CHAPITRE III - GÉOMÉTRIE AFFINE

§1 SOUS-ESPACES AFFINES

1.1 Définition : Soit X un espace affine associé à V, et W un sous-espace vectoriel de V. On appelle sous-espace affine de X de direction W une orbite de l'action de W dans X. Autrement dit

$Y \subset X$ est un sous-espace affine de direction $W \iff \exists x_0 \in X,\ Y = x_0 + W$

On note souvent $\vec{Y}$ la direction W de Y, et $\dim Y = \dim \vec{Y}$.

X est un sous-espace affine de direction $\vec{X}$. Tout point de X est un sous-espace affine de direction $\{0\}$.

L'inclusion $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ est alors l'application affine associée à l'inclusion $\vec{Y} \overset{\vec{i}}{\hookrightarrow} \vec{X}$, et réciproquement la donnée d'une injection affine $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ permet d'identifier Y à son image $i(Y)$ qui est un sous-espace affine de direction $\vec{i}(\vec{Y})$.

1.2 Proposition : Sont équivalents : a) Y est un sous-espace affine de X
b) $\exists x_0 \in Y$, $\Phi_{x_0}(Y)$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{X}$
c) $\forall x \in Y$, $\Phi_x(Y)$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{X}$, et $Y \neq \emptyset$.

Preuve : a) $\Rightarrow$ c) car Y est la $\vec{Y}$-orbite de chacun de ses points
c) $\Rightarrow$ b) trivialement, et b) $\Rightarrow$ a) car $\Phi_{x_0}(Y) = W$ signifie $Y = x_0 + W$ ∎

1.3 Les sous-espaces affines de X de dimension 0 sont ses points $\{x\} = x + \{0\}$
Ceux de dimension 1 sont appelés droites, ceux de dimension 2 plans, ceux de codimension 1 hyperplans.
Certains auteurs posent que $\emptyset$ est un sous-espace affine de dimension -1.

1.4 Si $(Y_i)_{i\in I}$ sont des sous-espaces affines de X et $Y = \bigcap_{i\in I} Y_i$ est non vide, Y est un sous-espace affine de X, et $\vec{Y} = \bigcap_{i\in I} \vec{Y_i}$

Preuve : Soit $y_0 \in Y$. Alors, pour tout $i \in I$, $y_0 \in Y_i$, d'où $Y_i = y_0 + \vec{Y_i}$, et $\bigcap Y_i = y_0 + \bigcap \vec{Y_i}$ ∎

D'ailleurs $Y_1 \subset Y_2 \Rightarrow \vec{Y_1} \subset \vec{Y_2}$, mais la réciproque est fausse (cf. les points).

1.5 Soit S une partie non vide de X. Le plus petit sous-espace affine de X contenant S est l'intersection de tous (par 1.4) et s'appelle le sous-espace affine engendré par S. On le notera ici $\langle S \rangle$

Exemples : $\langle x_0 \rangle = \{x_0\}$; si $x_1 \neq x_2$, $\langle x_1, x_2 \rangle$ est une droite (c'est $x_1 + k.\langle \overrightarrow{x_1x_2} \rangle$)
Une réunion de sous-espaces affines n'est pas en général un sous-espace affine.
$\langle x_1, x_2, x_3 \rangle = x_1 + k.\overrightarrow{x_1x_2} + k\overrightarrow{x_1x_3}$ peut être un point, une droite ou un plan...

1.6 $\{x_0, \dots, x_p\}$ sont dits affinement libres (ou indépendants) dans X si $\dim \langle x_0, \dots, x_p \rangle = p$. Comme $\langle x_0, \dots, x_p \rangle = x_0 + k\overrightarrow{x_0x_1} + \dots + k.\overrightarrow{x_0x_p}$, cela équivaut à dire que $\{\overrightarrow{x_0x_1},\dots,\overrightarrow{x_0x_p}\}$ est une base de la direction du sous-espace affine engendré. Mais l'ordre des points ne joue aucun rôle dans la définition. D'ailleurs $\{x_0,\dots,x_p\}$ sont affinement libres si et seulement si tout sous-espace affine qui les contient est de dimension $\geq p$, et dans ce cas, il n'y en a qu'un de dimension p. En particulier:

- par deux points distincts passe une et une seule droite
- par trois points non alignés passe un et un seul plan, etc.

<u>1.7 Théorème. Soient Y et Z deux sous-espaces affines de X. Alors</u>

a) $\forall y_0\in Y, z_0\in Z$, $\quad \langle Y\cup Z\rangle = y_0 + k.\overrightarrow{y_0z_0} + \vec{Y}+\vec{Z}$

b) $\{\forall y_0\in Y, z_0\in Z \quad (\vec{Y}+\vec{Z})\cap k.\overrightarrow{y_0z_0}=\{0\}\} \Leftarrow Y\cap Z=\emptyset$

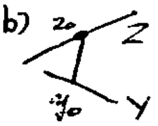
et $\Rightarrow$ <u>sauf si $\dim Y=\dim Z=0$</u>

c) <u>Supposons X de dimension finie. Alors:</u>

— ou bien $Y\cap Z\neq\emptyset$ <u>et</u> $\dim\langle Y\cup Z\rangle=\dim Y+\dim Z-\dim(Y\cap Z)$

— <u>ou bien</u> $Y\cap Z=\emptyset$ <u>et</u> $\dim\langle Y\cup Z\rangle=\dim Y+\dim Z+1-\dim(\vec{Y}\cap\vec{Z})$

Preuve: a) $H=y_0+k.\overrightarrow{y_0z_0}+\vec{Y}+\vec{Z}$ est un sous-espace affine qui contient $y_0+\vec{Y}=Y$ et $y_0+\overrightarrow{y_0z_0}+\vec{Z}=Z$. Réciproquement tout sous-espace affine K contenant Y et Z contient y_0, z_0, et $\vec{K}$ contient $\vec{Y}$, $\vec{Z}$ et $\overrightarrow{y_0z_0}$. Donc $K\supset H$. ■

b) 

Si $(\vec{Y}+\vec{Z})\cap k.\overrightarrow{y_0z_0}\neq\{0\}$, alors $\overrightarrow{y_0z_0}\in\vec{Y}+\vec{Z}$. Donc $\overrightarrow{y_0z_0}=\vec{v}+\vec{w}$, avec $\vec{v}\in\vec{Y}$, $\vec{w}\in\vec{Z}$. Posons $y_1=y_0+\vec{v}\in Y$ et $z_1=z_0-\vec{w}\in Z$. On a $y_1=y_0+\vec{v}=y_0+\overrightarrow{y_0z_0}-\vec{w}=z_0-\vec{w}=z_1$, donc $y_1=z_1\in Y\cap Z$.

Réciproquement, si $x\in Y\cap Z$, pour tous $y_0\in Y$, $z_0\in Z$, on a $\overrightarrow{xy_0}\in\vec{Y}$, $\overrightarrow{xz_0}\in\vec{Z}$, donc $\overrightarrow{y_0z_0}=\overrightarrow{xz_0}-\overrightarrow{xy_0}\in\vec{Y}+\vec{Z}$, et on peut toujours choisir y_0 et z_0 distincts, sauf peut-être si Y et Z sont des points.

c) Si $Y\cap Z\ni x_0$, $Y=x_0+\vec{Y}$, $Z=x_0+\vec{Z}$, $Y\cap Z=x_0+\vec{Y}\cap\vec{Z}$, et $\langle Y\cup Z\rangle=x_0+\vec{Y}+\vec{Z}$ par a). La relation entre dimensions se déduit donc de la même relation par les directions. Si par contre $Y\cap Z=\emptyset$, on a $\overrightarrow{\langle Y\cup Z\rangle}=k\overrightarrow{y_0z_0}+\vec{Y}+\vec{Z}$ par le a), et par le b) $k\overrightarrow{y_0z_0}\cap(\vec{Y}+\vec{Z})=\{0\}$, d'où $\dim\overrightarrow{\langle Y\cup Z\rangle}=\dim(\vec{Y}+\vec{Z})+1$, et le reste s'en déduit. ■

<u>1.8 Corollaire: Soient Y et Z deux sous-espaces affines. Dès que $\vec{X}=\vec{Y}+\vec{Z}$, $Y\cap Z$ est non vide. Si $\vec{X}=\vec{Y}\oplus\vec{Z}$, $Y\cap Z$ est un point.</u>

Preuve: si $\dim X=0$, tout le monde est un point: $\{0\}=X=Y=Z=Y\cap Z$. Sinon $\dim\vec{Y}$ (ou $\dim\vec{Z}$) >0, et Y (ou Z) n'est pas un point. Si on avait $Y\cap Z=\emptyset$, par 1.7.b) on aurait: $\vec{X}=\vec{Y}+\vec{Z}\not\ni\overrightarrow{y_0z_0}\neq 0$ ce qui est absurde. Donc $Y\cap Z$ contient un point x_0, et s'il en contient un autre x_1, $\overrightarrow{x_0x_1}\in\vec{Y}\cap\vec{Z}$. ■

<u>1.9</u> L'image d'un sous-espace affine par une application affine est un sous-espace affine: si $Y=y_0+\vec{Y}$, $f(Y)=f(y_0)+\vec{f}(\vec{Y})$.
De plus $\dim f(Y)=\dim\vec{f}(\vec{Y})\leq\dim\vec{Y}=\dim Y$.
Il en va de même de l'image réciproque, si elle n'est pas vide.

§2 PARALLÉLISME

2.1 Définitions : On dit que Y et Y' sont parallèles (et on note $Y /\!/ Y'$) si $\vec{Y} = \vec{Y'}$. On dit que Y est faiblement parallèle à Y' (et on note $Y \lhd\!/ Y'$) si $\vec{Y} \subset \vec{Y'}$.
Le parallélisme est une relation d'équivalence, le parallélisme faible une relation de pré-ordre.

2.2 Proposition : a) $Y \lhd\!/ Y'$ et $Y' \lhd\!/ Y \Leftrightarrow Y /\!/ Y'$
b) $Y \lhd\!/ Y'$ et $Y \cap Y' \neq \phi \Leftrightarrow Y \subset Y'$

Preuve : a) $\vec{Y} \subset \vec{Y'}$ et $\vec{Y'} \subset \vec{Y} \Leftrightarrow \vec{Y} = \vec{Y'}$
b) Si $y_0 \in Y \cap Y'$, $Y = y_0 + \vec{Y} \subset y_0 + \vec{Y'} = Y'$. La réciproque est claire. ■

2.3 Corollaire : X espace affine, Y sous-espace, Z hyperplan de X. Alors $Y \lhd\!/ Z \Leftrightarrow Y \cap Z = \phi$ ou $Y \subset Z$

Preuve : $\Rightarrow$ est le 2.2.b.
$\Leftarrow$ Si $Y \subset Z$ on a bien $Y \lhd\!/ Z$. Sinon $Y \cap Z = \phi$, et dans ce cas, par 1.7.b), $\forall y_0 \in Y$, $z_0 \in Z$, $(\vec{Y} + \vec{Z}) \cap k\,\overrightarrow{y_0z_0} = \{0\}$. Comme $y_0 \neq z_0$, $\overrightarrow{y_0z_0} \neq 0$, donc $\overrightarrow{y_0z_0} \notin \vec{Y} + \vec{Z}$, et $\vec{Y} + \vec{Z} \neq \vec{X}$, d'où $\vec{Y} \subset \vec{Z}$ puisque $\vec{Z}$ est un hyperplan. ■

2.4 Corollaire : Y et Z hyperplans. Alors $Y \cap Z = \phi \Leftrightarrow Y /\!/ Z$ et $Y \neq Z$

Preuve : Clair par 2.3. ■

2.5 Corollaire ("Postulat d'Euclide") Soit Y un hyperplan de X, et $x_0 \in X - Y$. Par x_0 passe un et un seul hyperplan ne rencontrant pas Y. Il lui est parallèle.

Preuve : S'il en passe un, il est parallèle à Y par 2.4. Donc c'est $x_0 + \vec{Y}$, et celui-ci fait l'affaire, toujours par 2.4. ■

2.6 Remarque : Si $Y \subset X$ et $x_0 \in X$, on sait toujours parler du sous-espace parallèle à Y passant par x_0 : c'est $x_0 + \vec{Y}$. Il ne rencontre jamais Y, sauf si $x_0 \in Y$, et alors c'est Y (si $(x_0 + \vec{Y}) \cap Y \ni y_0$, $Y = y_0 + \vec{Y} = x_0 + \overrightarrow{x_0y_0} + \vec{Y} = x_0 + \vec{Y}$, et $x_0 \in Y = x_0 + \vec{Y}$).

2.7 Proposition : a) Si $f \in Dil(X)$ et Y est un sous-espace de X, $f(Y)$ est parallèle à Y.
b) Réciproquement si $f \in GA(X)$ et si pour toute droite D de X, $f(D)$ est parallèle à D, alors f est une dilatation.

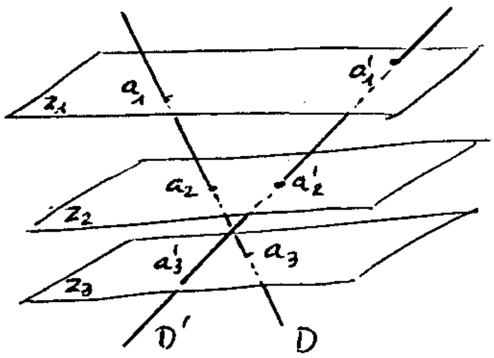
Preuve : a) Si $Y = y_0 + \vec{Y}$, $f(Y) = f(y_0) + \lambda\vec{Y} = f(y_0) + \vec{Y}$.
b) Pour tout $\vec{v} \in \vec{X}$, $\vec{f}(\vec{v}) = \overrightarrow{f(x)f(x+\vec{v})}$ est colinéaire à $\vec{v}$ par hypothèse.
Si $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont indépendants et si $\vec{f}(\vec{v_1}) = \lambda_1\vec{v_1}$, $\vec{f}(\vec{v_2}) = \lambda_2\vec{v_2}$, $\vec{f}(\vec{v_1}+\vec{v_2}) = \lambda(\vec{v_1}+\vec{v_2})$, on a $\lambda(\vec{v_1}+\vec{v_2}) = \vec{f}(\vec{v_1}) + \vec{f}(\vec{v_2}) = \lambda_1\vec{v_1} + \lambda_2\vec{v_2}$, d'où $\lambda_1 = \lambda = \lambda_2$. Donc $\vec{f}$ est une homothétie. ■

On remarquera que si $\dim X = 1$, la condition du b) est vide.
Dans ce cas $GA(X) = Dil(X)$, ce qui est clair puisque $GL(\vec{X}) \simeq k^*$.

§3 LES "GRANDS" THÉORÊMES

3.1 Soient Z_1, Z_2, Z_3 trois hyperplans distincts et parallèles de direction $\vec{Z}$, d'un espace affine X, et D et D' deux droites non faiblement parallèles aux hyperplans. Alors, par 1.8, on a $D \cap Z_j = \{a_j\}$ et $D' \cap Z_j = \{a'_j\}$ $(j = 1,2,3)$.

Le théorème de Thalès dit qu'alors: $\boxed{\dfrac{\overrightarrow{a_1a_3}}{\overrightarrow{a_1a_2}} = \dfrac{\overrightarrow{a'_1a'_3}}{\overrightarrow{a'_1a'_2}}}$



Preuve: $X/\vec{Z}$ est un espace affine associé à $\vec{X}/\vec{Z}$ (cf. II.1.4), et la surjection canonique π

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\Phi_{x_0}"'] & X/\vec{Z} \arrow[d, "\Phi_{\xi_0}"] \\ \vec{X} \arrow[r, "\vec{\pi}"] & \vec{X}/\vec{Z} \end{tikzcd}$$

est affine associée à la surjection canonique $\vec{\pi}$.

Dans le diagramme commutatif suivant, on a

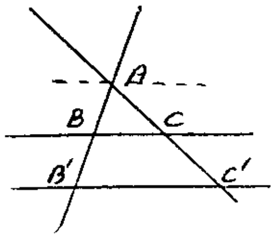
$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\Phi_{x_0}"'] & X \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & X/\vec{Z} \arrow[d] \\ \vec{D} \arrow[r, hook, "\vec{i}"] & \vec{X} \arrow[r, "\vec{\pi}"] & \vec{X}/\vec{Z} \end{tikzcd}$$

$(x_0 \in D)$

$\overrightarrow{\pi \circ i} = \vec{\pi} \circ \vec{i}$, qui est bijective puisque $\vec{X} = \vec{D} \oplus \vec{Z}$. Or $\vec{\pi} \circ \vec{i}$ envoie $\overrightarrow{a_1a_2}$ sur $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ et $\overrightarrow{a_1a_3}$ sur $\overrightarrow{Z_1Z_3}$. Donc si $\overrightarrow{a_1a_3} = \lambda\, \overrightarrow{a_1a_2}$, on a $\overrightarrow{Z_1Z_3} = \lambda\, \overrightarrow{Z_1Z_2}$.

Comme on peut remplacer D par D' dans ces considérations, le théorème s'en déduit. ∎

3.2 Corollaire: Considérons dans un plan affine la figure suivante.



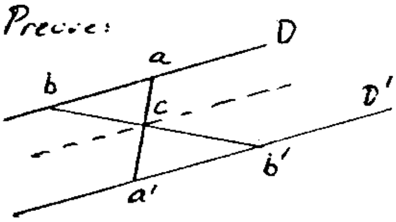
Alors: a) $\dfrac{\overrightarrow{AB'}}{\overrightarrow{AB}} = \dfrac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{AC}} \Leftrightarrow \langle B,C\rangle \,//\, \langle B',C'\rangle \Rightarrow \dfrac{\overrightarrow{AB'}}{\overrightarrow{AB}} = \dfrac{\overrightarrow{B'C'}}{\overrightarrow{BC}}$

b) L'égalité de deux des trois rapports $\dfrac{\overrightarrow{AB'}}{\overrightarrow{AB}}, \dfrac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{AC}}, \dfrac{\overrightarrow{B'C'}}{\overrightarrow{BC}}$ implique l'égalité du troisième.

Preuve: a) $\Leftarrow$ est un cas particulier du théorème de Thalès
$\Rightarrow$ $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{AC'} = \lambda(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \lambda\, \overrightarrow{BC}$. Le reste est clair. ∎

3.3 Proposition: Soient D et D' deux droites parallèles et distinctes, a et b des points distincts de D, a' et b' des points distincts de D'. Il existe une et une seule dilatation $f \in Dil(X)$ telle que $f(a) = a'$ et $f(b) = b'$. C'est une translation si $\langle aa'\rangle \cap \langle bb'\rangle = \emptyset$, sinon une homothétie de centre $\langle aa'\rangle \cap \langle bb'\rangle$.

Preuve:



Comme D et D' sont parallèles et distinctes, on a $D \cap D' = \emptyset$, et par 1.7 c), $\langle D \cup D'\rangle = P$ est un plan. Comme $\langle aa'\rangle$ et $\langle bb'\rangle$ sont des hyperplans de P distincts, leur intersection est vide ou réduite à un point par 1.8 et 2.4.

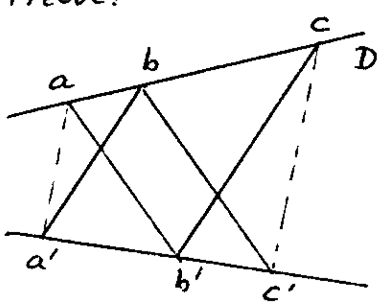
- Si $\langle aa'\rangle \cap \langle bb'\rangle = \emptyset$, $\langle aa'\rangle \,//\, \langle bb'\rangle$ par 2.4. Il existe donc λ et μ tels que $\vec{bb'} = \lambda\vec{aa'}$ et $\vec{a'b'} = \mu\vec{ab}$. D'où $\vec{ab} + \lambda\vec{aa'} = \vec{ab'} = \vec{aa'} + \mu\vec{ab}$. Comme $\vec{aa'}$ et $\vec{ab}$ sont libres, on en déduit $\lambda = \mu = 1$. En particulier $\{a, a', b', b\}$ est un parallélogramme, et si $\vec{aa'} = \vec{bb'} = \vec{v}$, on a $t_{\vec{v}}(a) = a'$, $t_{\vec{v}}(b) = b'$. Si $f \in Dil(X)$ envoie a sur a' et b sur b', $\vec{f}(\vec{ab}) = \vec{a'b'} = \vec{ab}$, donc f est de rapport 1, et c'est une translation par II.2.8.b), évidemment de vecteur $\vec{aa'} = \vec{v}$.

- Si $\langle aa'\rangle \cap \langle bb'\rangle = \{c\}$, posons $\vec{ca'} = \lambda\vec{ca}$. On a $\lambda \neq 1$, et l'homothétie $h_{c,\lambda}$ envoie a sur a' et aussi b sur b' par le théorème de Thalès 3.2. De plus par 3.2 on a aussi $\vec{a'b'} = \lambda\vec{ab}$. Si donc $f \in Dil(X)$ envoie a sur a' et b sur b', f est de rapport $\lambda \neq 1$, et par II.2.8.c), c'est une homothétie de rapport λ. Son centre est aligné avec a et a' d'une part, b et b' d'autre part ; c'est donc c et $f = h_{c,\lambda}$. ■

<u>3.4 Théorème de Pappus (version affine)</u> : <u>Soient D et D' deux droites distinctes d'un espace affine</u> (dim $\langle D \cup D'\rangle = 2$ résultera des hypothèses). <u>Soient a, b, c trois points de D ; a', b', c' trois points de D', tous distincts. Alors</u>

$$\left.\begin{array}{l}\langle ab'\rangle \,//\, \langle bc'\rangle \\ \langle a'b\rangle \,//\, \langle b'c\rangle\end{array}\right\} \Longrightarrow \langle aa'\rangle \,//\, \langle cc'\rangle$$

Preuve :



C'est une conséquence de 3.3 :
$\langle ab'\rangle // \langle bc'\rangle \Rightarrow \exists!\, f \in Dil(X)$, $f(a) = b$, $f(b') = c'$
$\langle a'b\rangle // \langle b'c\rangle \Rightarrow \exists!\, g \in Dil(X)$, $g(b) = c$, $g(a') = b'$

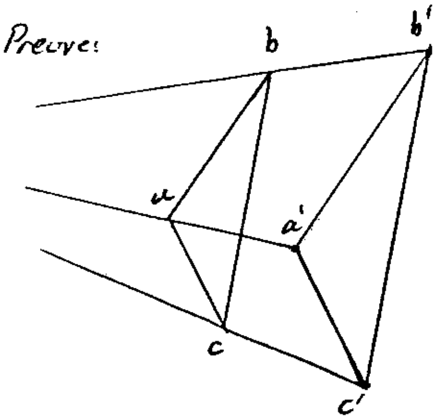
Alors $f \circ g(a') = c'$ et $g \circ f(a) = c$. De plus
- ou bien $D \cap D' = \emptyset$ et f et g sont des translations
- ou bien $D \cap D' = \{d\}$ et f et g sont des homothéties de centre d. Dans les deux cas $f\circ g = g \circ f = h \in Dil(X)$,

et $h(a) = c$, $h(a') = c'$. Par 2.7.a, $\langle aa'\rangle // \langle cc'\rangle$. ■

<u>3.5 Théorème de Desargues (affine)</u> : <u>Soient a, b, c, a', b', c' six points distincts d'un espace affine</u>, tels que dim $\langle abc\rangle$ = dim $\langle a'b'c'\rangle = 2$.

<u>Alors</u> :
$$\left.\begin{array}{l}\langle a,b\rangle \,//\, \langle a',b'\rangle \\ \langle b,c\rangle \,//\, \langle b',c'\rangle \\ \langle c,a\rangle \,//\, \langle c',a'\rangle\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\underline{\text{ou bien}}\ \ \langle aa'\rangle \,//\, \langle bb'\rangle \,//\, \langle cc'\rangle \\ \underline{\text{ou bien}}\ \ \langle aa'\rangle \cap \langle bb'\rangle \cap \langle cc'\rangle\ \underline{\text{est un point}}.\end{array}\right.$$

Preuve :



Les cas particuliers où certaines des droites de l'hypothèse sont confondues se traitent ou s'éliminent facilement. On les suppose donc toutes distinctes.

Par 3.3 il existe une seule dilatation f telle que $f(a) = a'$ et $f(b) = b'$.

Par 2.7 a) on a $\langle ac\rangle \parallel \langle a'f(c)\rangle$ et $\langle bc\rangle \parallel \langle b'f(c)\rangle$.
Par suite $\langle a'c'\rangle = \langle a'f(c)\rangle$ et $\langle b'c'\rangle = \langle b'f(c)\rangle$, et dans le plan $\langle a'b'c'\rangle$, on a $c' = \langle a'f(c)\rangle \cap \langle b'f(c)\rangle = f(c)$. Mais toujours par 3.3 :

- ou bien $\langle aa'\rangle \cap \langle bb'\rangle = \emptyset$, alors f est une translation $t_{\vec{v}}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{aa'} = \overrightarrow{bb'} = \overrightarrow{cc'}$, d'où $\langle aa'\rangle \parallel \langle bb'\rangle \parallel \langle cc'\rangle$
- ou bien $\langle aa'\rangle \cap \langle cc'\rangle = \{\omega\}$, alors f est une homothétie de centre $\omega = \langle aa'\rangle \cap \langle bb'\rangle \cap \langle cc'\rangle$. ■

§4 REPÈRES AFFINES, COORDONNÉES CARTÉSIENNES

4.1 Définition Soit X un espace affine de dimension n sur le corps k.
On appelle repère affine de X la donnée de $n+1$ points $\{x_0, \dots, x_n\} = \mathcal{R}$ affinement libres de X (autrement dit tels que $\{\overrightarrow{x_0x_1}, \dots, \overrightarrow{x_0x_n}\}$ soit une base de $\vec{X}$. x_0 s'appelle l'origine du repère. La donnée de $\mathcal{R}$ définit une bijection affine

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{\sim} & \vec{X} & \xleftarrow{\sim} & k^n \\ x & \longleftarrow & \vec{v} & \longleftarrow & (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \end{array}$$

pour $x = x_0 + \vec{v}$, et $\vec{v} = \lambda_1 \overrightarrow{x_0x_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{x_0x_n}$.
On appelle $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les coordonnées cartésiennes de x dans le repère $\mathcal{R}$.

4.2 Il est clair sur la définition que si $\{x_0, \dots, x_n\}$ est un repère affine, $\{x_{\sigma(0)}, \dots, x_{\sigma(n)}\}$ aussi quel que soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$.

4.3 Soit $f : X \to Y$ affine, $\mathcal{R} = \{x_0, \dots, x_n\}$ et $\mathcal{S} = \{y_0, \dots, y_p\}$ des repères affines de X et Y, et $\vec{f} : \vec{X} \to \vec{Y}$ la direction de f. Soit $M = (\alpha_{ij})$ la matrice à p lignes et n colonnes de $\vec{f}$ dans les bases $\{\overrightarrow{x_0x_1}, \dots, \overrightarrow{x_0x_n}\}$ et $\{\overrightarrow{y_0y_1}, \dots, \overrightarrow{y_0y_p}\}$ de $\vec{X}$ et $\vec{Y}$. Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les coordonnées cartésiennes d'un point $x \in X$ dans le repère $\mathcal{R}$, et $(\mu_1, \dots, \mu_p)$ celles de $y = f(x)$, et $(a_1, \dots, a_p)$ celles de $f(x_0)$, dans le repère $\mathcal{S}$. On a :

$$f(x) = f(x_0) + \vec{f}(\overrightarrow{x_0x}) \quad , \text{ soit } \quad \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

autrement dit :

$$\boxed{\mu_i = a_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\lambda_j \quad (1 \le i \le p)}$$

4.4 Ceci peut s'écrire matriciellement de l'une des façons suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & M & \vdots \\ a_p & \alpha_{p1} & \cdots & \alpha_{pn} \end{pmatrix}}_{\mathcal{M}} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{ou bien} \quad \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} & a_1 \\ \vdots & M & \vdots & \vdots \\ \alpha_{p1} & \cdots & \alpha_{pn} & a_p \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

et permet un calcul matriciel "affine"; par exemple $\mathcal{M}_{f\circ g} = \mathcal{M}_f \mathcal{M}_g$ ...
En particulier le groupe $GA(X)$ est isomorphe au groupe des matrices $\mathcal{M}$ de la forme ci-dessus, avec $M \in GL(k^n)$. On peut retrouver ainsi les résultats du II. §3.

4.5 Changer de repère affine dans X revient à composer deux isomorphismes de k^n sur X du type 4.1. Les nouvelles coordonnées s'exprimeront donc en fonction des anciennes par une formule du type 4.3, avec $n=p$ et (α_{ij}) inversible.

4.6 Lemme : Si W est un sous-espace d'un espace vectoriel V de dimension n, $\dim W = p$ si et seulement s'il existe $n-p$ formes linéaires indépendantes $f_{p+1}, \dots, f_n \in V^*$ telles que : $\vec{v} \in W \Leftrightarrow f_j(\vec{v}) = 0$ pour $j = p+1, \dots, n$.

Preuve : Compléter une base de W et considérer la base duale. ■

4.7 Proposition : Un sous-espace affine de dimension p d'un espace affine de dimension n est défini dans un repère affine par $n-p$ équations linéaires indépendantes (ou un système d'équations de rang $n-p$). En particulier un hyperplan est défini par une équation linéaire.

Preuve : Si $Y = y_0 + \vec{Y}$, par 4.6 on peut trouver $f_{p+1}, \dots, f_n \in \vec{X}^*$ indépendantes telles que $\vec{v} \in \vec{Y} \Leftrightarrow f_j(\vec{v}) = 0$ $(j = p+1, \dots, n)$
Si $x = x_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{x_0 x_i}$, posons $f_j(\overrightarrow{x_0 y_0}) = b_j$ $(j = p+1, \dots, n)$. Alors

$$x \in Y \Leftrightarrow \overrightarrow{y_0 x} = \overrightarrow{x_0 x} - \overrightarrow{x_0 y_0} \in \vec{Y} \Leftrightarrow \forall j = p+1, \dots, n \quad f_j(\overrightarrow{x_0 x}) = b_j .$$

Si $f_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} (\overrightarrow{x_0 x_i})^*$ il vient :

$$x \in Y \Leftrightarrow \boxed{\forall j = p+1, \dots, n \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} \lambda_i = b_j} \quad ■$$

§5 LE THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA GÉOMÉTRIE AFFINE

5.1 Si X est un espace affine et $f \in GA(X)$, pour toute droite D de X, $f(D)$ est encore une droite par 1.9. Autrement dit les transformations affines respectent l'"alignement". La réciproque est "presque" vraie, et c'est au fond la justification a posteriori du lourd appareillage de la géométrie affine. L'énoncé précis de la réciproque constitue le "théorème fondamental de la géométrie affine" et fait l'objet de ce paragraphe.
Avant de le donner, remarquons les trois types de contre-exemples qu'il faut éviter :

5.2 1) Si $\dim X=1$, toute bijection de X respecte l'alignement, et n'est pas pour autant affine ($x\mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$)

2) Si $k=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, deux points distincts constituent une droite, et de nouveau toute bijection de X respecte l'alignement. On peut en construire de non-affines dès que $\dim X\geqslant 3$.

3) Si $k=\mathbb{C}$, $X=\mathbb{C}^2$ et $f(z_1,z_2)=(\bar{z}_1,\bar{z}_2)$, la droite d'équation $uz_1+vz_2=w$ est envoyée par f sur celle d'équation $\bar{u}z_1+\bar{v}z_2=\bar{w}$. Or f n'est pas affine, sinon il existerait des scalaires $\alpha,\beta,\gamma,\delta,a,b$ tels que

$$\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}\qquad \begin{cases}\bar{z}_1=\alpha z_1+\beta z_2+a\\ \bar{z}_2=\gamma z_1+\delta z_2+b\end{cases}$$

Pour $z_1=z_2=0$, il vient $a=b=0$. Pour $z_1=1, z_2=0$, il vient $\alpha=1, \gamma=0$, et par $z_2=0, z_1=1$, $\beta=0, \delta=1$. D'où l'absurdité : $\forall z_1,z_2$, $z_1=\bar{z}_1$, $z_2=\bar{z}_2$.
Il est aisé de généraliser cet exemple à $X=k^2$, où k possède un automorphisme non trivial (ici $z\mapsto\bar{z}$).

5.3 Ceci appelle les définitions :

- Si V et W sont deux espaces vectoriels sur k, une application $u:V\to W$ est dite <u>semi-linéaire</u> s'il existe $\sigma\in\mathrm{Aut}\,k$ tel que

$$\forall\lambda,\mu\in k,\ \vec{v},\vec{v}'\in V\qquad u(\lambda\vec{v}+\mu\vec{v}')=\sigma(\lambda)u(\vec{v})+\sigma(\mu)u(\vec{v}')$$

- Si X et Y sont deux espaces affines sur k, une application $f:X\to Y$ est dite <u>semi-affine</u> s'il existe une application semi-linéaire $\vec{f}:\vec{X}\to\vec{Y}$ telle que : $\forall x\in X, \vec{v}\in\vec{X}\qquad f(x+\vec{v})=f(x)+\vec{f}(\vec{v})$.

5.4 <u>Exercices</u> - Les ensembles $\widetilde{GL}(V)$ et $\widetilde{GA}(X)$ des bijections semi-linéaires de V (resp. semi-affines de X) sont des groupes pour la composition.

- L'automorphisme σ de k associé à $u\in\widetilde{GL}(V)$ ou à $f\in\widetilde{GA}(X)$ par leurs définitions est unique.

- On a des suites exactes évidentes :

$$(*)\longrightarrow GL(V)\longrightarrow\widetilde{GL}(V)\longrightarrow\mathrm{Aut}\,k\longrightarrow(*)$$
$$(*)\longrightarrow GA(X)\longrightarrow\widetilde{GA}(X)\longrightarrow\mathrm{Aut}\,k\longrightarrow(*)$$

que l'on peut "dévisser" en produits semi-directs

$$\widetilde{GL}(V)\simeq GL(V)\underset{\sigma}{\times}\mathrm{Aut}\,k\quad\text{et}\quad\widetilde{GA}(X)\simeq GA(X)\underset{\tau}{\times}\mathrm{Aut}\,k$$

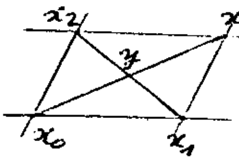
- De même $\widetilde{GA}(X)\simeq\vec{X}\underset{\rho}{\times}\widetilde{GL}(\vec{X})$ et le diagramme suivant est entièrement exact et commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & (0) \arrow[d] & (0) \arrow[d] & & \\
(0) \arrow[r] & \vec{X} \arrow[r, "id"] \arrow[d] & \vec{X} \arrow[r] \arrow[d] & (0) \arrow[d] & \\
(0) \arrow[r] & GA(X) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \widetilde{GA}(X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Aut}\,k \arrow[r] \arrow[d, "id"] & (0) \\
(0) \arrow[r] & GL(\vec{X}) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \widetilde{GL}(\vec{X}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Aut}\,k \arrow[r] \arrow[d] & (0) \\
 & (0) & (0) & (0) &
\end{tikzcd}$$

5.5 Théorème fondamental : Soit X un espace affine sur k. On suppose carac $k \neq 2$ et $\dim X > 1$. Alors une bijection de X conserve l'alignement si et seulement si elle est semi-affine.

5.6 Lemme : Y est un sous-espace affine de X si et seulement si $\forall x,y \in Y \quad \langle x,y \rangle \subset Y$ (On suppose $Y \neq \emptyset$ et carac $k \neq 2$)

Preuve : Soit $x_0 \in Y$ et $W = \{\overrightarrow{x_0 x} \in \vec{X} \mid x \in Y\}$



- Si $\vec{v} \in W$ et $\lambda \in k$, $x_0 + \lambda\vec{v} \in \langle x_0, x_0+\vec{v} \rangle \subset Y$, donc $\lambda\vec{v} \in W$
- Si $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in W$, posons $x_1 = x_0 + \vec{v_1}$, $x_2 = x_0 + \vec{v_2}$.

On a $x_1 \in Y$ et $x_2 \in Y$, donc $\langle x_1, x_2 \rangle \in Y$, donc $y = \frac{x_1+x_2}{2} \in Y$ (cf. IV.2.6), et $x_0 \in Y$, d'où $\langle x_0, y \rangle \subset Y$

Donc $x_3 = x_0 + 2\overrightarrow{x_0 y} = x_0 + \vec{v_1} + \vec{v_2} \in Y$, et $\vec{v_1} + \vec{v_2} \in W$.

Par suite W est un sous-espace vectoriel de $\vec{X}$, et $Y = x_0 + W$. ∎

5.7 Lemme : L'image d'un sous-espace affine de dimension p par une bijection de X qui conserve l'alignement, est un sous-espace affine de dimension p.

Preuve : Si $f : X \to X$ conserve l'alignement, et $P \subset X$, on a grace à 5.6
$$f(\langle P \rangle) = \langle f(P) \rangle$$
En particulier si Y est un sous-espace affine de dimension p, et si $\{x_0, \dots, x_p\}$ est un repère affine de Y complété en un repère affine $\{x_0, \dots, x_n\}$ de X, on a $f(Y) = \langle f(x_0), \dots, f(x_p) \rangle$ et $f(X) = X = \langle f(x_0), \dots, f(x_n) \rangle$. Les points $\{f(x_0), \dots, f(x_n)\}$ sont donc affinement libres, et par suite $\{f(x_0), \dots, f(x_p)\}$ aussi. (On peut modifier la preuve si $\dim X = \infty$) ∎

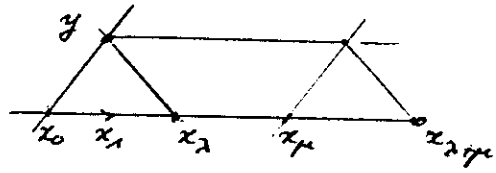
5.8 Lemme Soit $f : X \to X$ une bijection qui conserve l'alignement. Alors f transforme deux droites parallèles en deux droites parallèles.

Preuve : On peut supposer $\dim X \geq 2$. Si D et D' sont deux droites parallèles, $\langle D \cup D' \rangle = P$ est un plan. Donc $f(D)$ et $f(D')$ sont deux droites de $f(P)$ qui est aussi un plan par 5.7. Comme $D \cap D' = \emptyset$, $f(D) \cap f(D') = \emptyset$, et $f(D)$ et $f(D')$ sont parallèles par 2.4. ∎

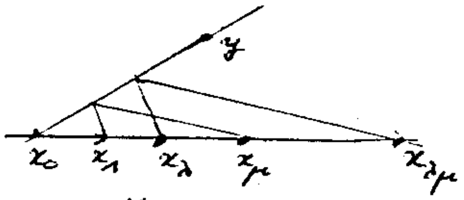
5.9 Lemme Soit $f : X \to X$ une bijection conservant l'alignement, x_0 et x_1 deux points distincts de X. Pour $\lambda \in k$, posons
$$\sigma(\lambda) = \frac{\overrightarrow{f(x_0)f(x_\lambda)}}{\overrightarrow{f(x_0)f(x_1)}}, \text{ où } x_\lambda = x_0 + \lambda \cdot \overrightarrow{x_0 x_1}$$
Alors l'application $\sigma : k \to k$ est un automorphisme du corps k. ($\dim X \geq 2$)

Preuve : $\sigma(\lambda)$ est la coordonnée dans le repère $\{f(x_0), f(x_1)\}$ de $f(\langle x_0 x_1 \rangle)$ du point de coordonnée λ dans le repère $\{x_0, x_1\}$ de $\langle x_0 x_1 \rangle$. Il est donc clair que σ est bijective, puisque f l'est. Le fait que $\sigma(\lambda+\mu) = \sigma(\lambda) + \sigma(\mu)$ et $\sigma(\lambda\mu) = \sigma(\lambda)\sigma(\mu)$ résulte alors du fait que, dès que $\dim X \geq 2$, on peut construire $x_{\lambda+\mu}$ et $x_{\lambda\mu}$ à partir de x_λ et x_μ uniquement au moyen de droites parallèles, et de l'application de 5.8 :

construction de $x_{\lambda+\mu}$:



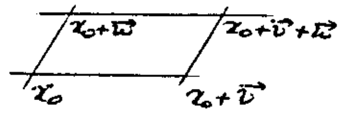
construction de $x_{\lambda\mu}$



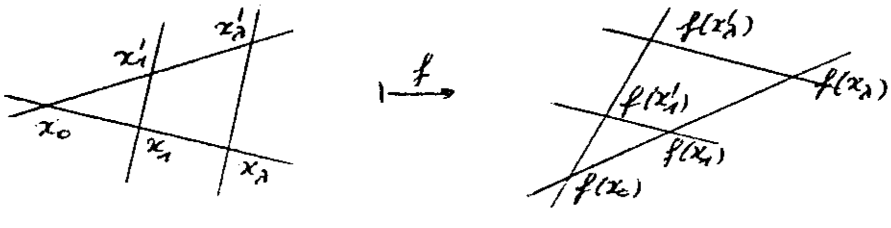
(il est essentiel de disposer d'un point $y \notin \langle x_0, x_1 \rangle$). ∎

<u>5.10</u> <u>Preuve du théorème fondamental</u> : Soit $f : X \to X$ conservant l'alignement, et $x_0 \in X$. Il suffit de montrer que $u = \vec{f} = \Phi_{f(x_0)} \circ f \circ \Phi_{x_0}^{-1} : \vec{X} \to \vec{X}$ est semi-linéaire.

- Or u est additive : $u(\vec{v}+\vec{w}) = u(\vec{v}) + u(\vec{w})$:
  - si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont liés, cela résulte de la construction de $x_{\lambda+\mu}$ ci-dessus.
  - si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont libres, c'est clair :



- Enfin il existe $\alpha \in \operatorname{Aut} k$ tel que
$$\forall \vec{v} \in \vec{X},\ \lambda \in k \qquad u(\lambda \vec{v}) = \alpha(\lambda) u(\vec{v}),$$
car on a trouvé un tel α au 5.9 qui marche pour tous les vecteurs d'une droite vectorielle de $\vec{X}$, et il suffit de démontrer que cet α ne dépend pas de la droite choisie. Or avec des notations évidentes, et au vu du 5.8 et du théorème de Thalès, il vient :



$$\forall \lambda \qquad \alpha'(\lambda) = \frac{\overrightarrow{f(x_0)f(x'_\lambda)}}{\overrightarrow{f(x_0)f(x'_1)}} = \frac{\overrightarrow{f(x_0)f(x_\lambda)}}{\overrightarrow{f(x_0)f(x_1)}} = \alpha(\lambda).$$ ∎

<u>5.11</u> <u>Proposition : $\mathbb{R}$ n'a pas d'automorphisme non trivial</u>
<u>Les seuls automorphismes continus, ou conservant les réels, de $\mathbb{C}$ sont $z \mapsto z$ et $z \mapsto \bar{z}$.</u>

Preuve : Soit $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un automorphisme. Alors $\alpha(0) = 0$, $\alpha(1) = 1$, et $\alpha(p) = \alpha(1 + \cdots + 1) = p\alpha(1) = p$, et $\alpha(-p) + \alpha(p) = \alpha(0) \Rightarrow \alpha(-p) = -p$. Donc $\alpha|_{\mathbb{Z}} = id$.

Comme $\alpha(\frac{p}{q}) \cdot q = \alpha(\frac{p}{q})\alpha(q) = \alpha(p) = p$, il vient $\alpha|_{\mathbb{Q}} = id$.

Enfin si $x \geq 0$, $\exists y \in \mathbb{R}$, $x = y^2$, et $\alpha(x) = \alpha(y^2) = (\alpha(y))^2 \geq 0$

Donc α est croissant. $x \le y \Rightarrow y-x \ge 0 \Rightarrow \alpha(y)-\alpha(x) \ge 0 \Rightarrow \alpha(x) \le \alpha(y)$.
Si $x \in \mathbb{R}$, on peut trouver deux suites (x_n) et (x'_n) de rationnels tendant vers x l'une en croissant l'autre en décroissant. Alors
$\forall n \quad x_n \le x \le x'_n \Rightarrow \forall n \quad x_n = \alpha(x_n) \le \alpha(x) \le \alpha(x'_n) = x'_n$
d'où $\alpha(x) = x$ et $\alpha = id_{\mathbb{R}}$.

Soit $\beta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un automorphisme. On montre comme ci-dessus que $\beta|_{\mathbb{Q}} = id$.
Si β est continu on a donc $\beta|_{\mathbb{R}} = id$. Si $\beta(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, $\beta|_{\mathbb{R}}$ est croissant comme on l'a montré ci-dessus, et on a encore $\beta|_{\mathbb{R}} = id$.
Comme $-1 = \beta(-1) = \beta(i^2) = (\beta(i))^2$, on a $\beta(i) = \pm i$, et si $z = a+ib$ $(a,b \in \mathbb{R})$, $\beta(z) = \beta(a) + \beta(i)\beta(b) = a \pm ib = z$ ou $\bar{z}$. ∎

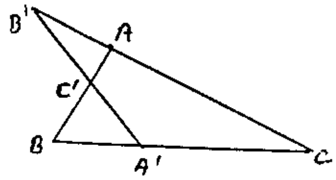
5.12 Il existe aussi un "théorème fondamental de la géométrie projective" (cf. chap. V) dont l'énoncé est analogue (l'hypothèse carac $k \ne 2$ n'est plus nécessaire, une droite projective ayant toujours au moins trois points).

§6 EXERCICES

Utiliser la proposition 3.3 et la table de multiplication 2.9 du groupe des dilatations pour démontrer les énoncés classiques suivants (dans le plan affine)

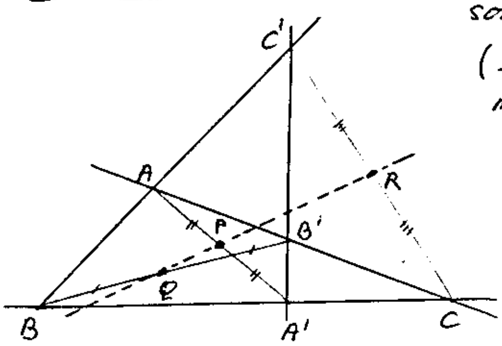
6.1 Théorème de Thalès : Redémontrer l'énoncé 3.2

6.2 "Théorème de Menelaüs" : A, B, C trois points non alignés, $A' \in \langle BC \rangle$, $B' \in \langle CA \rangle$, $C' \in \langle AB \rangle$ distincts de A, B, C. Alors :



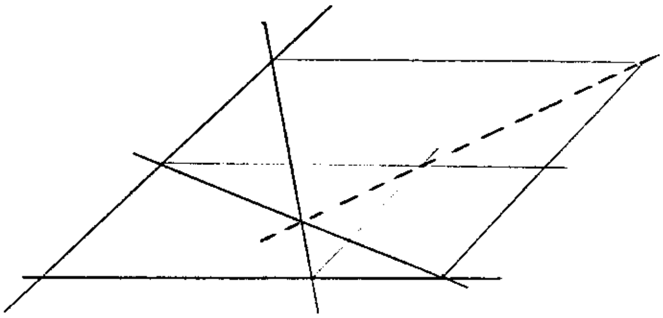
$$\boxed{A', B', C' \text{ alignés} \iff \frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}} \cdot \frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}} = 1}.$$

6.3 a) "Théorème de Newton" : "Les milieux des diagonales d'un quadrilatère complet sont alignés"

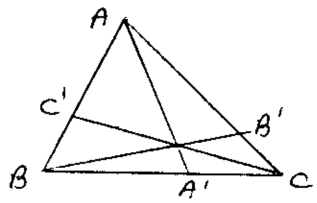


(Introduire les milieux A'', B'', C'' de BC, CA, AB ; montrer que $P \in \langle B''C'' \rangle$, $Q \in \langle C''A'' \rangle$, $R \in \langle A''B'' \rangle$, puis $\frac{\overrightarrow{PC''}}{\overrightarrow{PB''}} = \frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}}$, $\frac{\overrightarrow{QA''}}{\overrightarrow{QC''}} = \frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}}$, $\frac{\overrightarrow{RB''}}{\overrightarrow{RA''}} = \frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}}$, enfin conclure à l'aide de Menelaüs)

b) Conclure à l'alignement noté sur la figure suivante (les droites qui y ont l'air parallèles le sont) (Utiliser Newton)

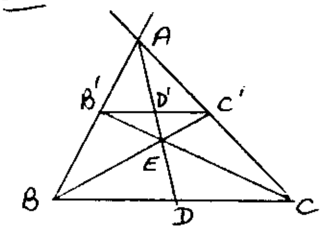


6.4 "Théorème de Céva" Mêmes hypothèses que Ménélaüs. Alors



$$\boxed{\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}} \cdot \frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}} = -1 \iff \begin{cases} \langle AA' \rangle, \langle BB' \rangle, \text{ et } \langle CC' \rangle \text{ sont} \\ \text{concourantes ou parallèles} \end{cases}}$$

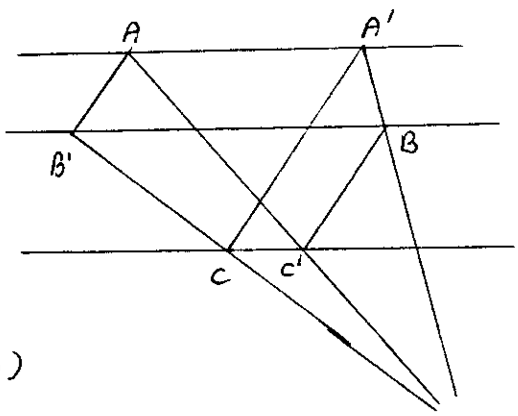
6.5 Dans la situation ci-dessous, si $\langle BC \rangle /\!/ \langle B'C' \rangle$, alors D est le milieu de BC, et D' celui de $B'C'$.



6.6 $\langle AA' \rangle /\!/ \langle BB' \rangle /\!/ \langle CC' \rangle$ et $\langle AB' \rangle /\!/ \langle BC' \rangle /\!/ \langle CA' \rangle$

$\Rightarrow \langle AC' \rangle, \langle CB' \rangle$, et $\langle BA' \rangle$ sont parallèles ou concourantes

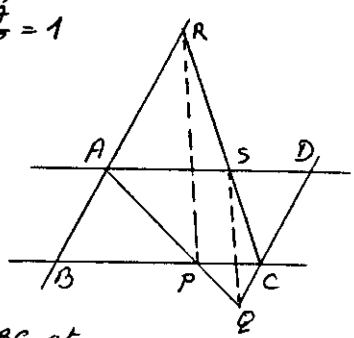
(Reconnaître 6.3.b)



6.7 (Dans l'espace) A, B, C, D affinement libres, $\alpha \in \langle A B \rangle$, $\beta \in \langle B C \rangle$, $\gamma \in \langle C, D \rangle$, $\delta \in \langle D A \rangle$, les grecs distincts des latins

Alors $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ coplanaires $\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{\alpha B}}{\overrightarrow{\alpha A}} \cdot \frac{\overrightarrow{\beta C}}{\overrightarrow{\beta B}} \cdot \frac{\overrightarrow{\gamma D}}{\overrightarrow{\gamma C}} \cdot \frac{\overrightarrow{\delta A}}{\overrightarrow{\delta D}} = 1$

(Imiter 6.2)



6.8 $ABCD$ est un parallélogramme
Une droite issue de A coupe $\langle BC \rangle$ en P et $\langle CD \rangle$ en Q ; une autre issue de C coupe $\langle AB \rangle$ en R et $\langle AD \rangle$ en S. Montrer que $\langle PR \rangle // \langle QS \rangle$

6.9 Une droite Δ coupe les trois cotés d'un triangle ABC, et la parallèle à $\langle BC \rangle$ (resp $\langle CA \rangle$, $\langle AB \rangle$) passant par A (resp. B, C) en A' (resp. B', C'). Soit A'' (resp. B'', C'') le symétrique de A' (resp. B', C') par rapport à A (resp. B, C)
Montrer que A'', B'', C'' sont alignés.

6.10 A, B, C non alignés, et P un autre point. On définit A', B', C' par $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{CB'}$, $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{BA'}$. Montrer que $\langle AA' \rangle$, $\langle BB' \rangle$, $\langle CC' \rangle$ sont concourantes.

6.11 Soient A', B', C' les pieds des médianes d'un triangle ABC, M un autre point, P, Q, R les symétriques de M par rapport à A', B', C'. Montrer que $\langle AP \rangle$, $\langle BQ \rangle$, et $\langle C, R \rangle$ sont concourantes.

6.12 On suppose que A, A', B, B', C, C' sont distincts, que $\langle AA' \rangle // \langle BB' \rangle // \langle CC' \rangle$, et qu'existent $\alpha = \langle BC \rangle \cap \langle B'C' \rangle$, $\beta = \langle CA \rangle \cap \langle C'A' \rangle$, $\gamma = \langle AB \rangle \cap \langle A'B' \rangle$
Montrer que α, β, γ sont alignés. Réciproque?

6.13 Y sous espace affine de X. D_Y l'ensemble des homothéties centrées sur Y et des translations d'un vecteur de $\vec{Y}$. Montrer que D_Y est un sous-groupe de $Dil(X)$ isomorphe à $Dil(Y)$. Quels sont tous ses conjugués dans $Dil(X)$? dans $GA(X)$?

6.14 $A_1, \dots, A_p$ tous distincts ($\dim X = n$), $A_{p+1} \in \langle A_1 A_p \rangle$. Soit H un hyperplan ne rencontrant aucun des A_j et coupant chaque $\langle A_j, A_{j+1} \rangle$ en M_j ($j = 1, \dots, p$). On pose $\lambda_j = \frac{\overrightarrow{M_j A_{j+1}}}{\overrightarrow{M_j A_j}}$. Montrer que $\prod_{j=1}^{p} \lambda_j = 1 \Leftrightarrow A_{p+1} = A_1$

6.15 ($\dim X = 3$) D_1, D_2, D_3 trois droites de directions libres
a) "Construire" la parallèle à D_1 coupant D_2 et D_3
b) Etudier le sous-groupe de $GA(X)$ des transformations qui laissent D_1, D_2 et D_3 globalement invariantes

6.16 Deux droites D et D' concourent en O. Soient A et B deux autres points de l'espace
Etudier le sous-groupe de $GA(X)$ des $f : X \to X$ telles que $f(A) = A$, $f(B) = B$, $f(D) = D'$.

6.17 ($\dim X = 3$) P un plan de X, $O \in X - P$, D et D' deux droites de P,
$Q = \langle D \cup \{0\} \rangle$, $Q' = \langle D' \cup \{0\} \rangle$, $\Delta = Q \cap Q'$. Montrer $\Delta \langle / P \Leftrightarrow D // D'$.

6.18 a) Écrire une équation cartésienne du plan P de $\mathbb{R}^3$ qui passe par $(1,2,3)$ et $(4,5,6)$ et qui est parallèle à la droite passant par $(7,8,9)$ et $(10,11,13)$.
b) Condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une droite parallèle aux trois plans d'équations $a_j x + b_j y + c_j z + d_j = 0$ ($j = 1,2,3$).

6.19 ($\dim X = n$) Combien y-a-t-il de droites passant par un point donné et s'appuyant sur $n-1$ droites données ?

Indications pour les exercices :

6.2 : Composer les homothéties de centre A' (resp. B', resp. C') qui envoient B sur C (resp C sur A, resp. A sur B) et utiliser la table

6.3 b : homothétie de centre B et de rapport 2

6.4 : L'égalité de Céva signifie que $h = h'$, où h est composée d'homothéties de centres A' et A et qui envoient B sur C et C' sur B, tandis que h' est composée d'homothéties semblables à l'échange près de A et B et de A' et B'.

6.5 : Composer des homothéties de centres A et E

6.8 : Si $\langle CRS \rangle \cap \langle APQ \rangle = \{M\}$ composer des homothéties de centre M. Sinon les remplacer par des translations.

6.9 : Utiliser deux fois Menelaüs dans le triangle $\alpha\beta\gamma$ dont les cotés sont parallèles à ceux de ABC et passent par les sommets opposés.

6.10 : ABA'B', ACA'C' et BCB'C' sont des parallélogrammes !

6.11 : De même ABPQ, ..., sont des parallélogrammes.

6.12 : Composer des homothéties de centres α, β, γ.

6.13 : Lire la table de multiplication de $Dil(X)$

6.14 : Projeter toute la figure sur une droite coupant H, parallèlement à H, et appliquer Thalès.

6.15 : a) C'est $(D_2 + \vec{D_1}) \cap (D_3 + \vec{D_1})$

b) Si f est un élément du sous-groupe, écrire la matrice de $\vec{f}$ dans un repère lié aux trois droites.

6.18 a) $x - y + 1 = 0$ b) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

6.19 : Une seule "en général" (cf. III.6.15 a)).