CHAPITRE VI - LA DROITE ET LE PLAN PROJECTIFS

§1 BIRAPPORT

1.1 Proposition : Trois points distincts d'une droite projective en forment un repère projectif.

Preuve : Si $D = PV$ et $a, b, c \in D$, il s'agit de montrer qu'on peut trouver $\vec{v}, \vec{w} \in V$ tels que $\vec{v} \in a$, $\vec{w} \in b$ et $\vec{v}+\vec{w} \in c$. Soient $\vec{e} \in a$, $\vec{f} \in b$ et $\vec{g} \in c$ non nuls. Comme $a \neq b$, $\{\vec{e}, \vec{f}\}$ est libre, donc $\vec{g} = \lambda\vec{e} + \mu\vec{f}$ pour certains λ, μ. Comme $a \neq c$, $\mu \neq 0$, et comme $b \neq c$, $\lambda \neq 0$. Il suffit donc de poser $\vec{v} = \lambda\vec{e}$, $\vec{w} = \mu\vec{f}$. ■

1.2 Définition : Soient p, q, r, s quatre points (distincts) d'une droite projective D, et (α, β) les coordonnées homogènes de s dans le repère projectif $\{p, q, r\}$ de D. On appelle birapport de p, q, r, s, et on note (p, q, r, s) le scalaire $\frac{\alpha}{\beta}$, qui est distinct de 0 et 1.
(En effet les coordonnées de p, q, r dans le repère $\{p, q, r\}$ sont $(1,0)$, $(0,1)$ et $(1,1)$, donc $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ et $\alpha \neq \beta$).

1.3 Le choix du repère $\{p, q, r\}$ définit une homographie $h : Pk^2 \to D$ (cf. V, §2). Si l'on identifie Pk^2 à $\bar{k} = k \amalg \{\infty\}$ par $(\alpha, \beta) \mapsto \frac{\alpha}{\beta}$, on a

$$\boxed{\begin{array}{l} h^{-1}(p) = \infty,\ h^{-1}(q) = 0,\ h^{-1}(r) = 1, \text{ et} \\ h^{-1}(s) = (p, q, r, s) \in k - \{0, 1\} \end{array}}$$

C'est une autre définition du birapport.

1.4 Proposition : Soit $\{a, b, c\}$ un repère projectif de D, et ℓ, m, n, r quatre points distincts de D de coordonnées homogènes (λ, λ'), (μ, μ'), (ν, ν') et (ρ, ρ') respectivement. On a :

$$\boxed{(\ell, m, n, r) = \frac{\begin{vmatrix} \nu & \lambda \\ \nu' & \lambda' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \nu & \mu \\ \nu' & \mu' \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} \rho & \mu \\ \rho' & \mu' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \rho & \lambda \\ \rho' & \lambda' \end{vmatrix}}}$$

Preuve : Choisissons des vecteurs non nuls $\vec{\ell}, \vec{m}, \vec{n}, \vec{r}$ de ℓ, m, n, r respectivement. On a $\vec{n} = \alpha\vec{\ell} + \beta\vec{m}$ et $\vec{r} = \gamma\vec{\ell} + \delta\vec{m}$ avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tous non nuls, et

$$\alpha = \frac{|\vec{n}, \vec{m}|}{|\vec{\ell}, \vec{m}|},\quad \beta = \frac{|\vec{\ell}, \vec{n}|}{|\vec{\ell}, \vec{m}|},\quad \gamma = \frac{|\vec{r}, \vec{m}|}{|\vec{\ell}, \vec{m}|},\quad \delta = \frac{|\vec{\ell}, \vec{r}|}{|\vec{\ell}, \vec{m}|}$$ (formules de Cramer)

Les coordonnées homogènes de r dans le repère $\{\ell, m, n\}$ sont les composantes de $\vec{r}$ dans la base $\{\alpha\vec{\ell}, \beta\vec{m}\}$, soit $\left(\frac{\gamma}{\alpha}, \frac{\delta}{\beta}\right)$.

Il vient : $(\ell, m, n, r) = \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \frac{\beta}{\delta} = \frac{|\vec{n}, \vec{\ell}|}{|\vec{n}, \vec{m}|} \cdot \frac{|\vec{r}, \vec{m}|}{|\vec{r}, \vec{\ell}|}$. ■

1.5 Plongeant k dans $\bar{k} = Pk^2$ comme au 1.3, il vient aussitôt par 1.4 la formule "classique" du birapport de quatre scalaires:

$$\boxed{(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = \frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}\cdot\frac{\delta-\beta}{\delta-\alpha}}$$

ou même de quatre éléments de $\bar{k}$, avec les conventions habituelles, par exemple $(\infty,\beta,\gamma,\delta) = \dfrac{\delta-\beta}{\gamma-\beta}$.

1.6 Proposition: Soient p,q,r,s quatre points distincts d'une droite projective D. Pour la structure affine de $D-\{p\}$, on a:

$$\boxed{(p,q,r,s) = \frac{\overrightarrow{qs}}{\overrightarrow{qr}}}$$

Preuve: Ce n'est que l'expression intrinsèque de la dernière formule du 1.5. ∎

1.7 Lemme: $\boxed{\begin{array}{l}(p,q,r,s) = (q,p,r,s)^{-1} = (p,q,s,r)^{-1}\\ (p,q,r,s) = 1-(p,r,q,s)\end{array}}$

Preuve: La première ligne résulte de 1.4. Pour la deuxième, on peut choisir $\vec{p}\in p$, $\vec{q}\in q$ tels que $\vec{p}+\vec{q}\in r$ et $\lambda\vec{p}+\mu\vec{q}\in s$ (λ et $\mu\neq 0$). Alors $-\vec{p}\in p$, $\vec{p}+\vec{q}\in r$, $(-\vec{p})+(\vec{p}+\vec{q})\in q$ et $(\mu-\lambda)(-\vec{p})+\mu(\vec{p}+\vec{q})\in s$.
Il vient $(p,q,r,s) = \dfrac{\lambda}{\mu}$ et $(p,r,q,s) = \dfrac{\mu-\lambda}{\mu}$. ∎

1.8 Si $\sigma\in\mathfrak{S}_4$, $(\sigma(p),\sigma(q),\sigma(r),\sigma(s))$ ne dépend donc que de (p,q,r,s) et σ. Ceci définit une action de $\mathfrak{S}_4$ sur $k-\{0,1\}$, par
$(12)\longmapsto(\lambda\mapsto\frac{1}{\lambda})$; $(34)\longmapsto(\lambda\mapsto\frac{1}{\lambda})$; $(23)\longmapsto(\lambda\mapsto 1-\lambda)$

Proposition: (carac $k\neq 2$):

a) Le noyau de cette action est le "groupe de Klein":
$$K = \{id\ ;\ (12)(34)\ ;\ (13)(24)\ ;\ (14)(23)\}$$

b) L'orbite de $\lambda\in k-\{0,1\}$ est $\mathcal{O}_\lambda = \{\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1-\lambda, \frac{1}{1-\lambda}, 1-\frac{1}{\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}\}$

c) $\#\mathcal{O}_\lambda = 6$ sauf $\begin{cases}\text{si } \lambda\in\{-1,2,\frac{1}{2}\}, \text{qui est une orbite à } \begin{cases}\text{trois éléments (si carac } k\neq 3)\\ \text{un élément (si carac } k=3)\end{cases}\\ \text{ou si } \lambda^2-\lambda+1=0 \text{ (une orbite éventuelle à deux éléments).}\end{cases}$

Preuve: Que l'orbite de λ contienne tous les éléments de l'ensemble $\mathcal{O}_\lambda$ de b) est clair par 1.7. Que cet ensemble soit stable par $\lambda\mapsto\frac{1}{\lambda}$ et $\lambda\mapsto 1-\lambda$, donc par l'action de $\mathfrak{S}_4$, se vérifie immédiatement.
Si donc tous ces scalaires sont distincts, on a bien $\#\mathcal{O}_\lambda = 6$, et comme $\#\mathfrak{S}_4 = 24$, le stabilisateur de λ a quatre éléments. Comme il contient visiblement K, c'est K. En égalant deux des scalaires écrits dans $\mathcal{O}_\lambda$, on obtient les cas particuliers du c). ∎

1.9 Définition: (carac $k \neq 2$) On dit que quatre points distincts a, b, c, d d'une droite projective forment une division harmonique si $(a,b,c,d) = -1$. D'après 1.8.a) c'est une propriété de la "paire de paires" $\{\{a,b\},\{c,d\}\}$.

1.10 Proposition: Pour la structure affine obtenue en choisissant un point à l'infini sur D, on a:
$$\boxed{(\infty, a, b, c) = -1 \Leftrightarrow a = \frac{b+c}{2}}$$

1.11 Proposition: Si $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont quatre éléments distincts de k, on a:

a) $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = -1 \Leftrightarrow (\alpha+\beta)(\gamma+\delta) = 2(\alpha\beta+\gamma\delta)$

b) $(0,\beta,\gamma,\delta) = -1 \Leftrightarrow \frac{2}{\beta} = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta}$ ("moyenne harmonique")

c) $(\alpha,-\alpha,\gamma,\delta) = -1 \Leftrightarrow \alpha^2 = \gamma\delta$ ("moyenne géométrique")

Preuve: a) résulte de 1.5, et b) et c) s'en déduisent. ∎

§2 APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES

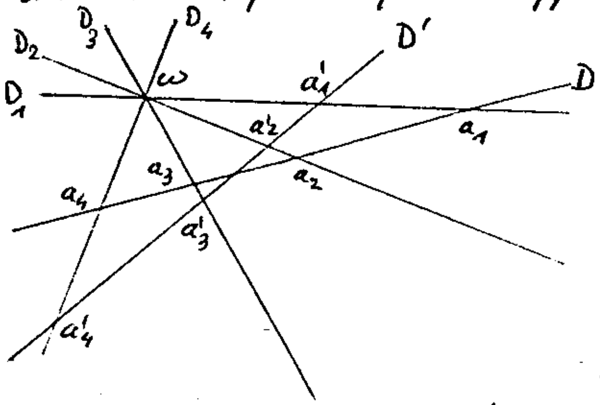
2.1 Proposition: a) Soit P un espace projectif, $h: P \to P$ une homographie, et p, q, r, s quatre points distincts et alignés de P. Alors:
$$(h(p), h(q), h(r), h(s)) = (p, q, r, s)$$

b) Réciproquement, toute bijection d'une droite projective sur une autre qui conserve le birapport de quatre points est une homographie.

Preuve: Soit V tel que $P = PV$, et $u: V \to V$ telle que $h = Pu$.
Soit W un plan de V et $D = PW$. $P(u(W)) = h(D)$ est une droite projective, et $h|_D$ est une homographie de D sur $h(D)$. On est donc ramené au cas des droites. Si h est une homographie de D sur D' et p, q, r, s quatre points distincts de D, le repère $\{p,q,r\}$ définit une homographie $\theta: \overline{k} \to D$ telle que $\theta(\infty) = p$, $\theta(0) = q$, $\theta(1) = r$, et $\theta^{-1}(s) = (p,q,r,s)$ (cf. 1.3).
De même $\{h(p), h(q), h(r)\}$ est un repère projectif de D', d'où une homographie $\theta': \overline{k} \to D'$ telle que $\theta'(\infty) = h(p)$, $\theta'(0) = h(q)$, $\theta'(1) = h(r)$, et $\theta'^{-1} \circ h(s) = (h(p), h(q), h(r), h(s))$. Comme h et $\theta' \circ \theta^{-1}$ sont deux homographies de D sur D' qui coïncident sur le repère $\{p,q,r\}$, par V.24 on a $h = \theta' \circ \theta^{-1}$, d'où $\theta'^{-1}(h(s)) = \theta^{-1}(s)$. ∎

2.2 Soit P un plan projectif, D une droite de P, et $\omega \in P - D$. On a vu au chapitre V (1.5 et 1.6) que l'ensemble F des droites passant par ω a une structure naturelle d'espace projectif de

dimension 1, pour laquelle l'application $F \longrightarrow D$ est une homographie.
$d \longmapsto d \cap D$

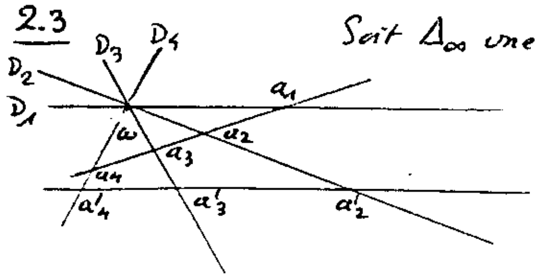


On peut donc parler du birapport de quatre droites concourantes (D_1, D_2, D_3, D_4), et c'est par 2.1 le birapport de leurs quatre points d'intersection avec n'importe quelle droite ne passant pas par leur point de concours. Par exemple, sur la figure:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a'_1, a'_2, a'_3, a'_4) = (D_1, D_2, D_3, D_4)$$

La première égalité résulte d'ailleurs directement de V.1.6 et VI.2.1.

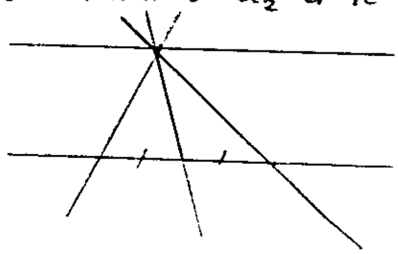
2.3



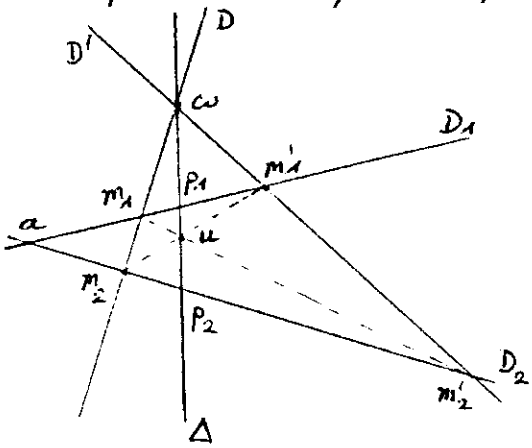
Soit Δ_∞ une droite ne passant pas par $\omega = D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4$. Pour la structure affine de $P - \Delta_\infty$, on aura, si D' est parallèle à D_1:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (\infty, a'_2, a'_3, a'_4) = \frac{\overrightarrow{a'_2 a'_4}}{\overrightarrow{a'_2 a'_3}} \quad \text{par 1.6.}$$

En particulier ce birapport vaut -1 si et seulement si a'_2 est le milieu de (a'_3, a'_4): la division formée par deux cotés d'un triangle, la médiane issue du sommet commun, et la parallèle en ce sommet au coté opposé, est harmonique.



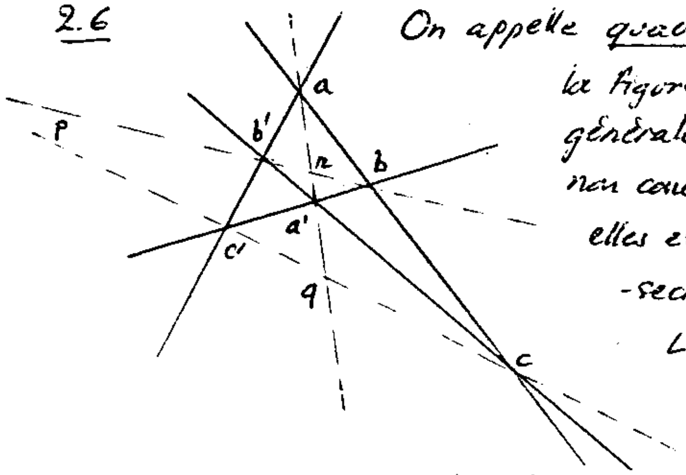
2.4 Définition: Soient D et D' deux droites distinctes d'un plan projectif P, $\omega = D \cap D'$, et $a \in P - (D \cup D')$. On appelle polaire de a par rapport à D et D' l'unique droite Δ passant par ω et telle que $(\langle \omega, a \rangle, \Delta, D, D') = -1$



D'après 2.2, elle possède un et un seul point p_1 sur chaque droite D_1 passant par a et distincte de $\langle a, \omega \rangle$: c'est l'unique p_1 de D_1 tel que $(a, p_1, m_1, m'_1) = -1$, où $m_1 = D \cap D_1$ et $m'_1 = D' \cap D_2$. On dit que p_1 est le conjugué harmonique de a par rapport à m_1 et m'_1.

2.5 Si D_1 et D_2 sont deux droites comme en 2.4 et distinctes, et $m_1, m_1', p_1, m_2, m_2', p_2$ les points correspondants, posons $u = \langle m_1 m_2' \rangle \cap \langle m_2 m_1' \rangle$. p_1 et p_2 sont sur la polaire de a par rapport à $\langle m_1 m_2' \rangle$ et $\langle m_2 m_1' \rangle$, qui est issue de u. Autrement dit $u \in \langle p_1 p_2 \rangle = \Delta$, d'où une <u>construction à la règle de la polaire</u>.

2.6



On appelle <u>quadrilatère complet</u> du plan projectif la figure formée par quatre droites "en position générale" (c'est-à-dire 2 à 2 distinctes et 3 à 3 non concourantes). L'intersection de deux d'entre elles est un <u>sommet</u> du quadrilatère, et l'intersection des deux autres est le <u>sommet opposé</u>. Les trois droites joignant les sommets opposés sont les <u>diagonales</u> du quadrilatère.

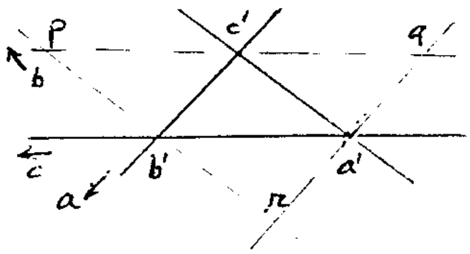
Notons $\{a,a'\}$, $\{b,b'\}$, $\{c,c'\}$ les couples de sommet opposés, et $p = \langle bb' \rangle \cap \langle cc' \rangle$, $q = \langle cc' \rangle \cap \langle aa' \rangle$, $r = \langle aa' \rangle \cap \langle bb' \rangle$.

2.7 <u>Proposition</u>: $(a,a',q,r) = (b,b',r,p) = (c,c',p,q) = -1$

Preuve: Par 2.5, $\langle aa' \rangle$ est la polaire de p par rapport à $\langle ab'c' \rangle$ et $\langle abc \rangle$, d'où les deux dernières égalités par 2.4, et la première de la même façon. ∎

2.8 Il est instructif de donner de 2.7 un autre type de preuve, par la méthode illustrée au IV.3.6 :

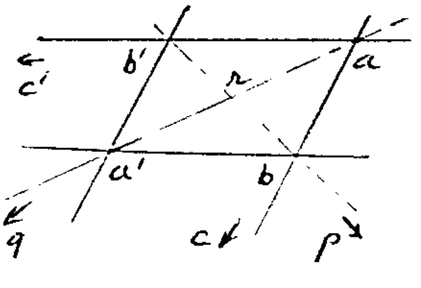
- choisissons $\langle abc \rangle$ comme droite à l'infini : il vient $\langle pq \rangle // \langle a'b' \rangle$, $\langle q,r \rangle // \langle b'c' \rangle$, et $\langle rp \rangle // \langle c',a' \rangle$; il en résulte



$a' = \frac{q+r}{2}$, $b' = \frac{r+p}{2}$, et $c' = \frac{p+q}{2}$

d'où le résultat par 2.3. ∎

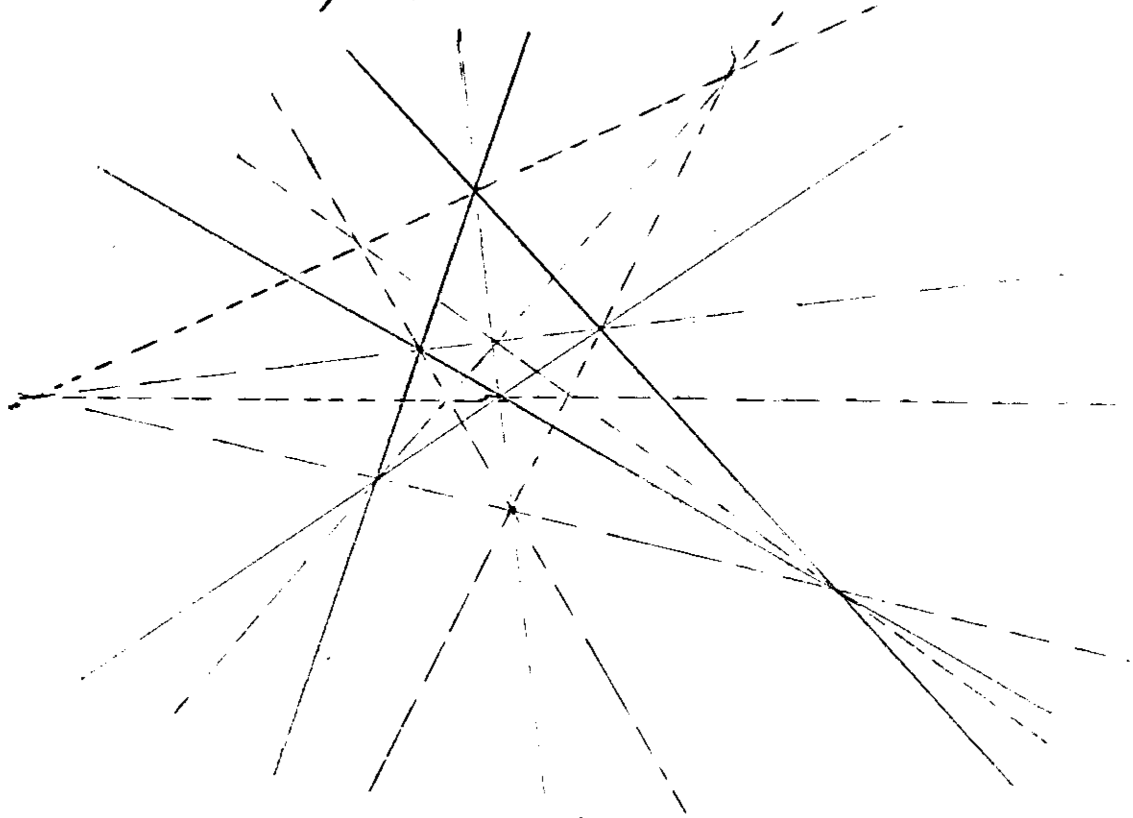
- choisissons $\langle cc' \rangle$ comme droite à l'infini : il vient $\langle a'b' \rangle // \langle ab \rangle$ et $\langle a'b \rangle // \langle ab' \rangle$



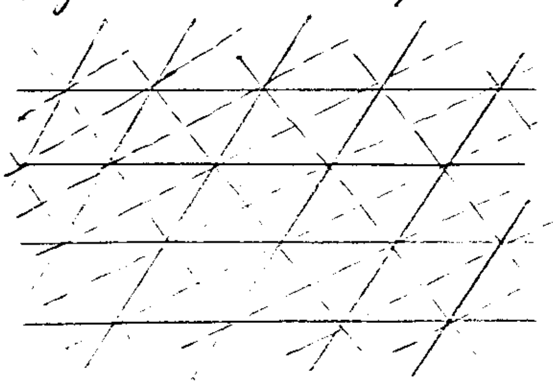
d'où (par IV.2.6) $r = \frac{a+a'}{2} = \frac{b+b'}{2}$

et de nouveau le résultat par 2.3 ∎

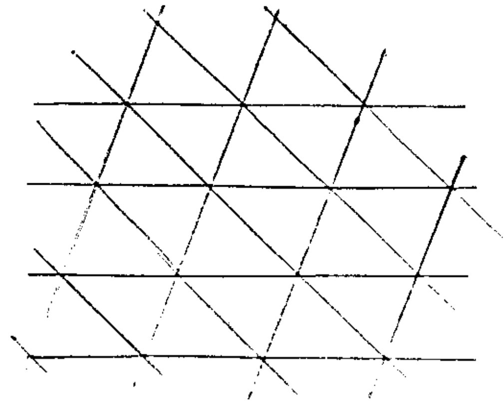
2.9 On remarquera que , dans la figure du 2.6, les droites joignant deux points nommés découpent sur les autres de nouvelles divisions harmoniques, et ceci, "ad infinitum":



en effet, en utilisant 2.8, on ne fait que tracer l'un des réseaux réguliers suivants du plan affine:



ou



§3 LE GROUPE DES HOMOGRAPHIES DE LA DROITE PROJECTIVE

3.1 Une droite projective s'identifie par le choix d'un repère projectif à Pk^2, et lui-même à $\bar{k} = k \amalg \{\infty\}$ par $(\alpha,\beta) \mapsto \frac{\alpha}{\beta}$, et les points du repère s'identifient alors à $\infty, 0$, et 1 (cf. 1.3). Une homographie f de Pk^2 est de la forme $f = P_u$ où $u \in GL(k^2) \simeq M_2(k)$. D'où l'existence d'une matrice inversible $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, déterminée à un facteur près, telle que

$$\forall x \in \bar{k} \qquad f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (\text{avec } f(\infty) = \tfrac{a}{c},\ f(-\tfrac{d}{c}) = \infty).$$

3.2 Les points fixes de f sont les directions propres de u : l'homographie de matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a donc 2, 1, ou 0 points fixes, selon le nombre de solutions dans k de l'équation "caractéristique" $X^2 - (a+d)X + (ad-bc) = 0$.

3.3 Proposition: Soit f une homographie de D ayant deux points fixes p et q. Alors: $\exists \alpha \in k - \{0,1\}$, $\forall m \in D - \{p,q\}$, $(p,q,m,f(m)) = \alpha$.
Réciproquement, si $\alpha \in k - \{0,1\}$, l'application $g: D \to D$ définie par $g(p) = p$, $g(q) = q$, et pour $m \in D - \{p,q\}$, $(p,q,m,g(m)) = \alpha$, est une homographie dont les points fixes sont p et q.

Preuve: $f|_{D-\{p\}}$ est une bijection affine de la droite $D - \{p\}$, donc une dilatation, et de point fixe q, donc une homothétie de centre q et de rapport $\alpha \in k - \{0,1\}$: $\overrightarrow{qf(m)} = \alpha \overrightarrow{qm}$, d'où le résultat par 1.6.
La réciproque se fait de même. ∎

3.4 Proposition: Soit f une homographie de D ayant un seul point fixe p. Alors $f|_{D-\{p\}}$ est une translation de la droite affine $D - \{p\}$.

Preuve: Comme ci-dessus c'est une dilatation, et cette fois sans point fixe. ∎

3.5 Si k est algébriquement clos, par exemple si $k = \mathbb{C}$, toute homographie de $\bar{k}$ est de la forme 3.3 ou 3.4. Mais si $k = \mathbb{R}$, par exemple l'homographie $f: \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ définie par $f(t) = \frac{-1}{t}$, $f(\infty) = 0$, $f(0) = \infty$ n'a aucun point fixe.

3.6 Soit D une droite affine et f une homographie de $\bar{D} = D \amalg \{\infty\}$. On appelle foyer objet et foyer image de f les points φ et φ' de $\bar{D}$ tels que $f(\varphi) = \infty$ et $f(\infty) = \varphi'$.

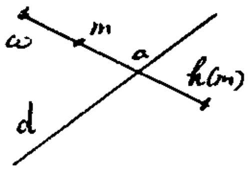
Proposition : Supposons que $\varphi, \varphi' \in D$. Alors

$\forall\, m,n \in D-\{\varphi,\varphi'\}$ $\qquad \dfrac{\overrightarrow{\varphi m}}{\overrightarrow{\varphi n}} = \dfrac{\overrightarrow{\varphi' f(n)}}{\overrightarrow{\varphi' f(m)}}$

Preuve : f conserve le birapport : $(\infty, \varphi, m, n) = (\varphi', \infty, m', n')$, et on conclut par 1.6 et 1.7. ■

§4 HOMOLOGIES DANS LE PLAN PROJECTIF

4.1 Proposition : Etant donnés une droite d et un point ω d'un plan projectif P et un scalaire $\alpha \neq 0, 1$, la bijection h de P définie par :



$h(\omega) = \omega$; $\forall a \in d$ $h(a) = a$; $\forall m \in P-(d \cup \{\omega\})$

$(a, \omega, m, h(m)) = \alpha$, avec $a = \langle \omega m \rangle \cap d$

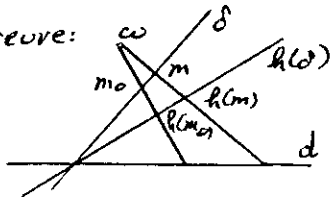
est une homographie, appelée homologie d'axe d, de centre ω et de birapport α.

Preuve : $h' = h|_{P-d}$ est l'homothétie de centre ω et de rapport α, puisque
$$(a, \omega, m, h(m)) = \frac{\overrightarrow{\omega h(m)}}{\overrightarrow{\omega m}} = \alpha$$
C'est donc une dilatation, et par III.2.7, $\overline{h'} = h$. ■

4.2 Proposition : a) Une homologie est déterminée par la donnée de son axe, de son centre, et de l'image d'un point.

b) Si δ est une droite distincte de l'axe et ne passant pas par le centre, δ et $h(\delta)$ se coupent sur l'axe.

Preuve :



b) $\delta \cap d$ est fixe, donc sur $h(\delta)$ qui est une droite

a) s'en déduit par la construction de $h(m)$ "à la règle" illustrée par la figure ci-contre. ■

4.3 Proposition : (k algébriquement clos, ou $k = \mathbb{R}$)

Une homographie involutive du plan projectif ($\neq id$) est une homologie de birapport -1.

Preuve : Par 1.7, une homologie est involutive si et seulement si son birapport α satisfait à $\alpha = \frac{1}{\alpha}$, d'où $\alpha = \pm 1$, d'où $\alpha = -1$. Réciproquement, si $h : PV \to PV$ est involutive (et $\neq id$), elle est de la forme Pu, où $u : V \to V$ est bijective, n'est pas une homothétie, et $u^2 = \lambda\, id_V$ pour un certain $\lambda \neq 0$. Si $k = \mathbb{R}$, $(\det u)^2 = \lambda^3$ implique $\lambda > 0$, et $\sqrt{\lambda}$ existe, tout comme si k est algébriquement clos. Alors si $u' = \frac{u}{\sqrt{\lambda}}$, on a $u'^2 = id_V$ et $h = Pu'$. u' est donc la symétrie par rapport à D parallèlement à Ω, où D et Ω sont deux sous-espaces supplémentaires de V. On peut supposer que Ω est une droite et D un plan (quitte à changer u' en $-u'$). Par suite h conserve $\omega = P\Omega$ et $d = PD$ point par point. Toute droite δ passant par ω est globalement stable par h, puisque h conserve ω et $d \cap \delta$, et $h|_\delta$ est une homographie involutive de δ qui a deux points fixes. D'où par 3.3 $(\omega, d\cap\delta, m, h(m)) = \alpha$ est indépendant de $m \in \delta$, et $\alpha = -1$ par involutivité. ■

§5 EXERCICES

5.1 Dualité

a) Soit E un espace vectoriel de dimension $n+1$, et $G_n(E)$ l'ensemble des hyperplans vectoriels de E. L'application $\begin{array}{l} PE^* \xrightarrow{\alpha} G_n(E) \\ \ell \longmapsto \operatorname{Ker} \ell \end{array}$ est une bijection qui munit $G_n(E)$ d'une structure canonique d'espace projectif de dimension n.

b) Plus généralement, on rappelle que si F, G sont des sous-espaces vectoriels de E, on a: $\dim F + \dim F^{\perp} = n+1$; $F \subset G \Leftrightarrow F^{\perp} \supset G^{\perp}$; $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$; $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$; $F^{\perp\perp} = F$.

Posons $X = PE$ et $X^* = PE^*$. L'application $Y = PF \longmapsto Y' = P(F^{\perp})$ est bijective de l'ensemble des sous-espaces projectifs de X de dimension k sur celui des sous-espaces projectifs de X^* de dimension $n-k-1$ (on a $X' = \emptyset$ et on pose $\dim \emptyset = -1$).
On l'appelle dualité et X^* l'espace projectif dual de X.

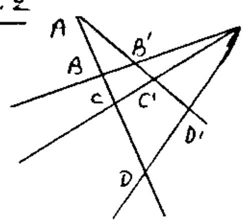
c) Montrer que $Y \subset Z \Rightarrow Y' \supset Z'$, $\langle Y \cup Z \rangle' = Y' \cap Z'$, $(Y \cap Z)' = \langle Y' \cup Z' \rangle$, $Y'' = Y$.
Étudier les exemples $n=2$ et $n=3$. Quelle est la figure duale du quadrilatère complet?

d) Énoncer les théorèmes duals des théorèmes de Pappus et de Desargues (projectifs)

e) Si X est muni d'un repère projectif $\{x_0, \dots, x_{n+1}\}$, définir le repère dual $\{x_0^*, \dots, x_{n+1}^*\}$ de X^*. Montrer que $x_j' = \langle x_0^*, \dots, x_{j-1}^*, x_{j+1}^*, \dots, x_n^* \rangle$ et décrire x_{n+1}'.
Si $x = (\lambda_0, \dots, \lambda_n)$, quelles sont les coordonnées de x' dans $\{x_0, \dots, x_{n+1}\}$ et quelle est sont équation dans $\{x_0^*, \dots, x_{n+1}^*\}$? ...

f) Si D est une droite de X, $D' = \bigcap_{x \in D} x'$, et $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1', x_2', x_3', x_4')$ dans $P(E^*/p^{-1}D')$

5.2



a) Montrer $(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$
$\Longleftrightarrow \langle BB' \rangle, \langle CC' \rangle$, et $\langle DD' \rangle$ concourantes

b) Quel est l'énoncé dual?

5.3 Dans le plan projectif on se donne un triangle ABC et une droite Δ qui coupe BC en A', CA en B', AB en C'. La polaire de A' (resp. B', C') par rapport à AB et AC (resp. BA et BC, CA et CB) coupe BC (resp. AC, AB) en A'' (resp. B'', C'').
Montrer que AA'', BB'', CC'' concourent, et que sont alignés $A'B''C''$, $A''B'C''$, $A''B''C'$.
On pose $\alpha = AA'' \cap B''C''$, $\beta = BB'' \cap C''A''$, $\gamma = CC'' \cap A''B''$. Montrer que les divisions $(A'\alpha B''C'')$, $(B'\beta C''A'')$, et $(C'\gamma A''B'')$ sont harmoniques.

5.4 A, B, C trois sommets alignés d'un quadrilatère complet, et $A'B'C'$ les sommets opposés.
$\alpha = BB' \cap CC'$ $\beta = CC' \cap AA'$ $\gamma = AA' \cap BB'$. Montrer que sont concourantes
$A\alpha, B\beta$ et $C\gamma$; $A\alpha, B'\beta$ et $C\gamma$; $A'\alpha, B\beta$ et $C\gamma$; $A'\alpha, B'\beta$ et $C'\gamma$.

5.5 Dualiser 5.3 et 5.4

5.6 A, B, C, D quatre points 3 à 3 non alignés du plan projectif.
$M = AB \cap CD$, $N = AC \cap BD$, $P = AD \cap BC$, $M_1 = AB \cap NP$, $M_2 = CD \cap NP$
$N_1 = AC \cap MP$, $N_2 = BD \cap MP$, $P_1 = AD \cap MN$, $P_2 = BC \cap MN$
Montrer que les divisions $(ABMM_1)$ et (MNP_1P_2) sont harmoniques, et trouver toutes les divisions harmoniques de la figure.
Montrer que $M_1N_1P_2$, $M_1N_2P_1$, $M_2N_1P_1$, $M_2N_2P_2$ sont alignés. Tracer ces droites, et trouver de nouvelles divisions harmoniques...

5.7 Quatre droites distinctes D, D', Δ, Δ' du plan projectif concourent en O.
$I, J \in D - \{0\}$; $C, D \in D' - \{0\}$; $\Delta \cap \langle IC \rangle = A$, $\Delta \cap \langle ID \rangle = B$, $\Delta' \cap \langle JC \rangle = E$, $\Delta' \cap \langle JD \rangle = F$,
$\langle AJ \rangle \cap \langle IE \rangle = G$, $\langle BJ \rangle \cap \langle IF \rangle = H$.
Montrer que O, G, H sont alignés. Énoncé dual ?

5.8 h étant une homographie d'un plan projectif, on dit qu'un point C est un centre de h si toute droite passant par C est globalement invariante par h, et qu'une droite D est un axe de h si tous les points de D sont invariants par h.

a) Montrer qu'une homologie a au plus un centre et au plus un axe.
b) Montrer que sont équivalents
   i) h a un centre et une droite invariante n'y passant pas
   ii) h a un axe et un autre point fixe
   iii) h est une homologie
c) Il est possible que h ait un axe et pas d'autre point fixe. h est déterminée dans ce cas par la donnée de son axe et d'un couple $(M_0, h(M_0))$ (arbitraires hors de l'axe). Construction géométrique de l'image d'un point dans ce cas?
d) Il est possible que h ait un centre et pas de droite invariante autre que celles qui y passent. Par quelles données est-elle alors déterminée, et comment construire l'image d'un point dans ce cas?
e) Les homographies d'axe donné Δ forment un sous-groupe. Décrire sa table de multiplication
f) Les homographies de centre donné C forment un autre sous-groupe. Même question.
g) Y-a-t-il des homographies qui n'ont ni axe ni centre ?
h) Toute homographie est un produit d'homologies ; de combien au plus ?

5.9 Énoncer et démontrer en utilisant les propriétés des homologies, les théorèmes de Pappus et de Desargues projectifs.

5.10 $E = F \oplus G$, $V = PF$, $W = PG$, $X = PE$
a) Par tout point m de X passe une seule droite D_m rencontrant V et W.
b) Si σ est la symétrie par rapport à G parallèlement à F, et $P\sigma = h$, h est l'homographie définie par $\begin{cases} h(a) = a \text{ si } a \in V \cup W \\ \text{Si } m \notin V \cup W,\ h(m) \in D_m \text{ et } (D_m \cap V, D_m \cap W, m, h(m)) = -1 \end{cases}$

5.11 A, B, C non alignés ; $\alpha, \alpha' \in BC$; $\beta, \beta' \in CA$; $\gamma, \gamma' \in AB$.
Pour qu'il existe une homographie h du plan qui conserve A, B, C et envoie α sur α', β sur β', γ sur γ', il faut et il suffit que
$$(\alpha\alpha' BC)(\beta\beta' CA)(\gamma\gamma' AB) = 1$$

5.12 Soit h une homographie de la droite projective D

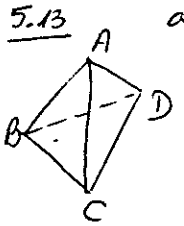
a) Si h est involutive, elle a deux points fixes a et b et
$$\forall m \in D \quad (a, b, m, h(m)) = -1$$

b) h est le produit d'au plus trois involutions

c) Si h est associée à la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans un repère projectif de D,
h involutive $\Leftrightarrow a+d=0$

d) h involutive $\Leftrightarrow \exists m \in D \mid h(m) \neq m = h^2(m)$.

5.13



a) Soit $G = \{h \in GP(\mathbb{R}^4) \mid h(A)=A, h(B)=B, h(C)=C, h(D)=D\}$
où A, B, C, D sont quatre points non coplanaires de $P\mathbb{R}^4$.
Si $\{A, B, C, D, M\}$ est un repère projectif, on pose
$P = \langle AB \rangle \cap \langle MCD \rangle$, $Q = \langle BC \rangle \cap \langle MAD \rangle$, $R = \langle CD \rangle \cap \langle MAB \rangle$, $S = \langle AD \rangle \cap \langle MBC \rangle$
Montrer que P, Q, R, S sont coplanaires.

b) Soient $P, P' \in \langle AB \rangle$, $Q, Q' \in \langle BC \rangle$, $R, R' \in \langle CD \rangle$. Montrer qu'il existe une et une seule $h \in G$ telle que $h(P) = P'$, $h(Q) = Q'$, $h(R) = R'$.

c) Soient H et H' des plans qui ne passent pas par A, B, C, D. Montrer qu'il existe une et une seule $h \in G$ telle que $h(H) = H'$.

d) Soient Δ et Δ' deux droites ne rencontrant pas les arêtes du tétraèdre $ABCD$, et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, resp. $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ leurs intersections avec les faces. Montrer:
$$\exists h \in G \mid h(\Delta) = \Delta' \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\alpha', \beta', \gamma', \delta')$$

e) Réciproquement, supposant $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\alpha', \beta', \gamma', \delta')$, montrer l'existence et l'unicité de $h \in G$ telle que $h(\Delta) = \Delta'$.
(Utiliser $\begin{cases} P = C\delta \cap AB, \ Q = A\delta \cap BC, \ R = A\beta \cap CD \\ P' = C\delta' \cap AB, \ Q' = A\delta' \cap BC, \ R' = A\beta' \cap CD \end{cases}$ par exemple)

f) Soient $H_A = \langle \Delta, A \rangle$, $H_B = \langle \Delta, B \rangle$, $H_C = \langle \Delta, C \rangle$, $H_D = \langle \Delta, D \rangle$ les plans définis par A, B, C, D et une droite Δ qui ne les rencontre pas. Démontrer ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant définis comme en (d)) que: $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (H_A, H_B, H_C, H_D)$
(utiliser des perspectives de sommets A et C, par exemple).

Indications pour les exercices

5.1 : f) Calcul en coordonnées homogènes bien choisies

5.3 : cf. la fin du §2 du cours

5.4 et 5.6 : même remarque

5.7 : Envoyer D (par exemple) à l'infini

5.8 : b) Montrer i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ i)
Dans tout l'exercice, faire un bon usage de la dualité (ex. 5.1)
g) et h) regarder les matrices des applications linéaires associées

5.9 : Recopier les démonstrations du cours des énoncés affines en remplaçant les dilatations par des homologies, après avoir démontré l'équivalent projectif de la prop. III.3.3

5.11 : h est déterminée par $h(A)=A$, $h(B)=B$, $h(C)=C$ et $h(D)=D'$ si $\{A,B,C,D\}$ est un repère projectif. Si on pose $D=\langle A\alpha\rangle \cap \langle B\beta\rangle$ et $D'=\langle B'\beta'\rangle \cap \langle A'\alpha'\rangle$, h est donc déterminée par α' et β'. Si $\tilde{\gamma}'=h(\gamma)$, on a alors l'identité cherchée avec $\tilde{\gamma}'$ au lieu de γ'...

5.13 : a) Un calcul en coordonnées homogènes, ou bien III.6.7
b) Comme au 5.11
c) Utiliser les points où H et H' recoupent les arêtes, puis (b).
d) et e) : idem