G'A}$, $\overrightarrow{G'B'} = -2\overrightarrow{G'B}$, $\overrightarrow{G'C'} = -2\overrightarrow{G'C}$

d'où $G' = \frac{A'+B'+C'}{3} = \frac{A+B+C}{3} = G$

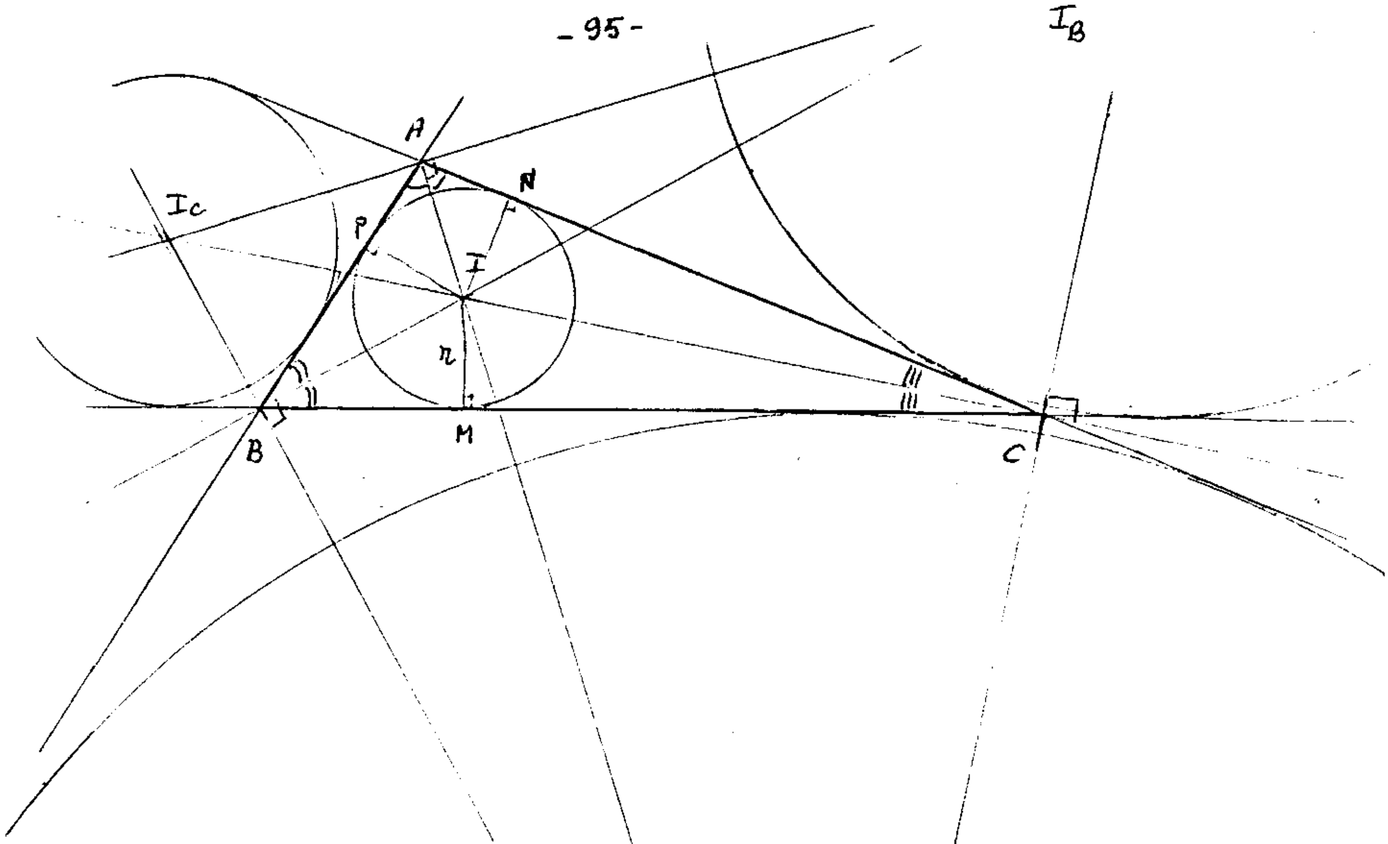
et l'homothétie de centre G et de rapport -2 envoie A, B, C sur A', B', C', donc O sur H ; d'où $\boxed{\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}}$

De plus $(HB', HA) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HB'}, \overrightarrow{HC'}) = (A'B', A'C')$ (par 2.6.c)

$= (AB, AC) = \alpha$ (une homothétie conserve les angles par II.2.7)

d'où $AH = HB' \cdot \cos\alpha = 2R\cos\alpha = \boxed{a\cot\alpha = AH}$ par 6.4.

tandis que $\boxed{h_a = AK = c\sin\beta = b\sin\gamma}$ où K est le "pied" de la hauteur, d'après 5.1.



<u>6.6</u> De même les trois <u>bissectrices</u> d'un triangle (c'est-à-dire des angles $(\vec{AB},\vec{AC})$, $(\vec{BC},\vec{BA})$, et $(\vec{CA},\vec{CB})$) sont concourantes en un point I qui est le centre du <u>cercle inscrit</u> au triangle (seul cercle tangent aux trois segments [AB], [BC], [AC]): en effet l'intersection de deux des bissectrices ("intérieures") est équidistante des trois cotés par 3.10 ; et plus généralement, les bissectrices des couples de droites (AB, AC), (BC, BA), (CA, CB) sont six droites trois à trois concourantes en I et les trois autres centres I_A, I_B, I_c des <u>cercles exinscrits</u> au triangle (cercles tangents aux trois cotés).

Si M est la projection de I sur BC, il existe $\lambda \in]0,1[$ tel que $BM = \lambda a$ et $MC = (1-\lambda)a$. D'où $r = \lambda a \, Tg\frac{\beta}{2} = (1-\lambda) a \, Tg\frac{\gamma}{2}$, $\lambda = \dfrac{Tg\frac{\gamma}{2}}{Tg\frac{\beta}{2} + Tg\frac{\gamma}{2}}$,

et $\boxed{\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{a}\left(Cotg\frac{\beta}{2} + Cotg\frac{\gamma}{2}\right)}$ (et les relations symétriques)

Si de même N et P sont les projections de I sur CA et AB, il vient:
$CN = \mu b$; $AN = (1-\mu) b$, $AP = \nu c$, $PB = (1-\nu) c$, pour certains $\mu, \nu \in]0,1[$,
et $\left.\begin{array}{l}(1-\lambda)\, a = \mu b \\ (1-\mu) b = \nu c \\ (1-\nu)\, c = \lambda a\end{array}\right\} \Rightarrow a-b+c = 2\lambda a$

D'où $\boxed{r = \dfrac{a-b+c}{2}\, Tg\, \dfrac{\beta}{2} = \dfrac{b-c+a}{2}\, Tg\, \dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{c-a+b}{2}\, Tg\, \dfrac{\alpha}{2}}$

Naturellement les cercles exinscrits donnent lieu à des calculs analogues.

6.7 Soit S l'aire du triangle, et $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ son "demi-périmètre".

De $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ (6.2), on tire $\sin\alpha = \sqrt{1 - \dfrac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}}$

$$= \frac{1}{2bc}\sqrt{4b^2c^2 - b^4 - c^4 - a^4 - 2b^2c^2 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2} = \frac{2}{bc}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

soit: $\boxed{\sin\alpha = \dfrac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$

Or $S = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} bc \sin\alpha$. D'où $\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$

et $\boxed{h_a = \dfrac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$

Mais S est aussi la somme des aires des triangles BIC, CIA, et AIB:

$S = \frac{1}{2} ar + \frac{1}{2} br + \frac{1}{2} cr = pr$ $\quad \boxed{S = pr}$

d'où: $\boxed{r = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}}$

On aurait de même, si r_a est le rayon du cercle exinscrit de centre I_A:

$r_a = \dfrac{S}{p-a} = \sqrt{\dfrac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}$, etc.

Du calcul de $\sin\alpha$ ci-dessus, comparé à 6.4, on tire aussi:

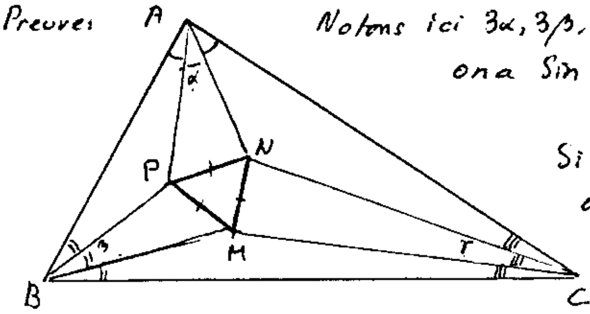
$$\boxed{R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}}$$

et caetera, ad libitum ...

6.8 La "géométrie du triangle" est une source inépuisable d'énoncés et de formules. Citons ici, à titre d'exemple, le peu connu

Théorème de Morley. Les points d'intersection (bien choisis - voir la figure) des "trissectrices" d'un triangle forment un triangle équilatéral.

Preuve:



Notons ici $3\alpha, 3\beta, 3\gamma$ les angles aux sommets. Comme $3\alpha+3\beta+3\gamma=\pi$ on a $\sin 3\gamma = -\sin(3\alpha+3\beta)$, d'où $c = 2R|\sin 3\gamma|$
$= 2R|\sin 3(\alpha+\beta)|$

Si R' est le rayon du cercle circonscrit à ABP, on a de même $2R' = \dfrac{c}{|\sin(\alpha+\beta)|} = \dfrac{AP}{|\sin\beta|}$,

d'où $AP = 2R'|\sin\beta| = 2R\left|\sin\beta \cdot \dfrac{\sin 3(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\right|$

Comme $\dfrac{\sin 3(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = 3 - 4\sin^2(\alpha+\beta) = 3 - 4\sin^2(\frac{\pi}{3}-\gamma) = 4\sin\gamma \sin(\frac{\pi}{3}+\gamma)$,

il vient $AP = 8R\,|\sin\beta \sin\gamma \sin(\frac{\pi}{3}+\gamma)|$,

et on aurait de même $AN = 8R\,|\sin\beta \sin\gamma \sin(\frac{\pi}{3}+\beta)|$,

d'où $\dfrac{AP}{|\sin(\frac{\pi}{3}+\gamma)|} = \dfrac{AN}{|\sin(\frac{\pi}{3}+\beta)|} = \dfrac{PN}{|\sin\alpha|}$ (puisque $\alpha+\frac{\pi}{3}+\gamma+\frac{\pi}{3}+\beta=\pi$!)

On en déduit $PN = 8R\,|\sin\alpha . \sin\beta . \sin\gamma|$, et la symétrie de cette formule implique $PN = NM = MP$. ■

(97) EXERCICES

7.1 A, B, C non alignés, $\alpha = (\vec{AB}, \vec{AC})$, $\beta = (\vec{BC}, \vec{BA})$, $\gamma = (\vec{CA}, \vec{CB})$
On note $\rho(M, \theta)$ la rotation de centre M et d'angle θ

a) Montrer que $\rho(A, 2\alpha) \circ \rho(B, 2\beta) \circ \rho(C, 2\gamma) = id$

b) Montrer que $\rho(A, \alpha) \circ \rho(B, \beta) \circ \rho(C, \gamma) = \sigma_M$, où M est la projection orthogonale sur $\langle AC \rangle$ du centre I du cercle inscrit au triangle ABC.

c) Soit D un autre point du plan. Montrer que
$\rho(D, (\vec{DC}, \vec{DA})) \circ \rho(C, (\vec{CB}, \vec{CD})) \circ \rho(B, (\vec{BA}, \vec{BC})) \circ \rho(A, (\vec{AD}, \vec{AB}))$
est une translation de vecteur parallèle à $\langle AD \rangle$. A quelle condition est-ce l'identité ? (On commencera par remarquer que la somme des angles aux sommets d'un polygone à n cotés vaut $n\pi$).

7.2 Soit H l'orthocentre et O le centre du cercle circonscrit à un triangle ABC. Démontrer (sans calcul) que la distance de H à chaque sommet est le double de celle de O au coté opposé. Démontrer la relation de Sylvester :
$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OH}.$$

7.3 A, B, C non alignés dans le plan orienté, et I, J, K les centres des rotations d'angle $\frac{2\pi}{3}$ transformant respectivement C en B, B en A, A en C. Montrer que IJK est équilatéral.

7.4 I, J, K milieux des cotés BC, CA, AB d'un triangle et M (resp. N) le point de la médiatrice de AB (resp. AC) tel que $KM = KA$ (resp. $JN = JA$) et $\vec{KM} \cdot \vec{KI} < 0$ (resp. $\vec{JN} \cdot \vec{JI} < 0$). Montrer que IM et IN sont égaux et perpendiculaires.

7.5 A, B, P alignés, P entre A et B, (C) le cercle de diamètre AB, (D) la tangente à (C) en B. Une droite Δ issue de P coupe (C) en M et N ; $\langle AM \rangle \cap (D) = M'$, $\langle AN \rangle \cap (D) = N'$.
Montrer que le produit des longueurs $BM' \cdot BN'$ est indépendant de Δ.

7.6 Lieu des milieux des cordes d'un cercle passant par un point fixe.

7.7 Traiter par le calcul certains de ces exercices
(En particulier 7.4 se traite bien dans un repère d'origine I, orthonormé, et dont l'un des axes est $\langle BC \rangle$).

7.8 Les symétriques de l'orthocentre d'un triangle par rapport à ses cotés sont sur le cercle circonscrit

7.9 Les cercles circonscrits aux quatre triangles découpés par quatre droites sont concourants

7.10 On se donne quatre droites D_1, D_2, D'_1, D'_2 du plan, et $A = D_1 \cap D'_1$, $B = D_1 \cap D'_2$, $C = D_2 \cap D'_1$, $D = D_2 \cap D'_2$. Montrer l'équivalence de

(i) les bissectrices de (D_1, D_2) sont parallèles à celles de (D'_1, D'_2)

(ii) A, B, C, D sont cocycliques

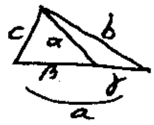
7.11 Construire un triangle inscrit à un autre de périmètre minimal ("Problème de Fagnano")

7.12 Soient H, K, L les pieds des hauteurs d'un triangle ABC. Montrer que les hauteurs sont les bissectrices de HKL. En déduire qu'un triangle qui a deux hauteurs égales est isocèle.

7.13 Le symétrique du centre du cercle circonscrit à un triangle par rapport à une bissectrice intérieure est sur la hauteur de même sommet

7.14 (Relation de Stewart) :

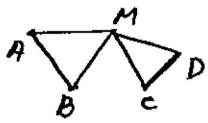
$$a(\alpha^2+\beta\gamma) = b^2\beta + c^2\gamma$$



7.15 Les diagonales d'un quadrilatère inscrit se coupant à angle droit en P, la perpendiculaire par P à un coté coupe le coté opposé en son milieu

7.16 Deux cercles sécants en A et B ; une droite issue de A (resp. B) les recoupe en M et M' (resp. N et N'). Montrer que MN et M'N' sont parallèles.

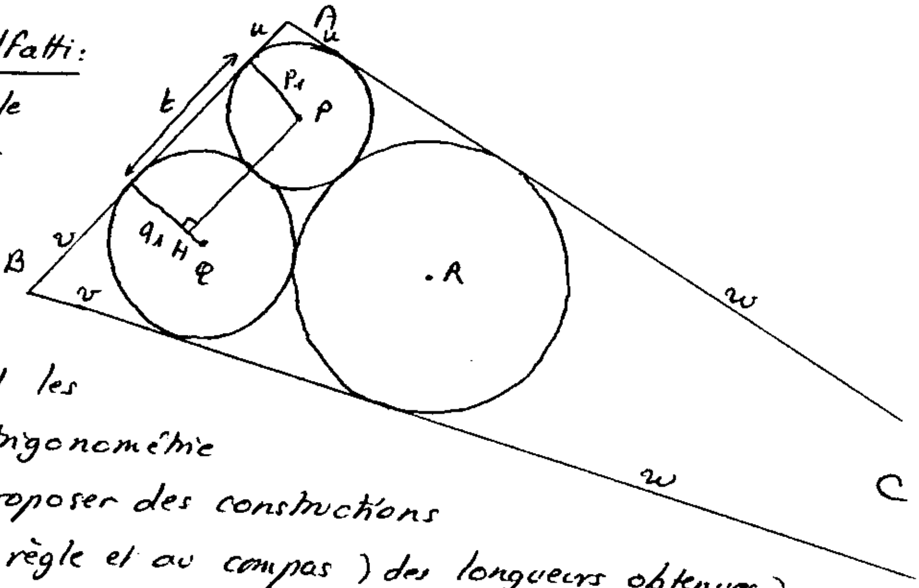
7.17 a)



Le lieu de M tel que la somme des aires de MAB et MCD soit constante est fait de morceaux de droites

b) Un quadrilatère ABCD est circonscrit à un cercle de centre O. Soient M et N les milieux des diagonales AC et BD. Montrer que O est aligné avec M et N.

7.18 Le problème de Malfatti :
Inscrire à un triangle trois cercles tangents entre eux et aux cotés.



(En calculer d'abord les éléments par la trigonométrie du triangle, puis proposer des constructions géométriques (à la règle et au compas) des longueurs obtenues)

Indications pour les exercices

7.1 a) L'angle du composé est nul, et C est fixe.
b) Décomposer les rotations en produits de réflexions en utilisant les bissectrices
c) Calculer l'angle et suivre l'image de D.

7.2 Utiliser l'idée du 6.5

7.3 $\rho(K, \frac{2\pi}{3}) \circ \rho(J, \frac{2\pi}{3}) \circ \rho(I, \frac{2\pi}{3})$ est une translation conservant C.
Donc l'une est l'inverse du produit des autres. Utiliser alors III.4.1

7.4 $\rho(N, \frac{\pi}{2}) \circ \rho(M, \frac{\pi}{2}) = \sigma_I$, puis (par III.4.1), MNI "rectangle isocèle".

7.5 Joindre B à M et N fait apparaître quatre paire de triangles semblables, d'où l'on tire $BM' . BN' = \frac{PB}{PA} \cdot AB^2$.

7.6 Un arc de cercle passant par le centre ...

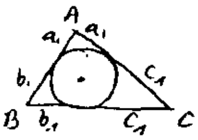
7.8 Angles inscrits

7.9 et 7.10 de même

7.11 : La solution est le triangle HKL de 7.12

7.15 et 7.16 encore des angles inscrits !

7.17 a) utiliser les équations des droites AB et CD pour évaluer les aires
b) Exprimer de plusieurs façons l'aire du quadrilatère en le décomposant en triangles en faisant intervenir les points de contact P, Q, R, S des cotés.
Utiliser le (a).

7.18 

D'abord $a_1 = p-a$, $b_1 = p-b$, $c_1 = p-c$
puis par Thalès (cf. figure, $I = AP \cap BQ \cap CR$)
$$\frac{\rho_1}{r} = \frac{u}{a_1}, \quad \frac{q_1}{r} = \frac{v}{b_1}, \quad \frac{r_1}{r} = \frac{w}{c_1}$$
puis $t = 2\sqrt{\rho_1 q_1}$ (Pythagore dans PQH), d'où $t = 2r\sqrt{\frac{uv}{a_1 b_1}} = 2\sqrt{uv}\sqrt{\frac{p-c}{p}}$
d'où $c = u+v+t = u+v+2\sqrt{uv}\sqrt{\frac{p-c}{p}}$ et les relations semblables.
On en déduit l'existence de $\lambda, \mu, \nu, \varphi, \chi, \psi$ tels que
$$\begin{cases} a = p\sin^2\lambda & b = p\sin^2\mu \quad c = p\sin^2\nu \\ u = p\sin^2\varphi & v = p\sin^2\chi \quad w = p\sin\psi \end{cases}, \quad p-a = p\cos^2\lambda,\ p-b = p\cos^2\mu,\ p-c = p\cos^2\nu$$
et
$$\begin{cases} \sin^2\varphi + \sin^2\chi + 2\sin\varphi\sin\chi\cos\nu = \sin^2\nu & (1) \\ \sin^2\chi + \sin^2\psi + 2\sin\chi\sin\psi\cos\lambda = \sin^2\lambda & (2) \\ \sin^2\psi + \sin^2\varphi + 2\sin\psi\sin\varphi\cos\mu = \sin^2\mu & (3) \end{cases}$$
or (1) $\Rightarrow$ 

etc..

d'où $\varphi+\chi = \nu$, $\chi+\psi = \lambda$, $\psi+\varphi = \mu$, soit $\varphi = \sigma-\lambda$, $\chi = \sigma-\mu$, $\psi = \sigma-\nu$ avec $\sigma = \frac{\lambda+\mu+\nu}{2}$
Construction géométrique: on construit les angles λ, μ, ν, puis $\sigma = \frac{\lambda+\mu+\nu}{2}$ (on a a, b, c, p) on a donc φ, χ, ψ. On peut alors construire u, v, w ...

(Solution proposée par Schellbach à un problème posé par Malfatti en 1803, et dont la première solution "géométrique" fut donnée par Steiner en 1826 !)