CHAPITRE VII - STRUCTURE EUCLIDIENNE

$(k = \mathbb{R})$

§1 ESPACE AFFINE EUCLIDIEN

1.1 Définitions : Un produit scalaire euclidien sur un espace vectoriel V de dimension n sur $\mathbb{R}$ est la donnée d'une forme bilinéaire symétrique $f : V \times V \to \mathbb{R}$ définie positive ; soit $q : V \to \mathbb{R}$ la forme quadratique associée (restriction de f à la diagonale). La donnée de q équivaut à celle de f, puisque f est la "polarisée" de q :

$$\forall v, w \in V \qquad f(v,w) = \tfrac{1}{2}\{ q(v+w) - q(v) - q(w) \}$$

Comme $f \gg 0$, l'application $v \longmapsto \sqrt{q(v)}$ est une norme sur V, appelée norme euclidienne (ou norme dérivant d'un produit scalaire).

Muni de f (ou de q, ou de $\sqrt{q}$), V est un espace vectoriel euclidien.

On note $v.w = f(v,w)$ et on l'appelle le produit scalaire de deux vecteurs, et $\|v\| = \sqrt{q(v)} = \sqrt{v.v}$ est la norme d'un vecteur. On dit que deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul (on note $v \perp w \Leftrightarrow v.w = 0$)

On dit qu'une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de V est orthonormée si

$$\forall i,j = 1, \dots, n \qquad e_i . e_j = \delta_{ij} \quad (1 \text{ si } i=j,\ 0 \text{ sinon})$$

Il en existe !

1.2 Remarque (Théorème de Pythagore)

$$\forall v, w \in V \qquad v.w = 0 \iff \|v\|^2 + \|w\|^2 = \|v+w\|^2 .$$

1.3 Proposition : Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base orthonormée de V, et $v = \sum_1^n v_i e_i$

$$\forall i \quad \boxed{v_i = v.e_i} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\|v\|^2 = \sum_i v_i^2}$$

Preuve : $v - \sum (v.e_i) e_i$ est orthogonal à $e_1, \dots, e_n$, donc à V, donc nul.

De plus $\|v\|^2 = (\sum v_i e_i)(\sum v_j e_j) = \sum_{i,j} v_i v_j \delta_{ij} = \sum_i v_i^2$ ∎

1.4 Proposition : a) Pour $u : V \to V$ application quelconque, sont équivalents :

1) u conserve le produit scalaire : $\forall v, w \in V \quad u(v).u(w) = v.w$.
2) u est linéaire, et conserve la norme : $\forall v \in V \quad \|u(v)\| = \|v\|$.
3) u est linéaire, et transforme une base orthonormée en base orthonormée.
4) u est linéaire, et transforme toute base orthonormée en base orthonormée.

b) On dit alors que u est orthogonale. L'ensemble des applications orthogonales de V dans V est un sous-groupe de $GL(V)$, noté $O(V)$, et appelé groupe orthogonal de l'espace euclidien V.

Preuve. a) 4) $\Rightarrow$ 3) trivialement; 3) $\Rightarrow$ 2) par 1.3 ; 2) $\Rightarrow$ 1) par polarisation.
1) $\Rightarrow$ 4) Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base orthonormée : $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$. On a $u(e_i) \cdot u(e_j) = \delta_{ij}$ et $\{u(e_1), \dots, u(e_n)\}$ est encore une base orthonormée (et par suite c'est une base!)
De plus, si $v = \sum v_i e_i$, on a $v_i = v \cdot e_i$ par 1.3, donc $v_i = u(v) \cdot u(e_i)$, et toujours par 1.3 $u(v) = \sum v_i u(e_i)$. Donc u est linéaire.
b) est clair au vu de a)4). ∎

1.5 Définitions Un *espace affine euclidien* est un espace affine X de dimension n sur $\mathbb{R}$, dont la direction $\vec{X}$ est munie d'un produit scalaire euclidien. $\vec{X}$ est donc un espace vectoriel normé, et par suite X est un espace métrique pour la "*distance euclidienne*"

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad (x, y) \longmapsto \|\overrightarrow{xy}\|$$

On appelle *isométrie* de X toute application $f : X \to X$ qui conserve la distance : $\forall x, y \in X \quad d(f(x), f(y)) = d(x, y)$.

1.6 Proposition: *Une isométrie f de X est une bijection affine de X telle que $\vec{f} \in O(\vec{X})$, et réciproquement. L'ensemble $Is(X)$ des isométries de X est un sous-groupe de $GA(X)$.*

Preuve: Soit $f : X \to X$ une isométrie, $x_0 \in X$ et $\tilde{f} : \vec{X} \longrightarrow \vec{X}$, $\vec{v} \longmapsto \overrightarrow{f(x_0) f(x_0 + \vec{v})}$

On a $\tilde{f}(\vec{0}) = \vec{0}$ et, $\forall \vec{v}, \vec{w} \in \vec{X}$, $\tilde{f}(\vec{v}) - \tilde{f}(\vec{w}) = \overrightarrow{f(x_0+\vec{w}) f(x_0+\vec{v})}$, d'où
$\|\tilde{f}(\vec{v}) - \tilde{f}(\vec{w})\| = d(f(x_0+\vec{w}), f(x_0+\vec{v})) = d(x_0+\vec{w}, x_0+\vec{v}) = \|\vec{v} - \vec{w}\|$,
puis $\|\tilde{f}(\vec{v})\| = \|\tilde{f}(\vec{v}) - \tilde{f}(\vec{0})\| = \|\vec{v} - \vec{0}\| = \|\vec{v}\|$
enfin $\|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v} - \vec{w}\|^2 = \|\tilde{f}(\vec{v}) - \tilde{f}(\vec{w})\|^2 = \|\tilde{f}(\vec{v})\|^2 + \|\tilde{f}(\vec{w})\|^2 - 2\tilde{f}(\vec{v}) \cdot \tilde{f}(\vec{w})$.

Par suite $\tilde{f}$ conserve le produit scalaire, et par 1.4, $\tilde{f} \in O(\vec{X})$. En particulier $\tilde{f}$ est linéaire, donc f est affine par II 2.3, et $\tilde{f} = \vec{f}$.
Si réciproquement f est affine et $\vec{f} \in O(\vec{X})$, on a
$\forall x, y \in X \quad d(f(x), f(y)) = \|\overrightarrow{f(x) f(y)}\| = \|\vec{f}(\overrightarrow{xy})\| = \|\overrightarrow{xy}\| = d(x, y)$, et $f \in Is(X)$.
$Is(X)$ est donc l'image réciproque du sous-groupe $O(\vec{X})$ de $GL(\vec{X})$ par le morphisme canonique $GA(X) \xrightarrow{\pi} GL(\vec{X})$, $f \longmapsto \vec{f}$. ∎

1.7 Si V est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$, rappelons que $GL(V)$ se scinde en deux composantes (connexes) $GL^{\pm}(V)$ définies par : $u \in GL^{\pm}(V) \iff \forall$ base $\mathcal{B}$ de V $\det_{\mathcal{B}}\{u(\mathcal{B})\} \in \pm\mathbb{R}^+$,
que $GL^+(V)$ est un sous-groupe distingué de $GL(V)$ d'indice deux,
et que d'ailleurs $GL(V) \simeq GL^+(V) \underset{\tau}{\times} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, où τ est obtenu comme en II.3.6 par une section $s : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to GL(V)$ (on prendra pour $s(\bar{1})$ par

exemple une symétrie par rapport à un hyperplan).

On note $SO(V) = O(V) \cap GL^+(V)$ (groupe "spécial orthogonal")

et de même $O(V) \simeq SO(V) \underset{\tau}{\times} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (on prend pour $\Delta(1)$ une symétrie orthogonale)

Si maintenant X est un espace affine euclidien, posons

$$Is^+(X) = \{ f \in Is(X) \mid \vec{f} \in SO(\vec{X}) \}$$

$Is^+(X)$ s'appelle le groupe des déplacements de X (isométries "conservant l'orientation" ou isométries "directes"), et c'est de même un sous-groupe distingué d'indice deux de $Is(X) \simeq Is^+(X) \underset{\tau}{\times} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

1.8 Rappelons la suite exacte (chap. II, §3)

$$\begin{array}{ccccccccc} (*) & \longrightarrow & \vec{X} & \xrightarrow{t} & GA(X) & \xrightarrow{\pi} & GL(\vec{X}) & \longrightarrow & (*) \\ & & \vec{v} & \longmapsto & t_{\vec{v}} & & & & \\ & & & & f & \longmapsto & \vec{f} & & \end{array}$$

Comme $id_{\vec{X}} \in SO(\vec{X}) \subset O(\vec{X})$, les translations de X sont des déplacements. D'où les suites exactes "partielles":

$$(*) \longrightarrow \vec{X} \xrightarrow{t} Is(X) \xrightarrow{\pi} O(\vec{X}) \longrightarrow (*)$$

$$(*) \longrightarrow \vec{X} \xrightarrow{t} Is^+(X) \xrightarrow{\pi} SO(\vec{X}) \longrightarrow (*)$$

De plus, la première étant scindée, les autres le sont de même:

$$Is(X) \simeq \vec{X} \underset{\tau}{\times} O(\vec{X}) \quad \text{et} \quad Is^+(X) \simeq \vec{X} \underset{\tau}{\times} SO(\vec{X})$$

où $\tau : O(\vec{X}) \longrightarrow Aut\vec{X}$ est l'injection canonique.

En particulier, si l'on choisit $x_0 \in X$, toute isométrie $f \in Is(X)$ se décompose de façon unique en $f = t \circ g$, où $g \in Is(X)_{x_0} \simeq O(\vec{X})$, et $t \in \mathcal{T}$. On a $t = t_{\overrightarrow{x_0 f(x_0)}}$ et g est un déplacement si f l'est.

§2 GÉNÉRATEURS DU GROUPE ORTHOGONAL

2.1 Lemme: Soit V un espace vectoriel euclidien, W un sous-espace, $u \in O(V)$. Alors $u(W) \subset W \iff u(W^\perp) \subset W^\perp$.
De plus dans ce cas $u|_W \in O(W)$ et $u|_{W^\perp} \in O(W^\perp)$.

Preuve: Si $v \in W$ et $w \in W^\perp$, il existe $v' \in W$ tel que $v = u(v')$. Donc $u(w) \cdot v = u(w) \cdot u(v') = w \cdot v' = 0$. Le reste se déduit de 1.4 et de $W^{\perp\perp} = W$. ■

2.2 Lemme: Soit V un espace vectoriel euclidien, et $u \in O(V)$. Il existe un sous-espace vectoriel W de V tel que $u(W) \subset W$, et $\dim W = 1$ ou 2.

Preuve: Si u a une valeur propre réelle λ, et $u(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$, on prend $W = \mathbb{R}\vec{v}$.
Sinon, soit $\lambda = \alpha + i\beta$ une valeur propre non réelle ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$). Il existe

alors deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $u(\vec{v}) = \alpha\vec{v} - \beta\vec{w}$ et $u(\vec{w}) = \beta\vec{v} + \alpha\vec{w}$, et on prend $W = \mathbb{R}\vec{v} \oplus \mathbb{R}\vec{w}$. ∎

2.3 Remarque: Les valeurs propres d'une application orthogonale sont des nombres complexes de module 1 (conservation de la norme). Donc avec les notations de 2.2:

- si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda = \pm 1$ et $u|_W = \pm id_W$
- si $\lambda = \alpha + i\beta$ $(\beta \neq 0)$ $u|_W$ a par matrice $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ dans la base $\{\vec{v}, \vec{w}\}$, et $\det u|_W = \alpha^2 + \beta^2 = 1 > 0$. En particulier, $u|_W \in SO(W)$ d'après 2.1.

2.4 Proposition: Soit V un espace vectoriel euclidien, et $u \in O(V)$. Il existe une décomposition de V en somme directe orthogonale $V = V_1 \overset{\perp}{\oplus} V_2 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} V_p$ telle que

- $\dim V_j = 1$ ou 2 $(1 \leq j \leq p)$ et $u(V_j) \subset V_j$
- si $\dim V_j = 1$, $u|_{V_j} = \pm id_{V_j}$
- si $\dim V_j = 2$, $u|_{V_j} \in SO(V_j) - \{id, -id\}$

Preuve: par récurrence sur $\dim V$, en utilisant 2.2, 2.1, et 2.3 ∎

2.5 Corollaire: Notons $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Avec les notations de 2.4, il existe une base orthonormée de X où la matrice de u s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & (0) & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & (0) & & & & & M_{\theta_1} & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & M_{\theta_k} \end{pmatrix}$$

, où $\theta_j \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$ $(j = 1, \ldots, k)$, les valeurs propres non réelles de u sont les $e^{\pm i\theta_j}$. De plus $u \in SO(V)$ si et seulement si le nombre de facteurs -1 dans cette décomposition est pair.

Preuve: C'est une redite de 2.4, avec en plus la remarque que $\det u = \pm 1$ suivant la parité du nombre de facteurs -1, puisque $\det M_\theta = 1$. ∎

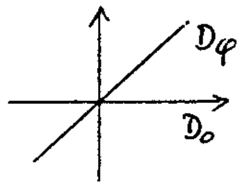
2.6 Corollaire: Si $u \in O(V)$ est involutive $(u^2 = id_V)$, il existe un et un seul sous-espace W de V tel que $u|_W = id_W$ et $u|_{W^\perp} = -id_{W^\perp}$. u est donc la symétrie orthogonale par rapport à W.

Preuve: Cela résulte de 2.5. Comme $M_\theta^2 = I \Rightarrow \theta \in \pi\mathbb{Z}$, il n'y a pas de facteurs M_θ dans la décomposition de u. Mais il est intéressant d'en rappeler la démonstration directe: si $p = \frac{1}{2}(u + id)$, $W = \operatorname{Im} p$, $U = \operatorname{Ker} p$,

on a $p^2=p$, donc $p|_W = id_W$ et $V = W \oplus U$ (par $v = p(v) + (v - p(v))$).
Donc p est la projection sur W parallèlement à U, et $u = 2p - id$ est la symétrie par rapport à W parallèlement à U. De plus si $\vec{w} \in W$, $\vec{v} \in U$, $\vec{w}.\vec{v} = u(\vec{w}).u(\vec{v}) = \vec{w}.(-\vec{v}) = -\vec{w}.\vec{v}$, d'où $\vec{w}.\vec{v}=0$, et par suite $U = W^\perp$. ∎

2.7 Corollaire: Tout $u \in O(V)$ est le produit d'au plus n symétries orthogonales par rapport à des hyperplans

Preuve: Au vu de 2.5, il suffit de le montrer pour $u \simeq M_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.



Notons σ_φ la symétrie orthogonale par rapport à la droite D_φ d'équation cartésienne $x \sin\varphi - y \cos\varphi = 0$, et $N_\varphi = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ +\sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix}$. Comme $N_\varphi^2 = I$, et

$N_\varphi \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$, N_φ est la matrice de σ_φ par 2.6.

Comme $M_\theta = N_{\theta/2} \cdot N_0$, on a $u = \sigma_{\theta/2} \circ \sigma_0$. ∎

Naturellement une telle décomposition n'est pas unique, puisque déjà dans $\mathbb{R}^2$, et pour tout φ réel:

$$\sigma_{\theta/2} \circ \sigma_0 = (\sigma_{\theta/2} \circ \sigma_{-\varphi} \circ \sigma_0) \circ (\sigma_0 \circ \sigma_{-\varphi} \circ \sigma_0) = \sigma_{\theta/2 + \varphi} \circ \sigma_\varphi$$

(on peut choisir la première symétrie, ou la seconde, arbitrairement).

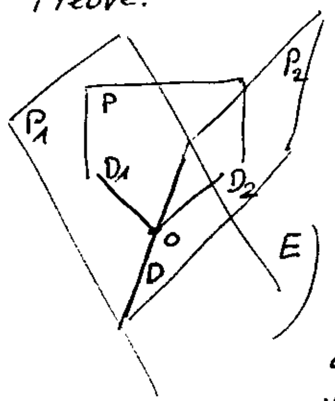
2.8 Remarque: En fait, tout $u \in O(V)$ est le produit de $n' = n - \dim \mathrm{Ker}(u - id)$ symétries orthogonales par rapport à des hyperplans, et pas de moins.

En effet 2.4 et 2.5 donnent une telle décomposition, et d'autre part, si $\Pi_1, \dots, \Pi_p$ sont des hyperplans tels que $u = \sigma_{\Pi_1} \circ \dots \circ \sigma_{\Pi_p}$, $\Pi_1 \cap \dots \cap \Pi_p$ est un sous-espace de dimension $\geq n - p$, et contenu dans $\mathrm{Ker}(u - id)$. ∎

2.9 Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et W un sous-espace de V de codimension 2 (donc $\dim V \geq 2$). Appelons « rotation d'axe W et d'angle θ » l'élément u de $SO(V)$ tel que $u|_W = id_W$ et $u|_{W^\perp}$ a pour matrice M_θ dans une base orthonormée (la fin du 2.7 montre que c'est indépendant de la base orthonormée, sauf à changer θ en $-\theta$). Si $u \in SO(V)$, le nombre de facteurs -1 dans la décomposition 2.5 est pair, or $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = M_\pi$. On a donc décomposé toute application spéciale orthogonale en produit commutatif de telles rotations, et au 2.7, toute rotation ρ en produit de deux symétries orthogonales par rapport à des hyperplans. Ce dernier produit n'est commutatif que si $\theta = 0\,[2\pi]$ ($\Leftrightarrow \rho = id$) ou $\theta = \pi\,[2\pi]$ ($\Leftrightarrow \rho^2 = id, \rho \neq id$), c'est-à-dire si les deux hyperplans sont confondus ou "orthogonaux" (id est: l'un contient l'orthogonal de l'autre). Mais on peut isoler un système de générateurs plus restreint de $SO(V)$: appelons <u>demi-tour</u> une rotation involutive (id est: d'angle π).

<u>2.10 Proposition. Si $n = \dim V \geq 3$, tout $u \in SO(V)$ est le produit d'au plus n demi-tours</u>

Preuve:



Au vu de la décomposition 2.5 et de la remarque 2.9, il suffit de démontrer que toute rotation ρ est le produit d'au plus deux demi-tours. Comme $\dim V \geq 3$, $\dim W \geq 1$. Soit D une droite de W, et $E = D \oplus W^{\perp}$. Au 2.7 on a montré l'existence de deux hyperplans Π_1 et Π_2 de V tels que $\rho = \sigma_{\Pi_1} \circ \sigma_{\Pi_2}$. De $W = \Pi_1 \cap \Pi_2$ on déduit que $D_1 = \Pi_1 \cap E$ et $D_2 = \Pi_2 \cap E$ sont des droites, et $P_1 = \langle D_1 \cup D \rangle$ et $P_2 = \langle D_2 \cup D \rangle$ des plans de l'espace E de dimension 3. On a $\rho|_{E^{\perp}} = id$, et $\rho|_E = \sigma_{P_1} \circ \sigma_{P_2}$. Si $P = \langle D_1 \cup D_2 \rangle$, il vient:

$$\rho|_E = \underbrace{\sigma_{P_1} \circ \sigma_P}_{\rho'_1} \circ \underbrace{\sigma_P \circ \sigma_{P_2}}_{\rho'_2}$$

où ρ'_1 et ρ'_2 sont des demi-tours, puisque P est orthogonal à P_1 et P_2.

Définissant ρ_1 et ρ_2 par $\rho_1|_E = \rho'_1$, $\rho_2|_E = \rho'_2$, $\rho_1|_{E^{\perp}} = \rho_2|_{E^{\perp}} = id$, il vient $\rho = \rho_1 \circ \rho_2$. ■

<u>2.11</u> <u>Remarques</u>: a) On s'est ramené à raisonner dans E de dimension 3 pour pouvoir faire une figure, et parce que c'est le cas classique. Mais ce n'était évidemment pas nécessaire. Par contre l'hypothèse $\dim V \geq 3$ est essentielle. D'ailleurs le seul demi-tour d'un plan est $-id$, et n'engendre évidemment pas les rotations.

b) La preuve de 2.10 montre que $u \in SO(V)$ peut s'écrire comme produit d'au plus $n - \dim \operatorname{Ker}(u - id)$ demi-tours, mais ce n'est plus nécessaire (cas d'un demi-tour).

<u>2.12</u> <u>Corollaire</u> : <u>Si $u \in O(V)$, $V = \operatorname{Ker}(u - id) \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im}(u - id)$</u>

Preuve: Cela résulte de 2.5. Ou directement:

si $u(\vec{v}) = \vec{v}$ et $\vec{w} = u(\vec{x}) - \vec{x}$

$\vec{v}.\vec{w} = \vec{v}.u(\vec{x}) - \vec{v}.\vec{x} = u(\vec{v}).u(\vec{x}) - \vec{v}.\vec{x} = 0$. ■

§3 LE GROUPE DES ISOMÉTRIES

3.1 Proposition. Si $f \in Is(X)$, il existe $x_0 \in X$, $\vec{v} \in Ker(\vec{f}-id)$ et $g \in Is(X)_{x_0}$ tels que $f = t_{\vec{v}} \circ g$, et la décomposition est unique (mais pas x_0).

Preuve: Pour tout $x_1 \in X$, on a par 1.8 $f = t_{\vec{v}} \circ g$, avec $g \in Is(X)$ (puisque $\vec{g} = \vec{f} \in O(\vec{X})$), $g(x_1) = x_1$, et $\vec{v} = \overrightarrow{x_1 f(x_1)}$. Par 2.12 on peut poser $\vec{v} = \vec{y} + \vec{z}$, avec $\vec{y} \in Ker(\vec{f}-id)$, et $\vec{z} = \vec{f}(\vec{w}) - \vec{w}$. D'où
$f = t_{\vec{y}} \circ t_{\vec{z}} \circ g$, et si $x_0 = x_1 - \vec{w}$, $f(x_0) = f(x_1) - \vec{f}(\vec{w})$, et
$\overrightarrow{x_0 f(x_0)} = f(x_1) - x_0 - \vec{f}(\vec{w}) = \overrightarrow{x_1 f(x_1)} - x_0 + x_1 - \vec{f}(\vec{w}) = \vec{v} + \vec{w} - \vec{f}(\vec{w}) = \vec{v} - \vec{z} = \vec{y}$.
D'où par 1.8 une autre décomposition
$f = t_{\vec{y}} \circ g'$, avec $g'(x_0) = x_0$ et $\vec{y} = \overrightarrow{x_0 f(x_0)} \in Ker(\vec{f}-id)$.
Si l'on a une autre décomposition du même type: $f = t_{\vec{y_1}} \circ g_1 = t_{\vec{y_2}} \circ g_2$, il vient $f(x_1) = x_1 + \vec{y_1}$ et $f(x_2) = x_2 + \vec{y_2}$, d'où $\vec{f}(\overrightarrow{x_1 x_2}) = \overrightarrow{x_1 x_2} + \vec{y_2} - \vec{y_1}$, et $\vec{f}(\overrightarrow{x_1 x_2}) - \overrightarrow{x_1 x_2} \in Ker(\vec{f}-id) \cap Im(\vec{f}-id) = \{0\}$ par 2.12.
D'où $\vec{y_1} = \vec{y_2}$, $t_{\vec{y_1}} = t_{\vec{y_2}}$, et donc $g_1 = g_2$. ■

3.2 Corollaire: Tout $f \in Is(X)$ se décompose de façon unique en produit commutatif $f = t \circ g$, où $t = t_{\vec{v}}$ est une translation et $g \in Is(X)$ admet un point invariant. De plus $\vec{v} \in Ker(\vec{f}-id)$.

Preuve: Cela résulte de 3.1 si l'on remarque que
$t_{\vec{v}} \circ g = g \circ t_{\vec{v}} \Leftrightarrow \vec{f}(\vec{v}) = \vec{v}$ (cf. II.3.5). ■

3.3 Corollaire: Pour $f \in Is(X)$ sont équivalents:
a) $\vec{f}$ n'a pas la valeur propre 1
b) f a un et un seul point invariant

Preuve: Si $Ker(\vec{f}-id) = \{0\}$, par 3.1, $f = g \in Is(X)_{x_0}$, donc $f(x_0) = x_0$, et si $f(x_1) = x_1$, $\vec{f}(\overrightarrow{x_0 x_1}) = \overrightarrow{x_0 x_1}$, d'où $x_1 = x_0$.
Si $Ker(\vec{f}-id) \ni \vec{v} \neq 0$, il se peut que f n'ait pas de point invariant (par exemple une translation), mais si $f(x_0) = x_0$, on a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ $f(x_0 + \lambda\vec{v}) = f(x_0) + \lambda\vec{f}(\vec{v}) = x_0 + \lambda\vec{v}$, et f a au moins une droite de points invariants. ■

Ces résultats permettent de ramener l'étude des isométries à celle des applications linéaires orthogonales (§2):
— si f a un point invariant, on le choisit pour origine, et on étudie $\vec{f} \in O(\vec{X})$.

– sinon c'est un produit commutatif $f = t_{\vec{v}} \circ g$, où $g \in Is(X)$ admet une droite (parallèle à $\vec{v}$) de points invariants.

On n'étudiera ici les "décompositions canoniques" des isométries que dans le cas de petite dimension (≤ 3), à partir de 3.6.

3.4 Proposition : Si $f \in Is(X)$ est involutive, c'est la symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace affine Y, notée σ_Y.

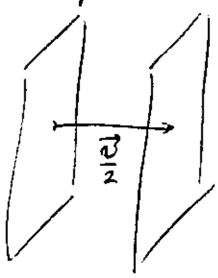
Preuve : Si $f = t_{\vec{v}} \circ g = g \circ t_{\vec{v}}$ avec $g(x_0) = x_0$ (par 3.1), $f^2 = t_{2\vec{v}} \circ g^2 = id$ et $g^2(x_0) = x_0$, d'où $2\vec{v} = \vec{0}$, et $f = g$. Donc f a un point fixe x_0.
Comme par 2.6 $\vec{f}$ est la symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace vectoriel $\vec{Y}$, le résultat s'en déduit, avec $Y = x_0 + \vec{Y}$. ∎

Si $\dim Y = p$, on a $\det \vec{f} = (-1)^{n-p}$, donc $f \in Is^+(X) \Leftrightarrow n-p$ pair.

3.5 Si Y est un hyperplan, on appelle réflexion σ_Y la symétrie orthogonale par rapport à Y.

Proposition : Tout $f \in Is(X)$ est le produit d'au plus $n+1$ réflexions ($\dim X = n$)

Preuve : Si f a un point fixe, en le prenant pour origine, f s'écrit comme produit d'au plus n réflexions par 2.7.



Sinon $f = t_{\vec{v}} \circ g$, où g a au moins une droite de points fixes, et par 2.8, g s'écrit comme produit d'au plus $n-1$ réflexions. Mais une translation $t_{\vec{v}}$ est un produit de deux réflexions par rapport à des hyperplans parallèles :

$t_{\vec{v}} = \sigma_{H_2} \circ \sigma_{H_1}$ dès que $\vec{H_1} = \vec{H_2} = (\mathbb{R}.\vec{v})^{\perp}$, et $H_2 = H_1 + \frac{\vec{v}}{2}$. ∎

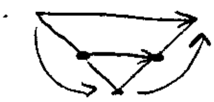
3.6 Proposition : si $\dim X = 1$, les déplacements sont les translations, et les antidéplacements (isométries indirectes) sont les symétries par rapport à un point.

Preuve : $\dim X = 1 \Rightarrow O(\vec{X}) = \{+id, -id\}$ et $SO(\vec{X}) = \{id\}$
Donc $Is^+(X) = \pi^{-1}(SO(\vec{X})) = \mathcal{T}$. Si par contre $f \in Is^-(X)$, $\vec{f} = -id$ et f a un et un seul point fixe x_0 par 3.3. Il vient $\overrightarrow{x_0 f(x)} = -\overrightarrow{x_0 x}$. ∎

3.7 Proposition : si $\dim X = 2$, les déplacements sont les translations et les rotations (autour d'un point). Ce sont des produits de 2 réflexions (sauf id)
Les antidéplacements sont les réflexions et les "retournements-glissements" (produit commutatif d'une réflexion par rapport à une droite et d'une translation parallèle à la droite), qui sont produit de 3 réflexions.

Preuve : Si $f \in Is(X)$, par 2.5 $\vec{f}$ a pour matrice $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ ou M_θ ($\theta \notin \pi\mathbb{Z}$) dans une base orthonormée convenable de $\vec{X}$, et le premier cas est celui des antidéplacements. Dans ce cas $f = t_{\vec{v}} \circ g$, où g a une droite de points fixes et est donc une réflexion σ_D. On a $\vec{v} \in \vec{D}$ par 3.2.
Sinon $f \in Is^+(X)$ et $\vec{f}$ a pour matrice M_θ dans une base convenable. Si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $\vec{f}$ n'a pas la valeur propre 1, et par 3.3 f a un point fixe et un seul, et c'est une rotation de centre ce point. Sinon $\vec{f} = id$, et f est une translation. ∎

<ins>3.8</ins> <ins>Remarque</ins> : Si $\dim X = 2$ (ou même en général) une translation est un produit de deux demi-tours (comme sur la figure).



Mais en dimension 2, aucune rotation n'est produit de demi-tours, sauf un demi-tour ou l'identité.

<ins>3.9</ins> <ins>Proposition : Si $\dim X = 3$ les déplacements sont :</ins>
- <ins>les translations (produit de 2 réflexions par rapport à des plans //, ou de 2 demi-tours par rapport à des droites //).</ins>
- <ins>les rotations (produit de 2 réflexions par rapport à des plans sécants, ou de 2 demi-tours par rapport à des droites concourantes)</ins>
- <ins>les "vissages", produits commutatifs d'une rotation d'axe D et d'une translation de vecteur parallèle à D (produit de 4 réflexion et pas moins, ou de 2 demi-tours par rapport à des droites non coplanaires)</ins>

<ins>Les antidéplacements sont :</ins>
- <ins>les réflexions</ins>
- <ins>les "retournements-glissements", produits commutatifs d'une réflexion de plan H et d'une translation parallèle à H (produit de 3 réflexions)</ins>
- <ins>les "retournements-rotations", produits commutatifs d'une réflexion de plan H et d'une rotation d'axe orthogonal à H (produit de 3 réflexions) (la symétrie par rapport à un point en est un cas particulier).</ins>

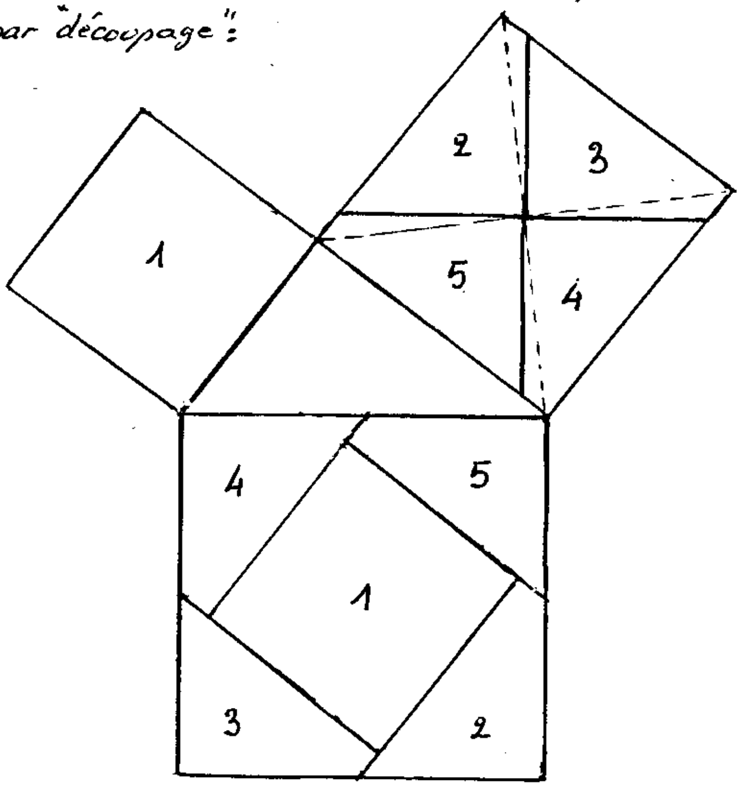
Preuve : On fait encore la discussion en utilisant 3.3 et la décomposition 2.5 de $\vec{f}$ qui donne ici :

$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&\\&M_\theta\end{pmatrix}$ pour les déplacements, et

$\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1&\\&M_\theta\end{pmatrix}$ pour les antidéplacements . . . . ∎

§4 EXERCICES

4.0 C'est un scandale de faire du théorème de Pythagore une remarque banale (1.2), quand c'est l'un des plus anciens énoncés de toutes les mathématiques, et que c'est lui qui a inspiré la construction des "structures euclidiennes". Il en existe un grand nombre de "preuves" s'appuyant sur des connaissances diverses ou sur "l'expérience". La plus fréquente dans l'enseignement est celle qui utilise les relations du VIII.6.1. La plus jolie au goût de l'auteur s'obtient par "découpage":



4.1 Expliciter la table de multiplication du groupe $Is(X)$ pour $\dim X = 1$, puis 2. (Étudier en particulier le produit de deux rotations du plan).

4.2 Quelles sont les isométries involutives du plan euclidien qui commutent à une réflexion donnée ?

4.3 ($\dim X = 2$) a) $A, B, C \in X$. Calculer $\sigma_A \circ \sigma_B \circ \sigma_C$

b) D_1, D_2, D_3 droites concourantes en O. Calculer $\sigma_{D_1} \circ \sigma_{D_2} \circ \sigma_{D_3}$

c) et si D_1, D_2, D_3 ne sont plus concourantes ?

4.4 $\dim X = 2$, et $A_1, A_2, A_3 \in X$; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda \in \mathbb{R}$.
Lieu des points M de X tels que $\alpha_1 \overline{MA_1}^2 + \alpha_2 \overline{MA_2}^2 + \alpha_3 \overline{MA_3}^2 = \lambda$?
Généralisations ?

4.5 ($\dim X = 3$) a) D_1, D_2, D_3 trois droites de X telles que $\vec{D_1} + \vec{D_2} + \vec{D_3} = \vec{X}$.
Montrer qu'il existe une seule droite D s'appuyant sur D_1 et D_2 et parallèle à D_3.

b) Dès que D_1 et D_2 ne sont pas parallèles, il existe une et une seule droite D coupant D_1 et D_2 "à angles droits". On l'appelle la "perpendiculaire commune". Que se passe-t-il si D_1 et D_2 sont coplanaires ? parallèles ?

4.6 a) Classer et décrire les isométries du plan et de l'espace selon la dimension du sous-espace des points fixes.

Dans la suite, $\dim X = 3$

b) Étudier le produit d'un demi-tour et d'une réflexion

c) Étudier le produit de deux demi-tours (discuter selon que leurs axes sont coplanaires ou non). Préciser les éléments du vissage obtenu.

d) Deux couples de droites définissent le même déplacement (comme produit de demi-tours) si et seulement s'ils vérifient

i) ils ont même perpendiculaire commune Δ (cf 4.5)

ii) l'un se déduit de l'autre par un vissage d'axe Δ.

Étudier le groupe des vissages d'axe donné Δ et son action sur les couples de droites de perpendiculaire commune Δ.

e) Étudier le produit de deux rotations; d'une rotation et d'une translation

f) Étudier le produit de deux déplacements quelconques

g) En cas d'insomnie, dresser la table de multiplication complète de $Is(X)$

4.7 Dans un plan affine euclidien P on se donne une droite D et un point $O \notin D$. Montrer que σ_D et les rotations de centre O engendrent $Is(P)$.

4.8 Sur les cotés d'un parallélogramme, on construit (extérieurement) quatre carrés. Montrer que leurs centres forment un autre carré.

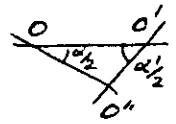
4.9 On construit trois triangles équilatéraux ABC', BCA' et CAB' (extérieurement) sur les cotés d'un triangle ABC. Montrer que $AA' = BB' = CC'$ et que ces trois droites sont concourantes.

4.10 On construit maintenant trois carrés de centres A', B', C' sur les cotés BC, CA, AB d'un triangle. Montrer que AA' et $B'C'$ sont égaux et perpendiculaires

4.11 Construire un polygone à n cotés connaissant les milieux des cotés.

Indications pour les exercices

Bien que les angles ne soient proprement définis qu'au chapitre suivant, on se permettra de les utiliser pour "concrétiser" les raisonnements et énoncés.

4.1 Pour la parenthèse 

4.3 a) C'est $\sigma_{A+\overrightarrow{BC}}$

b) C'est σ_{D_4}, avec $(D_2, D_3) = (D_1, D_4)$

c) Utiliser la parallèle D_1' à D_1 passant par $D_2 \cap D_3$

4.4 Utiliser le barycentre de A_1, A_2, A_3 affectés des masses $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

4.6 Dans tout l'exercice, utiliser toutes les façons possibles de décomposer un déplacement en produit de réflexions, et la remarque que le produit de deux réflexions par rapport à des hyperplans "orthogonaux" est commutatif.

4.7 Conjuguer les rotations par σ_D et σ_D par une rotation.

4.8 Considérer une rotation d'angle droit centrée en l'un des centres des carrés.

4.9 Considérer les rotations d'angle $\frac{\pi}{3}$ centrées aux sommets du triangle

4.10 Considérer les similitudes de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$, de centres A et B et d'angles $\pm\frac{\pi}{4}$

4.11 Composer les symétries par rapport aux milieux : discuter suivant la parité de n.