CHAPITRE V - GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

§1 ESPACE PROJECTIF, GROUPE PROJECTIF

1.1 On a déjà défini en IV.4.1 les notions d'espace et de sous-espace projectifs et leurs dimensions. L'intersection de deux sous-espaces projectifs est un sous-espace projectif (au moins si elle n'est pas vide). Si S est une partie non vide de PV, le plus petit sousespace projectif de PV contenant S est l'intersection de tous, on le note encore $\langle S \rangle$ et on l'appelle le sous-espace projectif engendré par S.

1.2 On vérifie aisément que $P(W \cap W') = PW \cap PW'$ et $P(W+W') = \langle PW \cup PW' \rangle$, et on en tire:

Proposition: Si X et Y sont deux sous-espaces d'un même espace projectif de dimension n, on a

$$\dim X + \dim Y = \dim X \cap Y + \dim \langle X \cup Y \rangle \quad (\text{en posant } \dim \emptyset = -1)$$

En particulier: $\dim X + \dim Y \geq n \Rightarrow X \cap Y \neq \emptyset$

Par exemple une droite et un hyperplan projectifs se coupent toujours

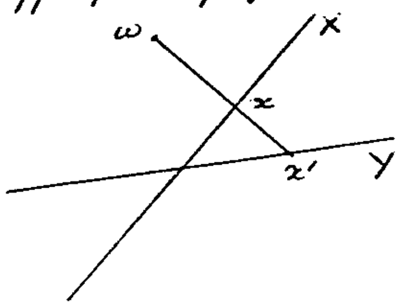
1.3 Toute application linéaire injective $f: V \to W$ entre espaces vectoriels passe au quotient en une application $Pf: PV \to PW$, qui est encore injective, et bijective si f l'est. On appelle homographie une telle application bijective Pf. La composée de deux homographies est une homographie, car $P(f \circ g) = Pf \circ Pg$, et l'ensemble des homographies de PV dans lui-même forme un groupe ($Pf^{-1} = P(f^{-1})$), noté $PGL(V)$ et appelé le groupe projectif, ou groupe des homographies de l'espace PV.

1.4 Proposition: On a une suite exacte de groupes:

$$\begin{array}{ccccccccc} (*) & \longrightarrow & k^* & \longrightarrow & GL(V) & \xrightarrow{P} & PGL(V) & \longrightarrow & (*) \\ & & \lambda & \longmapsto & \lambda id_V & & & & \\ & & & & f & \longmapsto & Pf & & \end{array}$$

Preuve: P est surjective par définition, et si $Pf = id_{PV}$, f transforme tout vecteur de V en un vecteur colinéaire. C'est donc une homothétie (cf. par exemple la preuve de III.2.7.b). ■

1.5 Exemple : Soit PV un espace projectif de dimension ≥ 2, X et Y deux hyperplans projectifs, et $\omega \in PV - (X \cup Y)$. L'application



$$\pi : X \longrightarrow Y$$
$$x \longmapsto x' = \langle \omega, x \rangle \cap Y$$

est bien définie d'après 1.2 de X dans Y. On l'appelle "<u>perspective de X sur Y de centre (ou pôle) ω</u>". D'autre part la perspective de Y sur X de centre ω est l'inverse de π, qui est donc bijective. On va montrer :

1.6 Proposition : <u>π est une homographie de X sur Y.</u>

Preuve : Notons P l'ensemble des droites projectives de PV passant par ω. P est donc l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension 2 de V contenant la droite vectorielle ω, qui s'identifie canoniquement à l'ensemble des droites vectorielles de V/ω, c'est-à-dire à $P(V/\omega)$.

Soit H l'hyperplan vectoriel de V tel que $X = PH$. La droite ω en est un supplémentaire, et la composée $f : H \hookrightarrow V \twoheadrightarrow V/\omega$ est bijective. Donc $Pf : X \longrightarrow P \simeq P(V/\omega)$ est une homographie,
$$x \longmapsto \langle \omega, x \rangle$$
dont l'inverse est : $\begin{array}{l} P \longrightarrow X \\ D \longmapsto D \cap X \end{array}$. De même $\begin{array}{l} P \longrightarrow Y \\ D \longmapsto D \cap Y \end{array}$ est une homographie. Or π est la composée $\begin{array}{l} X \longrightarrow P \longrightarrow Y \\ x \longmapsto \langle \omega, x \rangle \\ \qquad\quad D \longmapsto D \cap Y \end{array}$. ∎

§2 REPÈRES PROJECTIFS, COORDONNÉES HOMOGÈNES

2.1 Soit V un espace vectoriel de dimension $n+1$. La donnée d'une base $\{e_0, \ldots, e_n\}$ de V équivaut à celle d'un isomorphisme $\begin{array}{l} e : k^{n+1} \xrightarrow{\approx} V \\ (x_0, \ldots, x_n) \longmapsto \sum x_i e_i \end{array}$ et $Pe : Pk^{n+1} \longrightarrow PV$ est une homographie.

Un "<u>système de coordonnées homogènes</u>" dans PV est la donnée d'une homographie $Pk^{n+1} \longrightarrow PV$. L'isomorphisme e correspondant est donc défini à un scalaire près (par 1.4), et la base $\{e_0, \ldots, e_n\}$ de V qui y correspond est donc définie à une homothétie près.

Les <u>coordonnées homogènes</u> d'un point $p = k.\vec{v}$ de PV sont les coordonnées $(x_0, \ldots, x_n)$ d'un vecteur quelconque $\vec{v} \neq 0$ de p dans la base $\{e_0, \ldots, e_n\}$. Elles sont donc <u>non toutes nulles et définies à un facteur près</u>.

2.2 Si l'on pose $p_i = ke_i$ $(i=0,..,n)$ les coordonnées homogènes de p_i sont $(0,..0,\underset{i}{1},0..0)$, le 1 étant à la i-ème place. Mais le choix de $n+1$ points p_i de PV "projectivement libres" (c'est-à-dire tels que $\dim \langle p_i \rangle = n$) ne suffit pas à définir un système de coordonnées homogènes $Pe : Pk^{n+1} \longrightarrow PV$, car $e(0,..,0,1_i,0,..0) = \mu_i e_i$ ne définit e qu'à une bijection diagonale près de k^{n+1}. Pour définir e à une homothétie près, il suffit de rajouter la condition

$$e(1,..,1) \in k^*.(\Sigma e_i)$$

(condition qui implique l'égalité des μ_i). D'où la

2.3 Définition: On appelle repère projectif d'un espace projectif PV de dimension n la donnée de $n+2$ points $\{p_0, p_1, .., p_{n+1}\}$ de PV tels qu'il existe une base $\{e_0,..,e_n\}$ de V telle que

$$\forall i=0,..,n \quad e_i \in p_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{n} e_i \in p_{n+1}$$

Une telle base est définie à une homothétie près. Les coordonnées homogènes d'un point $p \in PV$ dans ce repère sont les composantes dans une de ces bases d'un vecteur non nul quelconque de p.

2.4 Proposition: Si $\{p_0,..,p_{n+1}\}$ et $\{q_0,..,q_{n+1}\}$ sont des repères projectifs de PV, il existe un et un seul $h \in PGL(V)$ tel que

$$\forall i = 0,..,n+1 \qquad h(p_i) = q_i$$

Preuve: D'après 2.2 il existe une et une seule homographie

$$Pe : Pk^{n+1} \longrightarrow PV \quad \text{telle que}$$

$e(0,..0,1_i,0,..0) = e_i$ et $e(1,..,1) = \sum_{i=0}^{n} e_i$ (avec $e_i \in p_i$ et $\sum e_i \in p_{n+1}$)

Si h est une solution, $h \circ Pe : Pk^{n+1} \longrightarrow PV$ envoie $(0,..,1_i,..0)$ sur f_i et $(1,..,1)$ sur Σf_i, avec $f_i \in q_i$ et $\Sigma f_i \in q_{n+1}$. Donc par 2.2, on a $h \circ Pe = Pf$. Réciproquement $h = Pf \circ (Pe)^{-1}$ fait l'affaire. ■

L'ensemble des repères projectifs de PV est donc un espace homogène principal sous $PGL(V)$. En particulier le groupe projectif agit transitivement sur l'espace projectif, ou même sur l'ensemble des systèmes de p points "projectivement libres" (on peut compléter de tels systèmes en repères projectifs).

2.5 Proposition: Si $\{p_0,..,p_{n+1}\}$ est un repère projectif de PV, et $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+2}$, $\{p_{\sigma(0)},..., p_{\sigma(n+1)}\}$ est aussi un repère projectif.

Preuve : Vérifions quand σ est la transposition τ de 0 et $n+1$:
Si $e_i \in p_i$ et $\sum_0^n e_i \in p_{n+1}$, on pose $e'_i = e_i$ $(i = 1, \dots, n+1)$ et $e'_0 = -\sum_0^n e_i$.
Alors $\{e'_0, \dots, e'_n\}$ est une base de V, $e'_i \in p_i$ $(i = 1, \dots, n)$, $e'_0 \in p_{n+1}$, et $\sum_0^n e'_i = -e_0 \in p_0$.

Comme c'est clair pour les transpositions de i et j $(0 \leq i, j \leq n)$, et que celles-ci et τ engendrent $\mathfrak{S}_{n+2}$, le résultat s'en déduit. ■

§3 RETOUR SUR LES LIENS AFFINE – PROJECTIF

3.1 Au chapitre IV, §4 on a déjà montré comment un espace affine X se plonge dans son complété projectif $\overline{X} = X \amalg X_\infty$, où X_∞ est un hyperplan projectif de $\overline{X} = P\hat{X}$ (IV.4.3), et comment réciproquement le complémentaire dans un espace projectif PV d'un hyperplan projectif PW est canoniquement un espace affine X de même dimension (IV.4.2).

3.2 Soit $Pu : PV \to PV$ une homographie conservant globalement PW. Elle provient d'un automorphisme $u : V \to V$ conservant W, qui passe donc au quotient : $\bar{u} : V/_W \to V/_W$. La restriction f de Pu à $X = PV - PW$ est une bijection de X ; elle est affine, d'application linéaire associée $\vec{f} \in GL(\mathcal{L}(V/_W, W))$ définie par :

$$\forall \alpha \in \mathcal{L}(V/_W, W), \quad \vec{f}(\alpha) = u \circ \alpha \circ \bar{u}^{-1}$$

Pour le voir, il suffit de choisir des coordonnées :

3.3 Soit $\{v_0, \dots, v_n\}$ une base de V complétée d'une base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de W.
Si $u(W) \subset W$, la matrice de u dans cette base est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 \cdots 0 \\ \alpha_1 & \\ \vdots & \boxed{\alpha_{ij}} \\ \alpha_n & \end{pmatrix}$$

avec $\alpha_0 \neq 0$, et on peut supposer $\alpha_0 = 1$

Si $p \in X$ a pour coordonnées homogènes $(x_0, x_1, \dots, x_n)$, on a $x_0 \neq 0$ et on peut de même supposer $x_0 = 1$. Celles de $Pu(p)$ seront alors $(1, y_1, \dots, y_n)$ avec

$$\begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

3.4 Réciproquement, si $f : X \to X$ est un élément de $GA(X)$, on l'a prolongé (au IV.1.5) en un automorphisme $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{X}$. Posons $\overline{f} = P\hat{f} : \overline{X} \simeq P\hat{X} \longrightarrow P\hat{X} = \overline{X}$. Comme $\hat{f}|_X = f$ et $\hat{f}|_{\vec{X}} = \vec{f}$,
il vient

$$\boxed{\overline{f}|_X = f \quad \text{et} \quad \overline{f}|_{X_\infty} = P\vec{f}}$$

et ces formules définissent donc <u>le seul prolongement de f en une homographie de $\overline{X}$</u> (qui laisse X_∞ globalement invariant).

<u>3.5</u> De plus, par IV.1.6, on a $\overline{f\circ g} = \overline{f}\circ\overline{g}$, et l'application $GA(X) \longrightarrow PGL(\hat{X})$ est donc un homomorphisme de groupes

$$f \longmapsto \overline{f} \qquad \text{(injectif puisque } \overline{f}|_X = f\text{)}$$

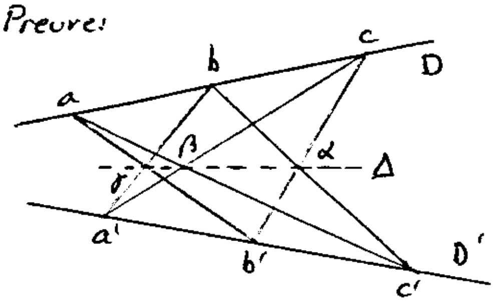
D'après 3.2 et 3.4, son image est exactement le sous-groupe de $PGL(\hat{X})$ des homographies de $\overline{X}$ qui conservent globalement X_∞..

De plus l'image du sous-groupe $Dil(X)$ par ce morphisme est exactement le sous-groupe des homographies de $\overline{X}$ qui conservent X_∞ <u>point par point</u> (d'après III.2.7 et IV.4.5).

<u>3.6</u> La méthode développée en IV.4.6 et 7 s'adapte à l'obtention d'énoncés de géométrie projective. Donnons-en pour exemple le

<u>Théorème de Pappus (version projective)</u> : <u>Dans un plan projectif on se donne deux droites distinctes D et D', trois points a, b, c de D et trois points a', b', c' de D', tous distincts. Les trois points $\alpha = \langle b,c'\rangle \cap \langle c,b'\rangle$, $\beta = \langle c,a'\rangle \cap \langle a,c'\rangle$ et $\gamma = \langle a,b'\rangle \cap \langle b,a'\rangle$ sont alignés.</u>

Preuve :



Le complémentaire de $\Delta = \langle\alpha\beta\rangle$ est un plan affine dans lequel les hypothèses du théorème de Pappus affine (III.3.4) sont satisfaites. On conclut que les droites affines $\langle a,b'\rangle$ et $\langle b,a'\rangle$ sont parallèles, c'est-à-dire $\gamma \in \Delta$. ∎

<u>3.7</u> Remarque : Cet énoncé ne doit pas se confondre avec le suivant, qui, lui, ressortit directement de la méthode du IV.4.6, ou bien se déduit du précédent :

<u>Théorème de Pappus (version affine générale)</u> : <u>D et D' étant deux droites du plan affine, et $a,b,c \in D$, $a',b',c' \in D'$ tous distincts. On suppose que $\langle bc'\rangle \cap \langle cb'\rangle = \{\alpha\}$ et $\langle ca'\rangle \cap \langle ac'\rangle = \beta$. Alors $\langle ab'\rangle$, $\langle ba'\rangle$ et $\langle\alpha\beta\rangle$ sont parallèles ou concourantes.</u>

<u>3.8</u> Soit X un espace affine et $\mathcal{R} = \{x_0, \dots, x_n\}$ un repère affine de X. C'est une base de $\hat{X}$, et $g = \frac{1}{n+1}(x_0 + \dots + x_n)$ est le centre de gravité du repère. $\mathcal{R}' = \{k.x_0, \dots, k.x_n, k.g\}$ est appelé le <u>repère projectif associé à</u> $\mathcal{R}$.

Si $x \in X$ a pour coordonnées barycentriques $\{\lambda_0, \dots, \lambda_n\}$ dans le repère $\mathcal{R}$, on a $x = \lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_n x_n$, et $\sum \lambda_i = 1$. Alors $\{\lambda_0, \dots, \lambda_n\}$ est un système de coordonnées homogènes de x dans le repère associé $\mathcal{R}'$ de $\overline{X}$. Les points de X_∞ ont eux des coordonnées homogènes de somme nulle : si $p \in X_\infty$ et $\vec{v} \in p$, $\vec{v} = \mu_0 x_0 + \dots + \mu_n x_n$, les μ_i sont les coordonnées homogènes de p, et $\sum \mu_i = 0$. (pour tout ceci, cf. IV.3.1).

<u>3.9</u> En fait, on utilise plus souvent les coordonnées <u>cartésiennes</u> des points de X dans le repère $\mathcal{R}$, et les composantes des vecteurs de $\vec{X}$ dans la base $\{\overrightarrow{x_0x_1}, \dots, \overrightarrow{x_0x_n}\}$. Si $x \in X$ a pour coordonnées cartésiennes $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, et $\vec{v} \in \vec{X}$ pour composantes $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ dans le repère $\mathcal{R}$, les points correspondants de $\overline{X}$ ont pour coordonnées homogènes dans le repère $\mathcal{R}'' = \{k x_0, k(x_1 - x_0), \dots, k(x_n - x_0), k g'\}$ (où g' est le centre de gravité des précédents dans $\hat{X}$), $(1, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $(0, \mu_1, \dots, \mu_n)$ respectivement. Dans $\mathcal{R}''$, les points de X_∞ sont caractérisés par la nullité de leur première coordonnée.

<u>3.10</u> Récapitulons 3.8 et 3.9 en un tableau :

Coordonnées	$x \in X$	$x \in X$	$\vec{v} \in \vec{X}$	$\vec{v} \in \vec{X}$
Cartésiennes dans $\mathcal{R}$	$\boxed{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$	$\mu_1, \dots, \mu_n$	$\boxed{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$	$\mu_1, \dots, \mu_n$
Barycentriques dans $\mathcal{R}$	$1 - \sum_1^n \lambda_i, \lambda_1, \dots, \lambda_n$	$\boxed{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n}$ de somme 1	$-\sum \lambda_i, \lambda_1, \dots, \lambda_n$	$\boxed{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n}$ de somme 0
Homogènes dans $\mathcal{R}'$	$1 - \sum_1^n \lambda_i, \lambda_1, \dots, \lambda_n$	$\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$	$-\sum \lambda_i, \lambda_1, \dots, \lambda_n$	$\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$
Homogènes dans $\mathcal{R}''$	$1, \lambda_1, \dots, \lambda_n$	$1, \mu_1, \dots, \mu_n$	$0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$	$0, \mu_1, \dots, \mu_n$

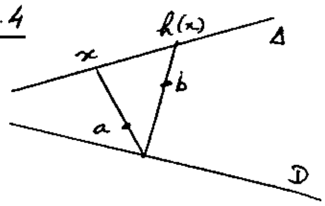
(§4) EXERCICES

4.1 a) Quelles sont les configurations possibles de 3 droites de $P_2(\mathbb{R})$? de 3 plans de $P_3(\mathbb{R})$?
b) Décrire les orbites de l'action du groupe projectif d'un plan projectif sur l'ensemble des familles ordonnées de trois droites projectives distinctes. La restriction à chaque orbite est-elle simplement transitive ?

4.2 a) Un espace projectif de dimension n sur un corps à q éléments a $\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ points.
b) Étudier la configuration des sous-espaces projectifs de $P_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$; de $P_3(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

4.3 Soient D et Δ deux droites non concourantes d'un espace projectif X de dimension 3, et h une homographie qui laisse les points de D et de Δ invariants.
a) Montrer que pour $M \in X$ tel que $h(M) \neq M$, $\langle M, h(M)\rangle$ rencontre D et Δ.
b) Choisissant un repère approprié, déterminer h par sa matrice, si l'on suppose $h \neq id$ et $h^2 = id$.

4.4



Soient a, b deux points et D, Δ deux droites de $P_2(\mathbb{R})$. On définit $h : \Delta \to \Delta$ par le dessin ci-contre.
Montrer que h est une homographie de Δ, et que h a un ou deux points fixes. Lesquels ?
Si h' est une homographie, à quelle condition peut-on trouver a, b, D tels que $h' = h$?

4.5 "Théorème fondamental de la géométrie projective" : « Une bijection f d'un espace projectif de dimension ≥ 2 qui conserve l'alignement est une semi-homographie » (c'est-à-dire de la forme P_u, où u est semi-linéaire) Imiter la démonstration du théorème fondamental de la géométrie affine (chap III, §5). Ici toute droite a au moins 3 points, et la condition carac $k \neq 2$ disparait.

4.6 On note P_j l'espace projectif de dimension j sur $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
a) A, B, distincts $\in P_1$. Donner deux systèmes de coordonnées homogènes pour lesquels $A = (1,0)$ et $B = (0,1)$. Décrire une homographie $h \neq id$ telle que $h(A) = A$ et $h(B) = B$
b) Si (x,y,z) est un système de coordonnées homogènes dans P_2, écrire l'équation d'une droite ; de celle qui passe par $(1,2,1)$ et $(3,1,3)$; la condition pour que trois droites concourent.
c) Dans P_3, comment s'écrivent les équations d'une droite ?
Soient D_1 et D_2 non concourantes, et $M \notin D_1 \cup D_2$. Montrer qu'il existe une seule droite D rencontrant D_1, D_2, et M. Equation de D si celles de D_1 et D_2 et les coordonnées de M sont connues ?
d) Dans P_4, soient D_1, D_2, D_3 trois droites "en position générale".
Qu'est-ce que ça veut dire ? Combien de droites coupent D_1, D_2, et D_3 ?