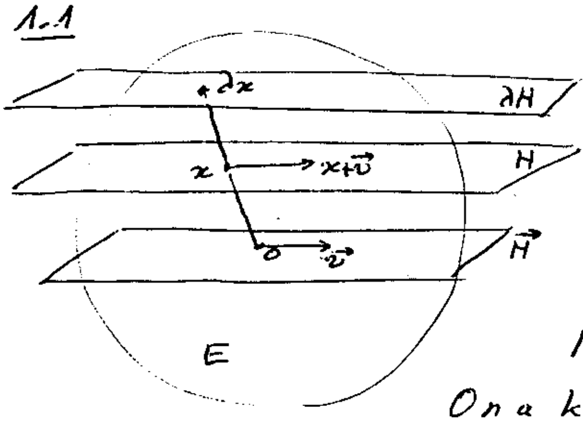
CHAPITRE IV · BARYCENTRES, POINTS A L'INFINI

§1 PLONGEMENT UNIVERSEL D'UN ESPACE AFFINE

1.1



Soit E un espace vectoriel sur k, $\alpha : E \to k$ une forme linéaire non nulle, et $H = \{\vec{v} \in E \mid \alpha(\vec{v}) = 1\}$. On sait (cf. II.1.6) que H est un espace affine de direction $\vec{H} = \operatorname{Ker} \alpha$, par

$$(x, \vec{v}) \longmapsto x + \vec{v} \quad \text{(somme dans } E\text{)}$$

Pour $\lambda \in k^*$, on note $\lambda H = \{\lambda x \mid x \in H\} = \alpha^{-1}(\lambda)$.

On a $k^*H = \bigcup_{\lambda \in k^*} \lambda H = E - \vec{H}$, et $E = \vec{H} \amalg k^*H$.

Si $y \in E$, ou bien $\alpha(y) \neq 0$ et y s'écrit de façon unique λx avec $\lambda \in k^*$, $x \in H$ (nécessairement $\lambda = \alpha(y)$ et $x = \frac{y}{\lambda}$) ; ou bien $\alpha(y) = 0$ et $y \in \vec{H}$.

Pour $\lambda, \lambda' \in k^*$, $x, x' \in H$, $\vec{v}, \vec{v}' \in \vec{H}$, on a

$$\alpha(\lambda x + \lambda' x') = \lambda + \lambda' \quad , \quad \alpha(\lambda x + \vec{v}) = \lambda \quad , \quad \alpha(\vec{v} + \vec{v}') = 0$$

Par suite dans la décomposition ci-dessus de l'espace E, l'addition et la multiplication par un scalaire s'écrivent :

$$(*) \quad \begin{cases} \lambda x + \lambda' x' = \begin{cases} (\lambda + \lambda') \left(\dfrac{\lambda x + \lambda' x'}{\lambda + \lambda'} \right) \in k^*H, \text{ si } \lambda + \lambda' \neq 0 \\ \lambda' \overrightarrow{xx'} \in \vec{H} \text{ si } \lambda + \lambda' = 0 \end{cases} \\ \lambda x + \vec{v} = \lambda \left(x + \dfrac{\vec{v}}{\lambda} \right) \in k^*H \\ \vec{v} + \vec{v}' = \vec{v} + \vec{v}' \in \vec{H} \\ \mu \cdot \lambda x = \begin{cases} (\mu\lambda) x \in k^*H & \text{si } \mu \neq 0 \\ \vec{o} \in \vec{H} & \text{si } \mu = 0 \end{cases} \\ \mu \cdot \vec{v} = \mu \vec{v} \in \vec{H} \end{cases}$$

1.2 Notons qu'à la première ligne de $(*)$, $g = \dfrac{\lambda x + \lambda' x'}{\lambda + \lambda'}$ est bien dans H, et que pour tout $x_0 \in H$, on a

$$\overrightarrow{x_0 g} = g - x_0 = \frac{\lambda x + \lambda' x' - (\lambda + \lambda') x_0}{\lambda + \lambda'} = \frac{\lambda \overrightarrow{x_0 x} + \lambda' \overrightarrow{x_0 x'}}{\lambda + \lambda'}$$

relation dont l'égalité des extrêmes définit le point g de H.

1.3 Réciproquement, à tout espace affine X de direction $\vec{X}$, on associe un ensemble $\hat{X} = \vec{X} \amalg (k^* \times X)$ muni d'une addition et d'une multiplication par un scalaire, opérations définies par

$$(*)\begin{cases} \forall \vec v, \vec v' \in \vec X,\ x, x' \in X,\ \lambda, \lambda' \in k^*,\ \mu \in k \\ \vec v + \vec v' = \vec v + \vec v' \in \vec X & \mu \cdot \vec v = \mu \vec v \in \vec X \\ (\lambda, x) + \vec v = \vec v + (\lambda, x) = (\lambda, x + \frac{\vec v}{\lambda}) \in k^* \times X & \mu \cdot (\lambda, x) = \begin{cases} (\mu\lambda, x) \in k^* \times X & \text{si } \mu \neq 0 \\ \vec 0 \in \vec X & \text{si } \mu = 0 \end{cases} \\ (\lambda, x) + (\lambda', x') = \begin{cases} \lambda' \vec{xx'} = \lambda \vec{x'x} \in \vec X, & \text{si } \lambda + \lambda' = 0 \\ (\lambda + \lambda', g) \in k^* \times X, & \text{si } \lambda + \lambda' \neq 0 \end{cases} \\ \text{où } g \text{ est défini par : } \forall x_0 \in X,\ \vec{x_0 g} = \dfrac{\lambda \vec{x_0 x} + \lambda' \vec{x_0 x'}}{\lambda + \lambda'} \end{cases}$$

On vérifie que g ne dépend pas du choix de x_0 :

Si $\vec{x_1 g'} = \dfrac{\lambda \vec{x_1 x} + \lambda' \vec{x_1 x'}}{\lambda + \lambda'}$, $\vec{x_0 g'} = \dfrac{\lambda \vec{x_0 x_1} + \lambda' \vec{x_0 x_1} + \lambda \vec{x_1 x} + \lambda' \vec{x_1 x'}}{\lambda + \lambda'} = \vec{x_0 g}$

1.4 Proposition : Muni des lois $(*)$, $\hat X$ est un espace vectoriel, et l'application $\alpha : \hat X \to k$ définie par $\begin{cases} \alpha(\lambda, x) = \lambda & \text{pour } \lambda \in k^*, x \in X \\ \alpha(\vec v) = 0 & \text{pour } \vec v \in \vec X \end{cases}$

est une forme linéaire. De plus $\operatorname{Ker} \alpha = \vec X$ et $\alpha^{-1}(1) = 1.X$

Preuve : Une simple (mais longue) vérification. ■

La loi $X \times \vec X \to X$ d'espace affine est l'addition dans $\hat X$, si l'on identifie X à $1.X$: $(1, x) + \vec v = (1, x + \frac{\vec v}{1}) = (1, x + \vec v)$.

1.5 Proposition : Si $f : X \to Y$ est affine, il existe une et une seule $\hat f : \hat X \to \hat Y$ linéaire prolongeant f (rendant commutatif le diagramme :). De plus $\hat f(\vec X) \subset \vec Y$ et $\hat f|_{\vec X} = \vec f$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat X & \xrightarrow{\hat f} & \hat Y \end{array}$$

Preuve : Nécessairement $\hat f((\lambda, x)) = \hat f(\lambda.(1, x)) = \lambda \hat f((1, x)) = \lambda(1, f(x)) = (\lambda, f(x))$

et $\hat f(\vec v) = \hat f((1, x_0 + \vec v) - (1, x_0)) = (1, f(x_0 + \vec v)) - (1, f(x_0)) = \overrightarrow{f(x_0) f(x_0 + \vec v)} = \vec f(\vec v)$.

Donc $\hat f$ est bien déterminée, et il reste à vérifier qu'elle est linéaire... ■

1.6 : Il résulte de 1.5 (unicité) que $\boxed{\widehat{f \circ g} = \hat f \circ \hat g}$

1.7 Proposition : $\{x_0, \dots, x_n\}$ est un repère affine de X si et seulement si c'est une base de $\hat X$ (formée d'éléments de X).

Preuve : $\{x_0, \dots, x_n\}$ base de $\hat X \iff \{x_0, x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0\}$ base de $\hat X$

$\iff \{x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0\}$ base de $\vec X$ ■

§2 BARYCENTRES

2.1 On appelle point massif un élément de $\hat{X} - \vec{X} = k^*_x X$, et on le note λx au lieu de (λ, x). Par 1.4, on sait donc ajouter des points massifs et des vecteurs, et les multiplier par un scalaire. Une somme finie de points massifs $\sum \lambda_i x_i$ est un vecteur si $\sum \lambda_i = 0$, appelé "barycentre vectoriel des points x_i affectés des masses λ_i", et un point massif de masse $\sum \lambda_i$ si $\sum \lambda_i \neq 0$, appelé "barycentre massif des points massifs $\lambda_i x_i$". Dans ce cas, si $\sum \lambda_i x_i = (\sum \lambda_i) g$, avec $g \in X$, on appelle g le "barycentre des points x_i affectés des masses λ_i". Enfin si tous les λ_i sont égaux, on parle d'isobarycentre ou encore de centre de gravité des points x_i.
Les propriétés suivantes des barycentres résultent aisément du §1 :

2.2 Si $\sum \lambda_i = 0$, le vecteur $\sum \lambda_i \overrightarrow{x_0 x_i}$ est indépendant de $x_0 \in X$
C'est en effet le barycentre vectoriel $\sum \lambda_i x_i = \sum \lambda_i x_i - (\sum \lambda_i) x_0 = \sum \lambda_i \overrightarrow{x_0 x_i}$

2.3 Si $\sum \lambda_i \neq 0$, le barycentre des x_i affectés des masses λ_i est l'unique point g de X tel que $\sum \lambda_i \overrightarrow{g x_i} = \vec{0}$. De plus :

$$\forall x_0 \in X \qquad \sum \lambda_i \overrightarrow{x_0 x_i} = \left(\sum \lambda_i\right) \overrightarrow{x_0 g}$$

En effet, dans $\hat{X}$, $(\sum \lambda_i) g = \sum \lambda_i x_i \iff \sum \lambda_i \overrightarrow{g x_i} = \vec{0}$
De même $\sum \lambda_i \overrightarrow{x_0 x_i} = \sum \lambda_i x_i - (\sum \lambda_i) x_0 = \left(\sum \lambda_i\right)(g - x_0) = \left(\sum \lambda_i\right) \overrightarrow{x_0 g}$.

2.4 La notion de barycentre est "associative" :

$$\mathrm{bar}\,\Big(\underbrace{\mathrm{bar}\,(x_i ; \lambda_i)}_{\sum \lambda_i}\,,\ \underbrace{\mathrm{bar}\,(y_j ; \mu_j)}_{\sum \mu_j}\Big) = \mathrm{bar}\,(x_i, y_j\ ;\ \lambda_i, \mu_j)$$

Cela résulte de l'associativité de la somme dans $\hat{X}$, et reste donc vrai même si certains barycentres intermédiaires sont vectoriels.

2.5 Le barycentre des points x_i affectés des masses λ_i telles que $\sum \lambda_i \neq 0$, est un point de $\langle (x_i) \rangle$.
En effet c'est le point g qui par 2.3 vérifie par exemple

$$\overrightarrow{x_1 g} = \left(\sum \lambda_i\right)^{-1} \left(\lambda_2 \overrightarrow{x_1 x_2} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{x_1 x_n}\right)$$

2.6 (car $\neq 2$) On appelle milieu du couple (x_1, x_2) le point $\frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2$
Proposition : Étant donnés quatre points non alignés x, x', y, y' de X, les propriétés suivantes sont équivalentes :
a) $\overrightarrow{xx'} = \overrightarrow{yy'}$ c) $\langle xx' \rangle \parallel \langle yy' \rangle$ et $\langle xy \rangle \parallel \langle x'y' \rangle$
b) $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{x'y'}$ d) $\frac{x'+y}{2} = \frac{x+y'}{2}$
On dit alors que $\{x, y, y', x'\}$ est un parallélogramme.

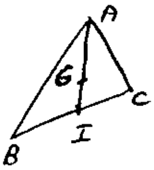
Preuve : Dans $\hat{X}$ on a (a) $\Leftrightarrow x'-x = y'-y$, (b) $\Leftrightarrow y-x = y'-x'$, (d) $\Leftrightarrow x'+y = x+y'$ et (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (d) est donc clair. D'autre part (a) et (b) impliquent (c) trivialement. Supposons enfin (c). Comme les quatre points ne sont pas alignés, le système $\{\overrightarrow{xy}, \overrightarrow{xx'}\}$ est libre. Si $\overrightarrow{x'y'} = \lambda \overrightarrow{xy}$ et $\overrightarrow{yy'} = \mu \overrightarrow{xx'}$, il vient

$$\overrightarrow{xy} + \mu \overrightarrow{xx'} = \overrightarrow{xy'} = \overrightarrow{xx'} + \lambda \overrightarrow{xy}, \quad \text{d'où } \lambda = 1 = \mu,$$

et par exemple $\overrightarrow{xx'} = \overrightarrow{xy'} - \overrightarrow{x'y'} = \overrightarrow{xy'} - \overrightarrow{xy} = \overrightarrow{yy'}$, soit (a). ■

<u>2.7</u> (carac $k \neq 2,3$) On appelle <u>médiane</u> d'un triangle la droite qui joint un sommet au milieu des deux autres.

<u>Proposition : Les trois médianes d'un triangle sont concourantes au centre de gravité des sommets.</u>



Preuve : Soient A, B, C les trois sommets (non alignés) et I le milieu de (B,C). Soit G l'isobarycentre : $G = \frac{A+B+C}{3}$. On a $G = \frac{A}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{B+C}{2}\right) = \frac{A+2I}{3} \in \langle AI \rangle$ d'après 2.5. ■

(Si $k = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, les trois médianes sont parallèles !)

<u>2.8</u> <u>Proposition : $f : X \to Y$ est affine si et seulement si elle "conserve les barycentres" : $f\left(\frac{\sum \lambda_i x_i}{\sum \lambda_i}\right) = \frac{\sum \lambda_i f(x_i)}{\sum \lambda_i}$</u>

Cela est en effet nécessaire et suffisant pour qu'on puisse prolonger f en une application <u>linéaire</u> $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{Y}$. ■

(§3) COORDONNÉES BARYCENTRIQUES

<u>3.1</u> La réciproque de 2.5 peut s'énoncer comme suit. Soit $\mathcal{R} = \{x_0, \dots, x_n\}$ un repère affine de X.

<u>Proposition : a) Tout point $x \in X$ est le barycentre des x_i affectés de masses λ_i bien déterminées telles que $\sum \lambda_i = 1$.</u>

<u>b) Tout vecteur $\vec{v} \in \vec{X}$ est le barycentre vectoriel des x_i affectés de masses λ_i bien déterminées telles que $\sum \lambda_i = 0$.</u>

<u>Les λ_i s'appellent coordonnées barycentriques de x (ou de $\vec{v}$).</u>

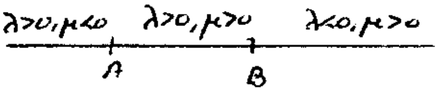
Preuve : Par 1.7 on peut décomposer x et $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{R}$ de $\hat{X}$:

$x = \sum \lambda_i x_i$ et $\vec{v} = \sum \mu_i x_i$ (les λ_i et μ_i sont bien déterminés)

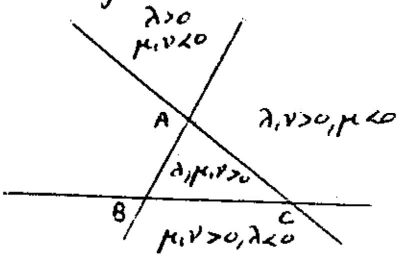
Comme $x \in X$, on a $1 = \alpha(x) = \sum \lambda_i \alpha(x_i) = \sum \lambda_i$ par 1.4.

Comme $\vec{v} \in \vec{X}$, on a $0 = \alpha(\vec{v}) = \sum \mu_i \alpha(x_i) = \sum \mu_i$ par 1.4. ■

3.2 Supposons $k = \mathbb{R}$. Soit $\langle A,B\rangle$ une droite, et (λ,μ) les coordonnées barycentriques d'un point $M \in \langle AB\rangle$ dans le repère $\{A,B\}$. On appelle segment $[A,B]$ l'ensemble des points $M \in \langle AB\rangle$ tels que $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$.



Les signes (ou la nullité) de λ et μ partagent $\langle AB\rangle$ en cinq régions.



De même un plan de repère affine $\{A,B,C\}$ est divisé en 19 régions par les signes (ou la nullité) des coordonnées barycentriques (λ,μ,ν) d'un point dans le repère $\{A,B,C\}$. La région où $\lambda,\mu,\nu>0$ s'appelle l'intérieur du triangle. Etc...

3.3 Soit $f : X \to Y$ affine, $\mathcal{R} = \{x_0, \dots, x_n\}$ et $\mathcal{S} = \{y_0, \dots, y_p\}$ des repères affines de X et Y. Il existe une et une seule matrice $M = (\alpha_{ij})$ à $p+1$ lignes et $n+1$ colonnes telle que

$$\forall j = 0, \dots, n \qquad f(x_j) = \sum_{i=0}^{p} \alpha_{ij} y_i \quad, \text{avec } \sum_{i=0}^{p} \alpha_{ij} = 1$$

(cf. la preuve de 2.8). Si $x = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j x_j$, avec $\sum_{j=0}^{n} \lambda_j = 1$, on a :

$$f(x) = \hat{f}(x) = \sum \lambda_j \hat{f}(x_j) = \sum_{i,j} \lambda_j \alpha_{ij} y_i = \sum_i \mu_i y_i \quad \text{avec}$$

$$\boxed{\mu_i = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij}\lambda_j \quad (i = 0, \dots, p)} \quad \text{, soit : } \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \vdots \\ \mu_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \cdots & \alpha_{0n} \\ \vdots & M & \vdots \\ \alpha_{p0} & \cdots & \alpha_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

où chaque colonne écrite est de somme 1.

3.4 Les coordonnées barycentriques ont sur les cartésiennes l'avantage que tous les points du repère affine y jouent des rôles symétriques. Le lien entre les deux systèmes de coordonnées est très simple :

Si $x = x_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{x_0 x_i} = \sum_{i=0}^{n} \mu_i x_i$, on a (en développant dans $\hat{X}$) :

$$\boxed{\mu_1 = \lambda_1, \dots, \mu_n = \lambda_n, \text{ et } \mu_0 = 1 - \mu_1 - \dots - \mu_n}$$

Si $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{x_0 x_i} = \sum_{i=0}^{n} \mu_i x_i$, on a de même

$$\boxed{\mu_1 = \lambda_1, \dots, \mu_n = \lambda_n, \text{ et } \mu_0 = -\mu_1 - \dots - \mu_n}$$

§4 POINTS A L'INFINI

4.1 Étant donné un espace vectoriel V sur k de dimension $n+1$, on note PV l'ensemble (non vide) des droites vectorielles de V, et on l'appelle espace projectif de dimension n. Il est muni de la surjection canonique

$$V-\{0\} \xrightarrow{\pi} PV \quad (\vec{v} \longmapsto k.\vec{v})$$

Un sous-espace projectif de dimension p de PV sera une partie de la forme $\pi(W-\{0\})$ où W est un sous-espace vectoriel de V de dimension $p+1$. Il s'identifie évidemment à PW. On parlera ainsi de droites projectives, d'hyperplans projectifs d'un espace projectif, etc. Les points de PV sont ses sous-espaces projectifs de dimension 0.

4.2 Dans un espace projectif de dimension n, le complémentaire d'un hyperplan projectif est muni d'une structure naturelle d'espace affine de dimension n.

Preuve: Soit PW un hyperplan projectif de PV, et $X = PV - PW$. X est l'ensemble des droites de V supplémentaires de W dans V, et c'est donc naturellement un espace affine associé à $\mathcal{L}(V/_W, W)$; par II.1.5. ∎

D'autre part, soit $\alpha \in V^* - \{0\}$ telle que $\operatorname{Ker}\alpha = W$, et $X' = \alpha^{-1}(1) \subset V$. On a vu en II.1.6 que X' est un espace affine associé à W. Mais X' s'identifie à X par $x \longmapsto k.x$ et W à $\mathcal{L}(V/_W, W)$, puisque $V/_W$ est de dimension 1, par l'application qui au vecteur w associe l'application linéaire $f : V/_W \to W$ telle que $f(X') = w$. Il est clair que les structures d'espaces affines de X et X' s'échangent dans ces identifications, puisque les deux actions résultent de la somme dans V.

4.3 On appelle complété projectif $\overline{X}$ de l'espace affine X l'espace projectif $\overline{X} = P\hat{X}$. On vient d'identifier X à l'espace affine $P\hat{X} - P\vec{X} = \overline{X} - X_\infty$, où $X_\infty = P\vec{X}$ est l'ensemble des directions de droites de X. On appelle X_∞ l'hyperplan à l'infini de l'espace affine X, et ses éléments les points à l'infini de X.

4.4 Si Y est un sous-espace affine de X, l'injection $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ se prolonge en une injection linéaire $\hat{Y} \overset{\hat{i}}{\hookrightarrow} \hat{X}$, qui passe au quotient:

$$P\hat{Y} = \overline{Y} \overset{\bar{i}}{\hookrightarrow} P\hat{X} = \overline{X}$$

$\bar{i}$ est encore injective, prolonge i, et $\bar{i}(Y_\infty) \subset X_\infty$ puisque $\vec{Y} \subset \vec{X}$.
De plus $\bar{i}$ identifie Y_∞ à un sous-espace projectif de X_∞.
Ainsi si D est une droite de X, D_∞ $(= \vec{D})$ est un point de X_∞, etc...

<u>4.5</u> Si Y et Z sont des sous-espaces affines de X, on a les équivalences:

$$Y /\!/ Z \Leftrightarrow \vec{Y} = \vec{Z} \Leftrightarrow Y_\infty = Z_\infty$$

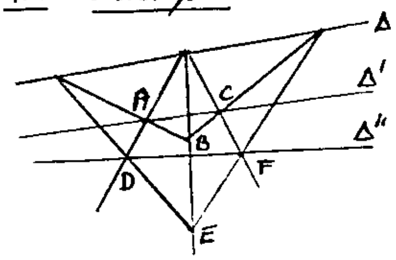
$$Y \triangleleft Z \Leftrightarrow \vec{Y} \subset \vec{Z} \Leftrightarrow Y_\infty \subset Z_\infty$$

« Deux droites sont parallèles si et seulement si (leurs complétées projectives) elles se coupent à l'infini », <u>etc</u> . .

<u>4.6</u> Soient W_1 et W_2 deux hyperplans d'un espace vectoriel V, $X_1 = PV - PW_1$, $X_2 = PV - PW_2$. $\overline{X_1}$ et $\overline{X_2}$ s'identifient tous deux à PV, donc l'un à l'autre, et cette identification conserve l'alignement des points et la "concourance" des droites.

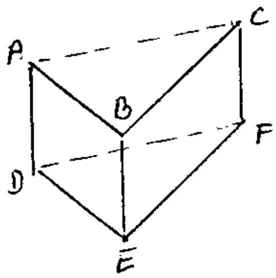
Quand, pour résoudre une question de géométrie affine dans X_1 on utilise, non la structure affine de X_1, mais celle de X_2 plongé dans $\overline{X_2} = \overline{X_1}$, on dit qu'on fait un <u>changement d'hyperplan à l'infini.</u> Pour W_2, on peut choisir $\widehat{H}$, où H est n'importe quel hyperplan affine de X_1. On illustre ici cette méthode sur un exemple:

<u>4.7</u> <u>Exemple</u>:



Dans le plan affine X, on considère la figure ci-contre.
Les trois droites $\Delta, \Delta', \Delta''$ sont-elles concourantes?

On <u>"envoie Δ à l'infini"</u> (c'est-à-dire qu'on raisonne en utilisant la structure affine de $\overline{X} - \overline{\Delta}$). Par cette structure, grâce à 4.5, on a $\langle AD\rangle /\!/ \langle BE\rangle /\!/ \langle CF\rangle$, $\langle AB\rangle /\!/ \langle DE\rangle$, et $\langle BC\rangle /\!/ \langle EF\rangle$.



Utilisant 2.6, il vient $\langle AC\rangle /\!/ \langle DF\rangle$.

Et de nouveau par 4.5, cela signifie que $\overline{\langle AC\rangle}$ et $\overline{\langle DF\rangle}$ se coupent sur $\overline{\Delta}$, autrement dit $\overline{\Delta}, \overline{\Delta'}, \overline{\Delta''}$ sont concourantes (dans $\overline{X}$). Par suite $\Delta, \Delta', \Delta''$ sont concourantes (dans X), ou parallèles.

§5 EXERCICES

(Sur les barycentres)

5.1 ($\dim X = 3$) $\{A, B, C, D\}$ repère affine ; P, Q, R, S, T, U les milieux de AB, BC, CA, DC, DA, DB respectivement ; $A' = DQ \cap CU$, $B' = AS \cap DR$, $C' = BT \cap AU$, $D' = CP \cap BR$.
Montrer que sont concourantes les sept droites $AA', BB', CC', DD', PS, QT, RU$.

5.2 ($\dim X = n$) quels que soient les quatre points A, B, C, D et I, J, K, L les milieux de AB, BC, CD, DA, le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme.

5.3 a) Soit $\{A, B, C\}$ un repère affine du plan. On note (x, y, z) les coordonnées barycentriques d'un point P. Quelles sont celles de $A' = PA \cap BC$, de $C_1 = AB \cap (P + \langle \overrightarrow{BC} \rangle)$,
b) (x_j, y_j, z_j) coordonnées de P_j ($j = 1, 2, 3$). Calculer celles de $\langle BP_1 \rangle \cap \langle CP_2 \rangle$
Montrer que P_1, P_2, P_3 alignés $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$
Retrouver ainsi le théorème de Ménélaüs
c) $\langle AP_1 \rangle, \langle BP_2 \rangle, \langle CP_3 \rangle$ concourantes ou parallèles $\Leftrightarrow y_1 z_2 x_3 = z_1 x_2 y_3$
(Retrouver ainsi le theorème de Céva). Coordonnées alors du point de concours ?

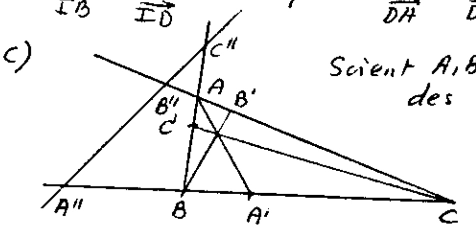
5.4 Quatre points A, B, C, M du plan trois à trois non alignés. On pose
$A' = \langle BC \rangle \cap \langle MA \rangle$, $B' = \langle CA \rangle \cap \langle MB \rangle$, $C' = \langle AB \rangle \cap \langle MC \rangle$, $A'' = \frac{B' + C'}{2}$, $B'' = \frac{C' + A'}{2}$, $C'' = \frac{A' + B'}{2}$.
Montrer que $\langle AA'' \rangle$, $\langle BB'' \rangle$ et $\langle CC'' \rangle$ sont concourantes.

5.5 Dans un plan affine on se donne A_1, A_2, A_3, M trois à trois non alignés, puis A'_1, A'_2, A'_3 tels que $\langle A'_i A'_j \rangle \parallel \langle MA_k \rangle$ ($\{i, j, k\}$ permutation de $\{1, 2, 3\}$).
Montrer que les parallèles à $\langle A_i A_j \rangle$ passant par A'_k sont concourantes.

5.6 a) Donner une preuve du théorème de Newton par un calcul en coordonnées barycentriques
b) Généraliser l'énoncé du 5.3.b) en : « le rang de la matrice des coordonnées barycentriques de p points d'un espace affine de dimension n vaut 1 plus la dimension du sous-espace affine qu'ils engendrent » (quels que soient n et p)
Retrouver ainsi en particulier l'énoncé de l'exercice III.6.7

5.7 a) Toute transformation affine d'ordre fini admet un point fixe
b) Citer des exemples de transformations affines sans point fixe ; sans droite fixe
c) Décrire les orbites sous $GA(X)$ des couples de droites de X ; des triplets, ...

5.8 : a) Étant donnés deux points A et B distincts, il existe deux (et deux seulement) points de la droite $\langle AB \rangle$ qui « divisent le segment $[AB]$ dans un rapport donné $\lambda \in k^*$ » c'est-à-dire tels que $\frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}} = \pm \lambda$ (on suppose carac $k \neq 2$ et $\lambda \neq \pm 1$). Soient C et D ces deux points. On dit que (A, B, C, D) est une « division harmonique »
Montrer qu'alors (B, A, C, D), (A, B, D, C) et (C, D, A, B) le sont aussi.
b) Soit (A, B, C, D) une division harmonique, et I le milieu de (A, B). Montrer que
$\frac{\overrightarrow{IC}}{\overrightarrow{IB}} = \frac{\overrightarrow{IB}}{\overrightarrow{ID}}$ et que $\frac{\overrightarrow{DI}}{\overrightarrow{DA}} = \frac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{DC}}$
c)



Soient A, B, C trois points non alignés et $(AA''BC)$ $(BB''CA)$ $(CC''AB)$ des divisions harmoniques sur ses cotés. Montrer que $\langle AA' \rangle \langle BB' \rangle \langle CC' \rangle$ concourent ou sont parallèles si et seulement si $A''B''C''$ sont alignés.
(Utiliser Menelaüs et Ceva, ou un calcul barycentrique)

5.9 La convexité est une notion affine ($k = \mathbb{R}$). Le segment (A,B), noté $[A,B]$ est l'ensemble des barycentres de A et B à coefficients ≥ 0, et on dit qu'une partie C d'un espace affine X est convexe si : $\forall A,B \in C$, $[A,B] \subset C$.

a) ϕ, les points, une intersection de convexes sont convexes. Les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles (bornés ou non, fermés ou non).

b) $\forall P \subset X$, il existe un plus petit convexe $\Gamma(P)$ contenant P (on l'appelle l'"enveloppe convexe" de P). On a $P \subset \Gamma(P) \subset \langle P \rangle$

c) $\Gamma(\{A_1, .., A_p\}) = \{M \in X \mid \lambda_1 \overrightarrow{MA_1} + .. + \lambda_p \overrightarrow{MA_p} = 0$ pour des $\lambda_j \geq 0$ non tous nuls$\}$

En particulier $\Gamma(\{A_1, A_2\}) = [A_1 A_2]$. Si $A_1, .. A_p$ sont affinement libres, $\Gamma(\{A_1, .., A_p\})$ s'appelle un simplexe de dimension $p-1$ et $A_1 .. A_p$ sont ses "sommets". Cas $p=3$, $p=4$?

d) $\Gamma(P) = \bigcup_{Q \in \mathcal{F}} \Gamma(Q)$ où $\mathcal{F}$ est la famille des parties finies de P.

(e) A-t-on P ouvert $\Rightarrow \Gamma(P)$ ouvert ? P fermé $\Rightarrow \Gamma(P)$ fermé ? P compact $\Rightarrow \Gamma(P)$ compact ?)

(Changements de structure affine)

5.10 Donner tous les énoncés affines qui se déduisent des théorèmes de Pappus et de Desargues par changement d'hyperplan à l'infini.
(On montrera ainsi en particulier que Pappus $\Rightarrow$ Newton, et Desargues $\Rightarrow$ III.6.12)

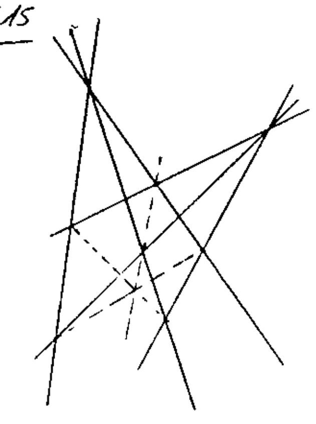
5.11 ($\dim X = 3$) Pour $j = 1,2$ on se donne trois points non alignés A_j, B_j, C_j dans un plan P_j.
On suppose $\vec{P_1} + \vec{P_2} = \vec{X}$, et $\{\alpha\} = \langle A_1 B_1 \rangle \cap \langle A_2 B_2 \rangle$, $\{\beta\} = \langle C_1 A_1 \rangle \cap \langle C_2 A_2 \rangle$, $\{\gamma\} = \langle B_1 C_1 \rangle \cap \langle B_2 C_2 \rangle$.
Montrer que α, β, γ sont alignés et que $\langle A_1 A_2 \rangle, \langle B_1 B_2 \rangle, \langle C_1 C_2 \rangle$ sont concourantes ou parallèles. Réciproque ?

5.12 ABC non alignés, $A' \in \langle BC \rangle$, C_1 et $C_2 \in \langle AB \rangle$
$B_1 = \langle C_1 A' \rangle \cap \langle AC \rangle$, $B_2 = \langle C_2 A' \rangle \cap \langle AC \rangle$, $C'_1 = \langle C_1 C \rangle \cap \langle AA' \rangle$, $C'_2 = \langle C_2 C \rangle \cap \langle AA' \rangle$
(On suppose qu'ils existent. Montrer que $\langle AB \rangle$, $\langle C'_1 B_2 \rangle$ et $\langle C'_2 B_1 \rangle$ sont concourantes.

5.13 ABC non alignés, $A' \in \langle BC \rangle$, $B' \in \langle CA \rangle$, $C' \in \langle AB \rangle$. Une droite issue de A coupe $\langle A'B' \rangle$ en A_1 et $\langle A'C' \rangle$ en A_2. Lieu de $M = \langle A_1 B \rangle \cap \langle A_2 C \rangle$?

5.14 ABC non alignés, $A' \in \langle BC \rangle$, D_1 et D_2 droites issues de A', et $M \in \langle AA' \rangle$
On pose $M_1 = \langle BM \rangle \cap D_1$, $M_2 = \langle CM \rangle \cap D_2$. Montrer que les droites $\langle M_1 M_2 \rangle$ passent par un point fixe "en général" (quand M varie) - Cas particulier ?

5.15



Dans la situation ci-contre, les trois droites indiquées en pointillé sont concourantes : le démontrer de plusieurs façons différentes en se ramenant à divers énoncés déjà connus

Indications pour les exercices :

5.1 : $G = \frac{A+B+C+D}{4} = \frac{A}{4} + \frac{3A'}{4} = \cdots = \frac{P+S}{2} = \cdots$

5.2 : $\frac{I+K}{2} = \frac{J+L}{2} = \frac{A+B+C+D}{4}$

5.3 : a) $A' = \left(0, \frac{y}{y+z}, \frac{z}{y+z}\right)$ $C_1 = (x, y+z, 0)$

b) Utiliser $P = \lambda A + \mu B \iff \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = -\frac{\lambda}{\mu}$ $\quad BP_1 \cap CP_2 = \left(\frac{z_1 x_2}{u}, \frac{z_1 y_2}{u}, \frac{z_1 z_2}{u}\right)$ avec $u = z_1x_2 + z_1y_2 + z_1x_2$

5.4 On peut, pour conclure, utiliser Céva.

5.5 On peut calculer en cartésiennes dans le repère $\{A_1, A_2, A_3\}$

On peut aussi se ramener au cas $A_3' = A_1$ et $A_2' = M$ par des dilatations qui ne changent ni l'hypothèse ni la conclusion, puis appliquer Pappus aux triplets $M'A_1A_2$ et $A_1'MA_3$, avec $M' =$ (la // en A_2' à A_1A_3) $\cap$ (la // en A_3' à A_1A_2).

5.12 : devient un cas particulier de Pappus si l'on envoie AB_1C_2 à l'infini

5.13 : le lieu de M est $\langle B'C' \rangle$. C'est en fait l'énoncé de Pappus projectif.

On peut se ramener à Pappus affine en envoyant $\langle BC \rangle$ à l'infini.

5.14 : devient trivial si l'on envoie $\langle BA'C \rangle$ à l'infini.

On peut se contenter d'envoyer A à l'infini (cf. III.6.5)

5.15 : Si l'on envoie à l'infini les deux points de concours (par exemple !) on est ramené à III.6.6, qui lui-même se ramène à Newton...