CHAPITRE II - ESPACE AFFINE, GROUPE AFFINE

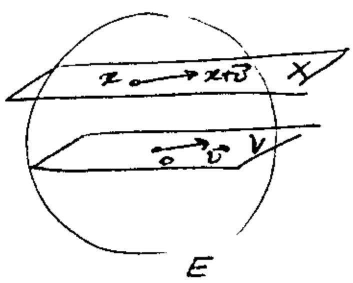
§1 ESPACE AFFINE

1.1 Définition : Soit V un espace vectoriel sur le corps k (commutatif).
On appelle espace affine associé à V tout espace homogène principal X sous le groupe additif de V (en particulier $X \neq \emptyset$). On a donc une action (à droite et à gauche) : $X \times V \longrightarrow X$, $(x, \vec{v}) \longmapsto x + \vec{v}$ telle que
$$\begin{cases} x + \vec{0} = x \\ x + (\vec{v} + \vec{v}') = (x + \vec{v}) + \vec{v}' \end{cases}$$
(on omet les parenthèses)

Cette action est simplement transitive :
$$\forall x, y \in X \quad \exists ! \ \vec{v} = \overrightarrow{xy} \in V, \quad y = x + \overrightarrow{xy}.$$
Les applications $y \longmapsto \overrightarrow{xy}$ et $y \longmapsto \overrightarrow{yx}$ de X dans V sont bijectives pour tout $x \in X$ fixé, et on a la relation de Chasles :
$$\forall x, y, z \in X \qquad \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}, \quad \text{d'où } \overrightarrow{xx} = \vec{0} \text{ et } \overrightarrow{yx} = -\overrightarrow{xy}.$$
La bijection de X $x \longmapsto x + \vec{v}$ s'appelle translation de vecteur $\vec{v}$ (notée $t_{\vec{v}}$), et les translations forment un sous-groupe de $\mathfrak{S}_X$ isomorphe à $(V, +)$.
L'application $\Phi : X \times X \longrightarrow X$, $(x, y) \longmapsto \overrightarrow{xy}$ fait correspondre à un bipoint un vecteur, et la relation d'équivalence dans $X \times X$ "avoir même image par Φ" s'appelle équipollence. Les vecteurs s'identifient donc aux classes d'équipollence de bipoints, qui sont les orbites de l'action de V dans X^2 :
$$\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{x'y'} \iff \exists \ \vec{v} \in V, \ x' = x + \vec{v} \text{ et } y' = y + \vec{v}$$
$$(\text{car } y' = x' + \overrightarrow{xy} = y + \vec{v} \Rightarrow x' = y + \overrightarrow{yx} + \vec{v} = x + \vec{v})$$
Autrement dit, est contenu dans la définition d'un espace affine l'énoncé suivant : $\forall x, y, x', y' \in X \qquad \overrightarrow{xx'} = \overrightarrow{yy'} \iff \overrightarrow{xy} = \overrightarrow{x'y'}$
On dit dans ce cas que $\{x, x', y', y\}$ est un parallélogramme.
Le choix d'un point quelconque $x_0 \in X$ identifie X à V par $x \longmapsto \overrightarrow{x_0 x}$; on dit qu'on a choisi l'origine en x_0.
On appelle dimension de X la dimension de V.
Le reste du paragraphe est une liste d'exemples - exercices, fondamentaux.

1.2 V est un espace affine associé à V, par l'action de V sur V par "translation". Dans ce cas l'application Φ est la "différence" : $\overrightarrow{xy} = y - x$.
En particulier k^n est un espace affine de dimension n.
On parle d'espace affine réel, complexe, ou sur k, selon que $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, ou k.

1.3



Soit V un sous-espace vectoriel de E, et $X \in E/_V$.
V agit sur X par $(x, \vec{v}) \longmapsto x + \vec{v}$ (la somme est dans E),
et X est affine associé à V.

1.4 Soit X un espace affine associé à V, et U un sous-espace vectoriel de V. La restriction à U de l'action de V est une action de U sur X, et l'espace des orbites $X/_U$ est un espace affine associé à $V/_U$

(par $\dot{x} + \dot{\vec{v}} = \widehat{x+\vec{v}}$)

1.5 Soit U un sous-espace d'un espace vectoriel V de dimension finie, et $\mathcal{A} = \{$supplémentaires de U dans $V\}$. Alors $\mathcal{A}$ est un espace affine associé à $\mathcal{L}(V/_U, U)$ par

$$\mathcal{A} \times \mathcal{L}(V/_U, U) \longrightarrow \mathcal{A}$$
$$(W, f) \longmapsto W+f = \{\vec{w} + f(\dot{\vec{w}})\}$$

et $\dim \mathcal{A} = (\dim V - \dim U) \times \dim U$.

Preuve: $W+f = \{\vec{w} + f(\dot{\vec{w}}) \mid \vec{w} \in W\}$ est un sous-espace de V.
Si $\vec{w} + f(\dot{\vec{w}}) \in (W+f) \cap U$, on a $\vec{w} \in U$, d'où $\dot{\vec{w}} = 0$ et $f(\dot{\vec{w}}) = f(0) = 0$.
Par suite $(W+f) \cap U = \{0\}$. De plus si $\vec{v} \in V$, on peut trouver $\vec{w} \in W$ et $\vec{u} \in U$ tels que $\vec{v} = \vec{w} + \vec{u} = \underbrace{\vec{w} + f(\dot{\vec{w}})}_{\in W+f} + \underbrace{\vec{u} - f(\dot{\vec{w}})}_{\in U}$. Donc $W+f \in \mathcal{A}$.

On a clairement $W+0 = W$, et
$(W+f)+g = \{\vec{w} + f(\dot{\vec{w}}) + g(\dot{\overline{\vec{w} + f(\dot{\vec{w}})}})\} = \{\vec{w} + f(\dot{\vec{w}}) + g(\dot{\vec{w}})\} = W + (f+g)$
Enfin si W_1 et $W_2 \in \mathcal{A}$, pour que $f \in \mathcal{L}(V/_U, U)$ soit telle que $W_2 = W_1 + f$, il faut et il suffit que f soit l'application $\pi_2 - \pi_1$, où $\pi_j : V/_U \to W_j$ $(j=1,2)$ est la bijection naturelle. ∎

1.6 Soient U et W des espaces vectoriels, $f : U \to W$ linéaire, et $w_0 \in \operatorname{Im} f$. Posons $X = f^{-1}(w_0)$ et $V = f^{-1}(0)$. Alors X est un espace affine associé à V par $(x, v) \longmapsto x+v$ (la somme est dans U).
C'est cette structure d'espace affine qui est sous-entendue dans la maxime « la solution générale d'une équation linéaire est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation sans second membre ».

§2 APPLICATIONS AFFINES

2.1 Définition : Soit X un espace affine associé à V, Y un espace affine associé à W (V et W espaces vectoriels sur le même corps k). Une application $f : X \to Y$ est dite affine s'il existe $u : V \to W$ linéaire, telle que f soit u-équivariante (cf. I 3.8). Autrement dit si

(*) $\exists u \in \mathcal{L}(V; W)$, $\forall x \in X, \vec{v} \in V$
$$f(x+\vec{v}) = f(x) + u(\vec{v})$$

ou encore si le diagramme est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} V \times X & \xrightarrow{+} & X \\ u \downarrow \ \downarrow f & & \downarrow f \\ W \times Y & \xrightarrow{+} & Y \end{array}$$

L'application u est unique, puisque déterminée par (*).

2.2 Proposition: Il revient au même de dire que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} X\times X \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "f\,\,f"'] & V \arrow[d, "u"] \\ Y\times Y \arrow[r, "\Phi"] & W \end{tikzcd}$$

, autrement dit que: $\forall x,x'\in X$

$$(**) \qquad \overrightarrow{f(x)f(x')} = u(\overrightarrow{xx'})$$

Preuve: Dans (*) posons $x'=x+\vec{v}$. On a $\vec{v}=\overrightarrow{xx'}$, et $u(\vec{v}) = \overrightarrow{f(x)f(x')}$.
Réciproquement si l'on a (**), $f(x+\overrightarrow{xx'}) = f(x') = f(x) + \overrightarrow{f(x)f(x')} = f(x)+u(\overrightarrow{xx'})$. ∎

2.3 Proposition: Avec les notations X, Y, V, W, f ci-dessus, sont équivalents:

a) f est une application affine

b) $\exists x_0\in X \quad \Phi_{f(x_0)}\circ f\circ \Phi_{x_0}^{-1} : V\to W$ est linéaire

c) $\forall x\in X \quad \Phi_{f(x)}\circ f\circ \Phi_{x}^{-1} : V\to W$ est linéaire

Preuve: a) $\Rightarrow$ c) par 2.2, et c) $\Rightarrow$ b) trivialement.
b) $\Rightarrow$ a): Posons $u = \Phi_{f(x_0)}\circ f\circ \Phi_{x_0}^{-1}$. On a $u(\vec{v}) = \Phi_{f(x_0)}\circ f(x_0+\vec{v}) = \overrightarrow{f(x_0)f(x_0+\vec{v})}$,
donc $f(x_0+\vec{v}) = f(x_0)+u(\vec{v})$, où u est linéaire. Mais alors

$$f(x+\vec{v}) = f(x_0+\overrightarrow{x_0x}+\vec{v}) = f(x_0)+u(\overrightarrow{x_0x}+\vec{v}) = f(x_0)+u(\overrightarrow{x_0x})+u(\vec{v})$$
$$= f(x_0+\overrightarrow{x_0x})+u(\vec{v}) = f(x)+u(\vec{v}). \ ∎$$

2.4 Remarques. • On a donc quatre définitions équivalentes d'une application affine. La plus facile à vérifier est évidemment 2.3.b), et dès qu'on l'a fait, on peut se servir des formes "plus fortes" 2.1 ou 2.2.

• L'application linéaire u associée à f se note souvent $\vec{f}$ et s'appelle la direction de f. De même on note souvent $\vec{X}$ l'espace V associé à X, et on l'appelle direction de X.

• Une autre façon d'exprimer la définition d'une application affine est de dire que pour tout $x\in X$ le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\wr\ \Phi_x"'] & Y \arrow[d, "\wr\ \Phi_{f(x)}"] \\ V \arrow[r, "u"] & W \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x' \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & f(x') \arrow[d, mapsto] \\ \overrightarrow{xx'} \arrow[r, mapsto] & u(\overrightarrow{xx'}) \ \text{''}\ \overrightarrow{f(x)f(x')} \end{tikzcd}$$

2.5 Proposition. La composée de deux applications affines est affine, et $\overrightarrow{f\circ g} = \vec{f}\circ\vec{g}$. Une application affine f est injective, surjective, bijective si et seulement si $\vec{f}$ l'est, et $\overrightarrow{f^{-1}} = (\vec{f})^{-1}$.

Preuve: Ce sont des conséquences de la dernière remarque 2.4. ∎

2.6 Proposition: Les applications affines $X\to X$ associées à $id_{\vec{X}}$ sont les translations

Preuve:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Phi_{x_0}"'] & X \arrow[d, "\Phi_{f(x_0)}"] \\ \vec{X} \arrow[r, "id"] & \vec{X} \end{tikzcd}$$

Posons $\overrightarrow{x_0f(x_0)} = \vec{v}$. Si $f(x) = f(x_0)+\overrightarrow{x_0x}$, on a
$\overrightarrow{xf(x)} = \overrightarrow{xx_0} + \overrightarrow{x_0f(x_0)} + \overrightarrow{f(x_0)f(x)} = \overrightarrow{xx_0} + \overrightarrow{x_0f(x_0)} + \overrightarrow{x_0x} = \vec{v}$.
Réciproquement, si $f = t_{\vec{v}}$

$$t_{\vec{v}}(x) = x+\vec{v} = x_0+\overrightarrow{x_0x}+\vec{v} = t_{\vec{v}}(x_0)+id(\overrightarrow{x_0x}). \ ∎$$

2.7 On appelle dilatation de X toute application affine $f : X \to X$ telle que $\vec{f} = \lambda\, id_{\vec{X}}$ (avec $\lambda \in k^*$). On appelle λ le rapport de la dilatation f.

On appelle homothétie (affine) de centre x_0 et de rapport λ, et l'on note $h_{x_0,\lambda} : X \longrightarrow X$ l'application $x \longmapsto h_{x_0,\lambda}(x) = x_0 + \lambda \overrightarrow{x_0x}$.

2.8 Proposition: a) L'ensemble $Dil(X)$ des dilatations de X est un groupe (pour $\circ$)
b) Les dilatations de rapport 1 sont les translations
c) Les dilatations de rapport $\lambda \neq 1$ sont les homothéties de rapport λ, et n'ont qu'un seul point fixe, leur centre.

Preuve: Le a) résulte de 2.5 et le b) de 2.6. Pour le c), considérons $h = h_{x_0,\lambda}$, avec $\lambda \neq 1$. Comme $h(x) = x_0 + \lambda \overrightarrow{x_0x}$, il vient $h(x_0) = x_0$, d'où

$$h(x) = h(x_0) + (\lambda\, id_{\vec{X}})(\overrightarrow{x_0x})$$

Si réciproquement h est une dilatation de rapport $\lambda \neq 1$, choisissons $x_0 \in X$.
Un point x_1 est fixé par h si et seulement si
$x_1 = h(x_1) = h(x_0) + \lambda \overrightarrow{x_0x_1}$, d'où $(1-\lambda)\, \overrightarrow{x_0x_1} = \overrightarrow{x_0h(x_0)}$
Le seul point fixe x_1 est donc défini par $x_1 = x_0 + \frac{1}{1-\lambda} \overrightarrow{x_0h(x_0)}$. De plus:

$$\begin{aligned} h(x) &= x_1 + \overrightarrow{x_1x_0} + \overrightarrow{x_0h(x_0)} + \overrightarrow{h(x_0)h(x)} = x_1 + \overrightarrow{x_1x_0} + (1-\lambda)\overrightarrow{x_0x_1} + \lambda \overrightarrow{x_0x} \\ &= x_1 + \lambda \overrightarrow{x_1x_0} + \lambda \overrightarrow{x_0x} = x_1 + \lambda \overrightarrow{x_1x} = h_{x_1,\lambda}(x). \blacksquare \end{aligned}$$

2.9 On vérifiera la "table de multiplication" du groupe $Dil(X)$:

$$t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{v}'} = t_{\vec{v}+\vec{v}'} \;;\quad t_{\vec{v}} \circ h_{x_0,\lambda} = h_{x_0 + \frac{\vec{v}}{1-\lambda},\lambda} \;;\quad h_{x_0,\lambda} \circ t_{\vec{v}} = h_{x_0 + \frac{\lambda}{1-\lambda}\vec{v},\lambda} \;;$$

$$h_{x_1,\lambda_1} \circ h_{x_2,\lambda_2} = \begin{cases} h_{x_2 + \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1\lambda_2 - 1}\overrightarrow{x_2x_1},\ \lambda_1\lambda_2} & \text{si } \lambda_1\lambda_2 \neq 1 \\ t_{(\lambda_1-1)\overrightarrow{x_1x_2}} & \text{si } \lambda_1\lambda_2 = 1 \end{cases}$$

§3 GROUPE AFFINE

On garde les mêmes notations et on note $\mathcal{A}(X,Y)$ l'ensemble des applications affines de X dans Y. Soit $x_0 \in X$.

3.1 Proposition: L'application
$$\begin{aligned} \mathcal{A}(X,Y) &\longrightarrow \mathcal{L}(\vec{X},\vec{Y}) \times Y \\ f &\longmapsto (\vec{f}, f(x_0)) \end{aligned}$$
est bijective

Preuve: Le couple $(\vec{f}, f(x_0))$ détermine f puisque $f(x) = f(x_0) + \vec{f}(\overrightarrow{x_0x})$.
Réciproquement, si $u \in \mathcal{L}(\vec{X},\vec{Y})$ et $y_0 \in Y$, posons, pour tout $x \in X$

$$f(x) = y_0 + u(\overrightarrow{x_0x}).$$

On a alors $f(x_0) = y_0$, et f est affine associée à u. $\blacksquare$

En particulier $f \longmapsto \vec{f}$ est surjectif de $\mathcal{A}(X,Y)$ sur $\mathcal{L}(\vec{X},\vec{Y})$.

3.2 Proposition: Toute $f \in \mathcal{A}(X,X)$ s'écrit de façon unique $f = t \circ g$ où $g \in \mathcal{A}(X,X)$, $g(x_0) = x_0$, et t est une translation de X.

Preuve: Si $f = t \circ g$, $\vec{f} = \vec{t} \circ \vec{g} = \vec{g}$. Si $g(x_0) = x_0$, par 2.4

$g = \Phi_{x_0}^{-1} \circ \vec{g} \circ \Phi_{x_0} = \Phi_{x_0}^{-1} \circ \vec{f} \circ \Phi_{x_0}$, donc g est déterminée, et t aussi.

De plus $g(x) = x_0 + \vec{f}(\overrightarrow{x_0 x})$, et $f(x) = f(x_0) + \vec{f}(\overrightarrow{x_0 x})$ impliquent $t = t_{\overrightarrow{x_0 f(x_0)}}$. ■

On a de même une décomposition unique $f = g' \circ t'$, avec $g' \in \mathcal{A}(X,X)$, $g'(f(x_0)) = f(x_0)$ et t' est une translation. De plus $t' = t = t_{\overrightarrow{x_0 f(x_0)}}$.

3.3 L'image réciproque de $GL(\vec{X})$ par la surjection naturelle

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(X,X) &\longrightarrow \mathcal{L}(\vec{X},\vec{X}) \\ f &\longmapsto \vec{f} \end{aligned}$$

est le groupe des applications affines inversibles de X dans X (par 2.5). On l'appelle le groupe affine de X, et on le note $GA(X)$. L'application $f \longmapsto \vec{f}$ est un morphisme surjectif de $GA(X)$ sur $GL(\vec{X})$, et son noyau est, d'après 2.6, le sous-groupe $\mathcal{T}$ des translations de X. $\mathcal{T}$ est donc un sous-groupe abélien distingué de $GA(X)$, isomorphe au groupe additif de $\vec{X}$, et on a la "suite exacte"

$$\{0\} \longrightarrow \vec{X} \longrightarrow GA(X) \longrightarrow GL(\vec{X}) \longrightarrow \{0\}$$
$$\vec{v} \longmapsto t_{\vec{v}} \qquad f \longmapsto \vec{f}$$

3.4 Proposition: $GA(X)$ agit fidèlement et transitivement sur X par $(f,x) \longmapsto f(x)$. Les stabilisateurs sont tous isomorphes à $GL(\vec{X})$

Preuve: L'action et sa fidélité sont claires. La transitivité est déjà vraie pour l'action du sous-groupe $\mathcal{T}$. Si $f \in GA(X)_{x_0}$, on a $f = \Phi_{x_0}^{-1} \circ \vec{f} \circ \Phi_{x_0}$, et il s'ensuit que $f \longmapsto \vec{f}$ est un isomorphisme de $GA(X)_{x_0}$ sur $GL(\vec{X})$. ■

Le choix de x_0 définit donc un isomorphisme $GL(\vec{X}) \xrightarrow[\sim]{s_{x_0}} GA(X)_{x_0}$

$$u \longmapsto s_{x_0}(u) = \Phi_{x_0}^{-1} \circ u \circ \Phi_{x_0}$$

qui donne une section de la suite exacte du 3.3.

3.5 En particulier, on a vu au 3.2 que toute $f \in GA(X)$ s'écrit de façon unique $f = t \circ g$ avec $g \in GA(X)_{x_0}$ et $t \in \mathcal{T}$, et plus précisément on a

$$g = \Phi_{x_0}^{-1} \circ \vec{f} \circ \Phi_{x_0} \quad \text{et} \quad t = t_{\overrightarrow{x_0 f(x_0)}}.$$

La bijection

$$\begin{aligned} GA(X) &\xrightarrow{\alpha} \vec{X} \times GL(\vec{X}) \\ f &\longmapsto (\overrightarrow{x_0 f(x_0)}, \vec{f}) \end{aligned}$$

définit sur $\vec{X} \times GL(\vec{X})$ une structure de groupe qui n'est pas le produit direct des groupes $\vec{X}$ et $GL(\vec{X})$:

$$(\vec{v},u)(\vec{v}',u') = \alpha(t_{\vec{v}} \circ g \circ t_{\vec{v}'} \circ g') \qquad \text{avec } g^{(\prime)} = \Phi_{x_0}^{-1} \circ u^{(\prime)} \circ \Phi_{x_0}$$

$$= \alpha(\underbrace{t_{\vec{v}} \circ \underbrace{g \circ t_{\vec{v}'} \circ g^{-1}}_{t' \in \mathcal{C} \text{ qui est distingué}}}_{t'' \in \mathcal{C}} \circ g \circ g') = \alpha(t'' \circ g \circ g') = (t'', u \circ u')$$

Comme on le vérifie aisément :

$\forall f \in GA(X) \ \forall \vec{v} \in V$ $\quad \boxed{f \circ t_{\vec{v}} \circ f^{-1} = t_{\vec{f}(\vec{v})}}$

d'où $t' = t_{\vec{g}(\vec{v}')}$ et $t'' = t_{\vec{v} + \vec{g}(\vec{v}')}$.

La loi de $\vec{X} \times GL(\vec{X})$ définie par α est donc :

$$\boxed{(\vec{v},u)(\vec{v}',u') = (\vec{v} + u(\vec{v}'), u \circ u')}$$

3.6 Étant donnés deux groupes G_1 et G_2 et $\tau : G_2 \to \mathrm{Aut}\, G_1$ un morphisme, on appelle produit semi-direct de G_2 par G_1 au dessus de τ, et on note $G_1 \underset{\tau}{\times} G_2 = G$ l'ensemble $G_1 \times G_2$ muni de la loi de groupe :

$$(g_1, g_2)(g_1', g_2') = (g_1 \, \tau_{g_2}(g_1'), g_2 g_2').$$

L'unité est (e_{G_1}, e_{G_2}), l'inverse de (g_1, g_2) est $(\tau_{g_2^{-1}}(g_1^{-1}), g_2^{-1})$, et on vérifie l'associativité. On a une suite exacte

$$\{\cdot\} \longrightarrow G_1 \xrightarrow{i} G_1 \underset{\tau}{\times} G_2 \xrightarrow{\pi} G_2 \longrightarrow \{\cdot\}$$

$$g_1 \longmapsto (g_1, e)$$

$$(g_1, g_2) \longmapsto g_2$$

et une section $G_2 \xrightarrow{s} G_1 \underset{\tau}{\times} G_2$, telle que $\pi \circ s = id_{G_2}$.

$$g_2 \longmapsto (e, g_2)$$

$G_1 \times \{e\}$ est un sous-groupe distingué de G ; $\{e\} \times G_2$ est un sous-groupe qui n'est distingué que si le produit est direct (τ trivial). Tout élément de G se décompose de manière unique en produit d'un élément de chacun de ces deux sous-groupes, dans l'un ou l'autre sens :

$$(g_1, g_2) = (g_1, e)(e, g_2) = (e, g_2)(\tau_{g_2^{-1}}(g_1), e)$$

Un produit semi direct $G_1 \underset{\tau}{\times} G_2$ n'est commutatif que si G_1 et G_2 le sont et τ est trivial.

Réciproquement, la donnée d'une suite exacte

$$\{\cdot\} \longrightarrow G_1 \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} G_2 \longrightarrow \{\cdot\}$$

de groupes et d'une section (morphisme $s : G_2 \to G$ tel que $\pi \circ s = id_{G_2}$) définit sur G une structure de produit semi-direct $G = G_1 \underset{\tau}{\times} G_2$ (qui coïncide avec la loi de G), où τ est défini par

$i(\tau_{g_2}(g_1)) = s(g_2)i(g_1)s(g_2)^{-1}$, et où l'on identifie $i(G_1)$ à $G_1 \times \{e\}$ et $s(G_2)$ à $\{e\} \times G_2$.

3.7 On peut donc conclure:

Proposition : La donnée de $x_0 \in X$ définit un isomorphisme α de $GA(X)$ sur le produit semi-direct $\vec{X} \times_\tau GL(\vec{X})$, où $\tau : GL(\vec{X}) \to \mathrm{Aut}\,\vec{X}$ est l'injection naturelle, et $\alpha : f \longmapsto (\overrightarrow{x_0 f(x_0)}, \vec{f})$.

En particulier $f = t_{\overrightarrow{x_0 f(x_0)}} \circ \left(\Phi_{x_0}^{-1} \circ \vec{f} \circ \Phi_{x_0}\right)$

où la parenthèse appartient à $GA(X)_{x_0}$, et cette décomposition est unique.

On voit que ce n'est pas la structure de produit semi-direct, mais seulement l'isomorphisme α, qui dépend de x_0.

§4 EXERCICES

4.1 On appelle "groupe de Klein" (ou groupe du matelas) l'ensemble $K = \{e, x, y, z\}$ muni de la loi $ex = xe = x$, $ey = ye = y$, $ez = ze = z$, $xy = yx = z$, $yz = zy = x$, $zx = xz = y$, $x^2 = y^2 = z^2 = e^2 = e$

a) S'apercevoir que K s'identifie à l'espace vectoriel de dimension 2 sur $k = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

b) Soit X un espace affine de dimension 2 sur k. Montrer que toute bijection de X est affine, que $GL(K) \overset{(*)}{\simeq} \mathfrak{S}_3$, puis que $\mathfrak{S}_4 \simeq K \underset{\tau}{\times} \mathfrak{S}_3$, où $\tau : \mathfrak{S}_3 \to \mathrm{Aut}\, K \simeq GL(K)$ est l'isomorphisme $(*)$

c) Vérifier que $\mathfrak{S}_3 \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \underset{\sigma}{\times} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, où $\sigma : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}\, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est le seul isomorphisme entre ces deux groupes. Conclure que $\mathfrak{S}_4$ est résoluble, et décrire $\mathfrak{A}_4$ comme produit semi-direct.

4.2 Transvections. On appelle ainsi $\vec{u} : \vec{X} \to \vec{X}$ définie par

$\forall \vec{v} \in \vec{X} \quad \vec{u}(\vec{v}) = \vec{v} + f_0(\vec{v}).\vec{v_0}$, où $\vec{v_0} \in \vec{X} - \{0\}$, $f_0 \in (\vec{X})^* - \{0\}$, et $f_0(\vec{v_0}) = 0$.

a) On appelle transvection (affine) de X tout $u : X \to X$ affine admettant un point fixe et telle que $\vec{u}$ soit une transvection. Décrire u^{-1}.

b) On suppose maintenant $\dim X = 2$. Montrer que toute application linéaire $\vec{X} \to \vec{X}$ de déterminant 1 est produit d'au plus quatre transvections, et que toute translation de X est produit de deux transvections affines.

c) On suppose de plus $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit G un sous-groupe distingué de $SL(\vec{X})$ contenant strictement le centre de $SL(\vec{X})$, $C = \{\pm id_{\vec{X}}\}$. En conjuguant un élément de $G - C$, montrer que G contient une transvection, puis toutes les transvections, puis que $G = SL(\vec{X})$.

d) En particulier tout élément de $SA(X) = \{u \in GA(X) \mid \vec{u} \in SL(\vec{X})\}$ est un produit de transvections. De combien au plus?

e) Mêmes questions sans supposer $\dim X = 2$.

4.3 a) Étudier le plan affine X sur $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \mathbb{F}_3$: nombre de points, de droites parallèles à une droite donnée, de droites passant par un point, de droites, d'éléments de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ et de $GA(X)$.

b) Si A, B, C sont trois points non alignés, montrer qu'il existe une seule $f : X \to X$ affine telle que $f(A) = B$, $f(B) = C$, $f(C) = A$; que $f \in GA(X)$. Quel est son ordre? Quels sont les points et les droites invariants par f?

(Pour les définitions nouvelles, consulter le chap III)

4.4 X affine, $\sigma : X \to X$ bijective. Montrer que σ est affine si et seulement si

1) $\forall t \in \mathcal{T} \quad \sigma^{-1} \circ t \circ \sigma \in \mathcal{T}$

2) $\forall t \in \mathcal{T}, \lambda \in k \quad \sigma^{-1} \circ (\lambda t) \circ \sigma = \lambda(\sigma^{-1} \circ t \circ \sigma)$ (on note $\lambda t = t_{\lambda \vec{v}}$ si $t = t_{\vec{v}}$)