CHAPITRE X - EXPOSÉ ÉLÉMENTAIRE ET EUCLIDIEN DES CONIQUES

§1 DEFINITION ALGÉBRIQUE DES CONIQUES

1.1 Dans le plan affine euclidien, les coniques sont les courbes algébriques de degré 2, c'est-à-dire celles dont l'équation cartésienne dans un repère orthonormé s'écrit:

(*) $AX^2+2BXY+CY^2+2DX+2EY+F=0$, avec A, B, C non tous nuls.

1.2 Il est clair que leur équation s'écrit de la même façon dans tout repère orthonormé, et même dans tout repère affine du plan. Il s'agit donc d'une notion affine (au moins); mais dans ce chapitre, on l'étudiera du point de vue euclidien.

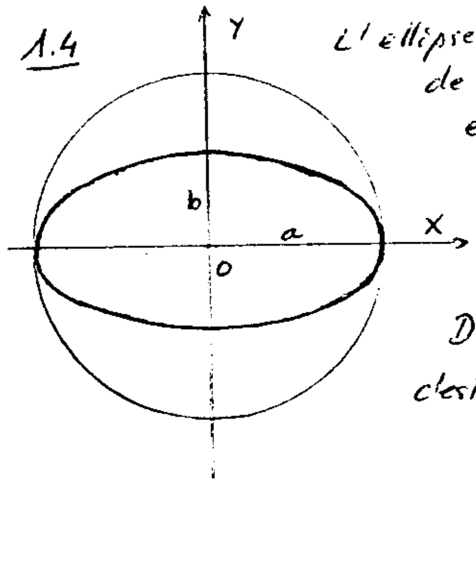
1.3 Si le polynôme à gauche de (*) est irréductible et s'annule, on dit que la conique (C) qu'il définit est propre. Sinon on dit qu'elle est dégénérée, et si ce n'est pas ϕ, c'est en fait un couple de droites concourantes, ou parallèles, ou même confondues ("droite double").

On peut toujours diagonaliser la forme quadratique $AX^2+2BXY+CY^2$ dans une base orthonormée, puis absorber les termes de degré 1 dominés: autrement dit après un déplacement du repère, écrire l'équation sous l'une des trois formes (dites réduites)

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1 \text{ ou } 0 \ ; \quad \frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1 \ ; \quad X^2=2pY \qquad (a,b,p>0)$$

suivant la signature de la forme quadratique. On dit que (C) est une ellipse, une hyperbole, ou une parabole selon le cas. Dans le premier, si l'on a 0 au second membre, (C) est un point; sinon, et si $a=b$, (C) est un cercle. Dans tout autre cas, le repère orthonormé où l'équation est réduite est presque entièrement déterminé (la réunion de ses axes l'est en tout cas) on les appelle les axes principaux de la conique.

1.4



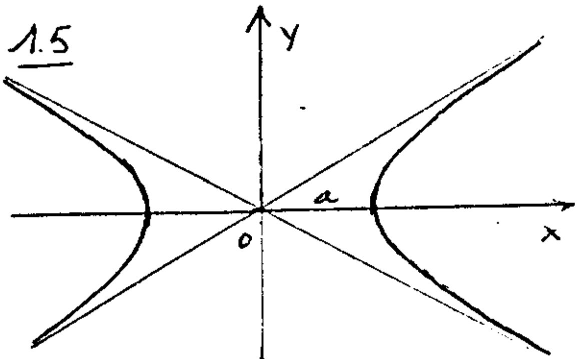
L'ellipse d'équation réduite $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$ a deux axes de réflexion orthogonaux, ses axes principaux, et l'origine est son centre de symétrie. (les seuls) Elle est paramétrée par les "fonctions circulaires":

$$\begin{cases} X = a\cos\theta \\ Y = b\sin\theta \end{cases} \quad (0\leq\theta<2\pi)$$

D'ailleurs l'affinité de rapport $\frac{a}{b}$ sur l'axe OY, c'est-à-dire l'application affine de matrice

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a}{b} \end{pmatrix}$ dans le repère choisi, la transporte sur le cercle $\Gamma(O,a)$.
a et b s'appellent le <u>grand</u> et le <u>petit</u> <u>demi-diamètre</u> (ou <u>demi-axe</u>) (évidemment si $a>b$, ce qu'on suppose).

<u>1.5</u>

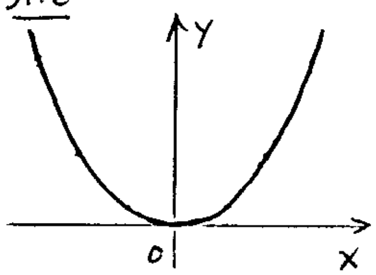


L'hyperbole d'équation réduite $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$ admet aussi pour axes et centre de symétrie ses axes principaux et l'origine.
Elle admet deux <u>asymptotes</u>, les droites d'équation $aY \pm bX = 0$, puisque son équation dans les coordonnées $X'=\frac{X}{a}-\frac{Y}{b}$, $Y'=\frac{X}{a}+\frac{Y}{b}$ s'écrit $X'Y'=1$

Elle est paramétrée par les "<u>fonctions hyperboliques</u>".

$\begin{cases} X = a\,\mathrm{Ch}\,t \\ Y = b\,\mathrm{Sh}\,t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ décrit la branche $\{X>0\}$ et $\begin{cases} X = -a\,\mathrm{Ch}\,t \\ Y = -b\,\mathrm{Sh}\,t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ décrit l'autre.

<u>1.6</u>



La parabole d'équation réduite $X^2=2pY$ admet un seul axe de symétrie (OY) et pas de centre, ni d'asymptotes.
Elle est paramétrée par X.
On appelle p son <u>paramètre</u>.

<u>1.7</u> <u>Une conique propre admet en chaque point une tangente</u> : c'est clair sur les représentations paramétriques. Par le théorème des fonctions implicites, la conique d'équation (*) admet pour tangente au point (x_0,y_0) la droite d'équation

$$(Ax_0+By_0+D)(X-x_0)+(Bx_0+Cy_0+F)(Y-y_0)=0$$

<u>1.8</u> Une droite D passant par un point P d'une conique propre (C) coupe (C) en 1 ou 2 points, puisque l'équation aux abscisses (ou aux ordonnées) des points d'intersection est de degré 2 au plus. Or cette équation a déjà une racine réelle (P). L'étude de cette équation montre que:

a) Les tangentes à (C) sont précisément les droites qui coupent (C) en « deux points confondus », c'est-à-dire telles que l'équation ci-dessus a une racine double.

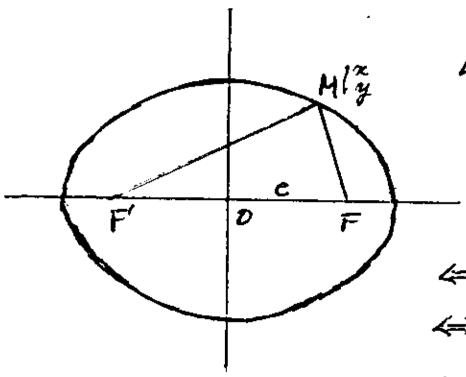
b) On obtient pour P fixe et D variable une paramétrisation <u>rationnelle</u> de (C) (par $D \longmapsto (C)\cap D-\{P\}$) : les coniques sont des courbes <u>unicursales</u>.

1.9 Les coniques sont localement d'un seul côté de leurs tangentes (on voit sur les représentations paramétriques 1.4, 1.5, 1.6, qu'elles n'ont pas de point d'inflexion). Autrement dit, ce sont toutes des courbes convexes, ce qui permet de distinguer dans $X - \{C\}$, un extérieur (balayé par les tangentes) d'un intérieur (le reste). D'un point extérieur, on peut mener deux tangentes à la conique. L'intérieur d'une hyperbole a deux composantes connexes.

Cette vision "analytique" des coniques est la première et presque la seule enseignée de nos jours, et c'est pourquoi on l'a placée au début de ce chapitre. Mais ce n'est pas du tout celle des anciens, que l'on développe maintenant, aux paragraphes 2, 3, 4.

§2 DÉFINITION PAR FOYERS

2.1 Lieu des points dont la somme des distances à deux points est constante.



Soient F et F' deux points distants de $2c$, et $a > c \geq 0$. Le point M de coordonnées (x, y) dans un repère orthonormé d'origine $O = \frac{F+F'}{2}$ et de premier axe F'F vérifie $\boxed{MF + MF' = 2a}$ si et seulement si

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

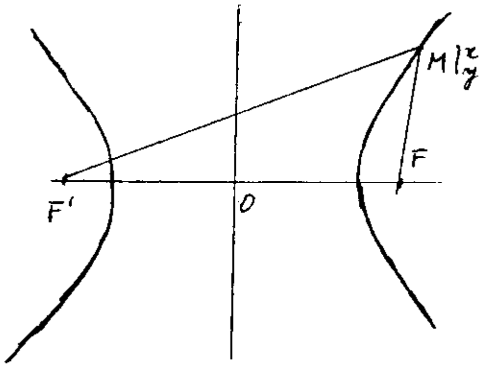
$$\Leftrightarrow (x+c)^2 + (x-c)^2 + 2y^2 - 4a^2 = -2\sqrt{(x^2+y^2+c^2)^2 - 4c^2x^2}$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1$$

Ce lieu est donc une ellipse, de demi-axes a et $b = \sqrt{a^2-c^2}$, d'axes principaux FF' et sa médiatrice. F et F' s'appellent les foyers de l'ellipse. Réciproquement, il est clair que toute ellipse s'obtient ainsi.
Si $c = 0$, $F = F'$ et on obtient le cercle de centre F et de rayon a.
(Si $a = c$, on aurait comme lieu le segment $[F', F]$).

2.2 Lieu des points dont la différence des distances à deux points est constante



Soient F et F' deux points distants de $2c$, et $0 < a < c$. Le point M de coordonnées (x, y) dans un repère orthonormé d'origine $O = \frac{F+F'}{2}$ et de premier axe FF' vérifie $\boxed{|MF' - MF| = 2a}$ si et seulement si

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a$$

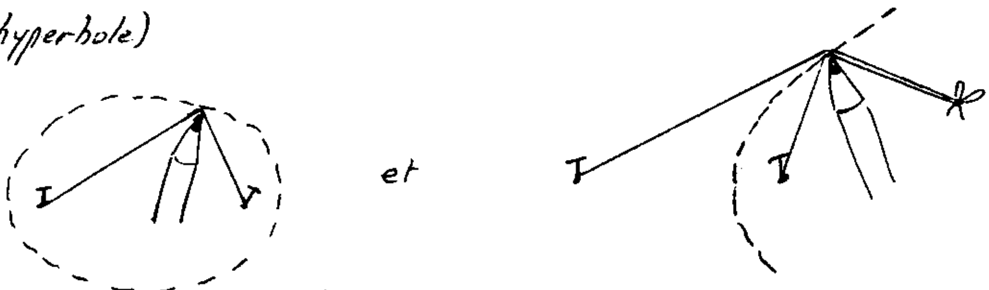
$$\Leftrightarrow (x+c)^2 + (x-c)^2 + 2y^2 - 4a^2 = 2\sqrt{(x^2+y^2+c^2)^2 - 4c^2x^2}$$

$$\Leftrightarrow (c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1$$

Ce lieu est donc une hyperbole d'axes principaux FF' et sa médiatrice. F et F' s'appellent les <u>foyers</u> de l'hyperbole. On a $c = \sqrt{a^2+b^2}$.
Réciproquement, il est clair que toute hyperbole s'obtient ainsi ($b = \sqrt{c^2-a^2}$)
(Le cas $a=0$ donnerait la médiatrice de FF', et le cas $a=c$ la droite $\langle FF' \rangle$ privée de l'intervalle (F,F')).

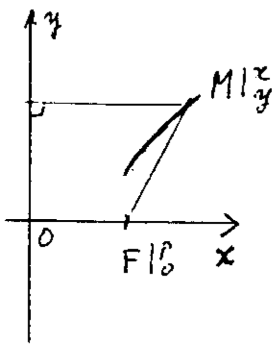
<u>2.3</u> La définition par foyers de l'ellipse et de l'hyperbole donne les fameuses constructions «à la ficelle» : (on n'obtient évidemment qu'un <u>arc</u> d'hyperbole)



La parabole échappe à cette définition (mais pas le cercle).

§3 DÉFINITION PAR FOYER ET DIRECTRICE

<u>3.1</u> <u>Proposition</u>: <u>Le lieu des points du plan dont le rapport des distances à un point F et à une droite $\Delta \not\ni F$ vaut une constante $e \in \mathbb{R}^+$ est une conique. C'est une ellipse si $e<1$, une parabole si $e=1$, une hyperbole si $e>1$. On appelle Δ la directrice, F le foyer, et e l'eccentricité de la conique. Si $e \neq 1$, F est l'un des foyers au sens du paragraphe 2. La distance p de F à Δ s'appelle le paramètre de la conique.</u>



Dans un repère orthonormé où les coordonnées de F sont $(p,0)$, avec $p>0$, et l'équation de Δ est $x=0$, le point M de coordonnées (x,y) appartient au lieu si et seulement si

$$(x-p)^2 + y^2 = e^2x^2 \,, \quad \text{soit:}$$

$$\boxed{(1-e^2)x^2 + y^2 - 2px = -p^2}$$

- Si <u>$0<e<1$</u>, il vient $$\frac{\left(x - \frac{p}{1-e^2}\right)^2}{\left(\frac{ep}{1-e^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{ep}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2} = 1$$

C'est donc l'ellipse de centre $\left(\frac{p}{1-e^2},0\right)$, d'axes principaux parallèles aux axes, et de demi-diamètres $a=\frac{ep}{1-e^2}$ et $b=\frac{ep}{\sqrt{1-e^2}}<a$. Le deuxième foyer est $(q,0)$ avec $q=\frac{2p}{1-e^2}-p=\left(\frac{1+e^2}{1-e^2}\right)p$. Il est donc "à droite" de F. On a $c=\sqrt{a^2-b^2}=\frac{e^2p}{1-e^2}$,

soit $\boxed{e=\frac{c}{a}}$

• Si <u>e=1</u> il vient : $\quad y^2=2p\left(x-\frac{p}{2}\right)$

C'est donc la parabole d'axe $D=F+\vec{\Delta}^{\perp}$, de "<u>sommet</u>" $O=\left(\frac{p}{2},0\right)=D\cap(C)$, et de "paramètre" p.

• Si <u>e>1</u> il vient $\quad \dfrac{\left(x+\frac{p}{e^2-1}\right)^2}{\left(\frac{ep}{e^2-1}\right)^2}-\dfrac{y^2}{\left(\frac{ep}{\sqrt{e^2-1}}\right)^2}=1$

c'est donc l'hyperbole de centre $\left(\frac{p}{1-e^2},0\right)$ (toujours "à gauche" de la directrice) d'axes principaux parallèles aux axes, et de « demi-diamètres »

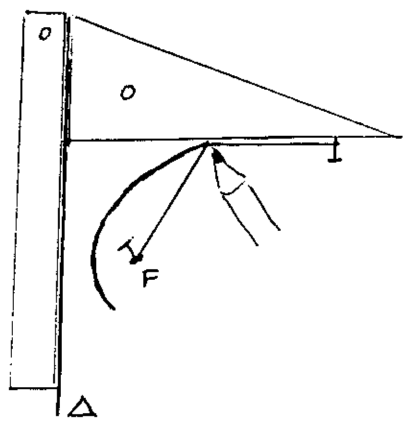
$a=\frac{ep}{e^2-1}$ et $b=\frac{ep}{\sqrt{e^2-1}}$. Dans ce cas $c=\sqrt{a^2+b^2}=\frac{ep}{e^2-1}\sqrt{1+e^2-1}=\frac{e^2p}{e^2-1}=ae$,

soit $\boxed{e=\frac{c}{a}}$. Le deuxième foyer est $(q,0)$ avec $q=\frac{2p}{1-e^2}-p=\left(\frac{1+e^2}{1-e^2}\right)p$, qui est "à gauche" de la directrice (et du centre !). ∎

<u>3.2</u> Dans le cas de l'hyperbole, les pentes des asymptotes valent $\pm\frac{b}{a}=\pm\sqrt{e^2-1}$: elles croissent (en module) de 0 à ∞ quand e croît de 1 à ∞. Les pentes valent ± 1 lorsque $\boxed{e=\sqrt{2}}$. Dans ce cas, les asymptotes sont orthogonales, et on dit qu'on a une <u>hyperbole équilatère</u>.

<u>3.3</u> La définition par foyer et directrice des coniques donne bien les ellipses $(0<e<1)$, les paraboles $(e=1)$ et les hyperboles $(e>1)$, mais laisse échapper les cercles (par convention, $e=0$ dans ce cas).

Elle donne aussi une construction « à la ficelle » de la parabole (ou du moins d'un arc !) :



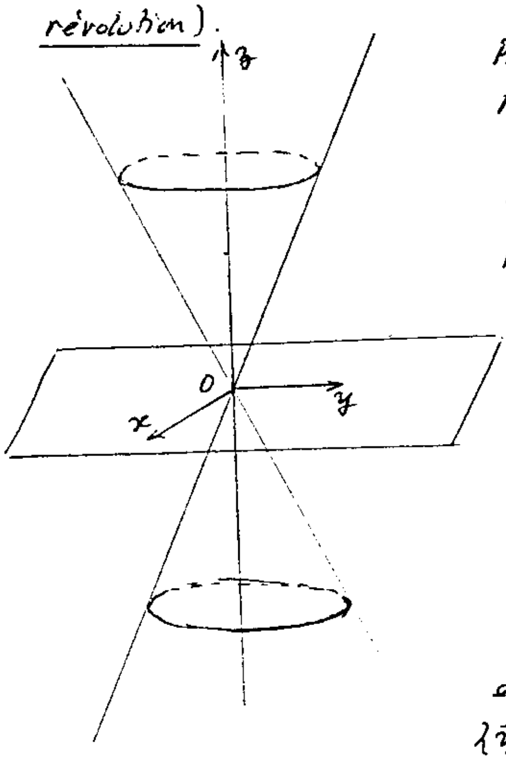
3.4 Proposition : a) Deux coniques sont égales si et seulement si elles ont même eccentricité et même paramètre (ou même rayon si $e=0$)

b) Deux coniques sont semblables si et seulement si elles ont même eccentricité

Preuve : C'est clair sur la définition des coniques (qui ne sont pas des cercles) par foyer et directrice. C'est aussi vrai dans le cas du cercle ($e=0$). ∎

§4 DÉFINITION HISTORIQUE (D'APOLLONIUS DE PERGE)

4.1 Proposition : Les coniques sont les sections planes d'un cône circulaire (de révolution).



Preuve : Un tel cône Γ a pour équation dans un repère orthonormé convenable :

$$\alpha^2 z^2 = x^2 + y^2 \qquad (\alpha > 0)$$

et comme il est de révolution autour de Oz, on peut se contenter d'étudier ses sections par des plans P non "horizontaux" (celles-ci seraient des cercles) et parallèles à Ox, donc d'équation

$$\beta z = y + \gamma \qquad (\beta, \gamma \in \mathbb{R})$$

Posant $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\beta}{\delta} \\ \frac{1}{\delta} \end{pmatrix}$, $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\delta} \\ \frac{\beta}{\delta} \end{pmatrix}$,

avec $\delta = \sqrt{1+\beta^2}$, on vérifie que $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ est une base orthonormée directe, et que $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ est une base de $\vec{P}$.

Comme $X\vec{v_1} + Y\vec{v_2} + Z\vec{v_3} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = X \\ y = \dfrac{\beta Y - Z}{\delta} \\ z = \dfrac{Y + \beta Z}{\delta} \end{cases}$

les équations de P et Γ dans le repère $\{O, \vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ s'écrivent, avec $\varepsilon = \frac{\gamma}{\delta}$:

$$Z = \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \delta^2 X^2 + (\beta^2 - \alpha^2) Y^2 - 2\beta(1+\alpha^2) YZ + (1 - \alpha^2\beta^2) Z^2 = 0$$

et la courbe $\Gamma \cap P$ a donc dans le plan P ($Z = \varepsilon$) pour équation :

$$\delta^2 X^2 + (\beta^2 - \alpha^2) Y^2 - 2\beta\varepsilon(1+\alpha^2) Y + (1 - \alpha^2\beta^2)\varepsilon^2 = 0$$

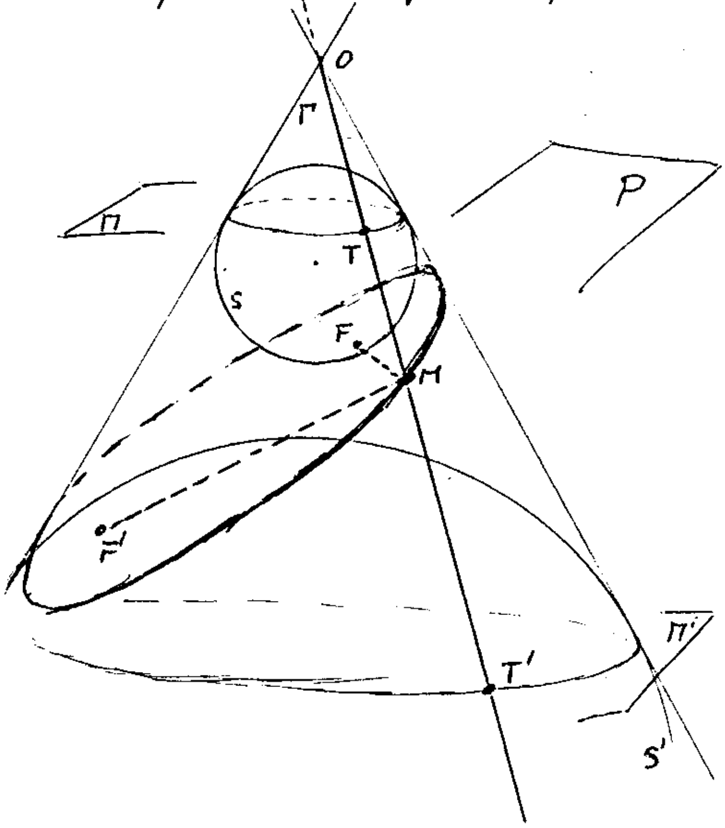
On voit que c'est
- une ellipse si $|\beta| > \alpha$
- une parabole si $|\beta| = \alpha$
- une hyperbole si $|\beta| < \alpha$

(pour $\varepsilon \neq 0$, sinon c'est deux droites, une droite, ou un point)

Un calcul montre que l'eccentricité de la conique vaut $e = \sqrt{\dfrac{1+\alpha^2}{1+\beta^2}}$

On obtient donc ainsi n'importe quelle conique d'excentricité e telle que $0 \leq e \leq \sqrt{1+\alpha^2}$. On a donc toutes les ellipses, les paraboles, et les hyperboles qui ne sont "pas plus ouvertes" que le cône. En variant α, on les obtient toutes. ■

4.2 L'équivalence entre les définitions "par foyers" et "d'Apollonius" d'une ellipse se montre géométriquement de la façon suivante :

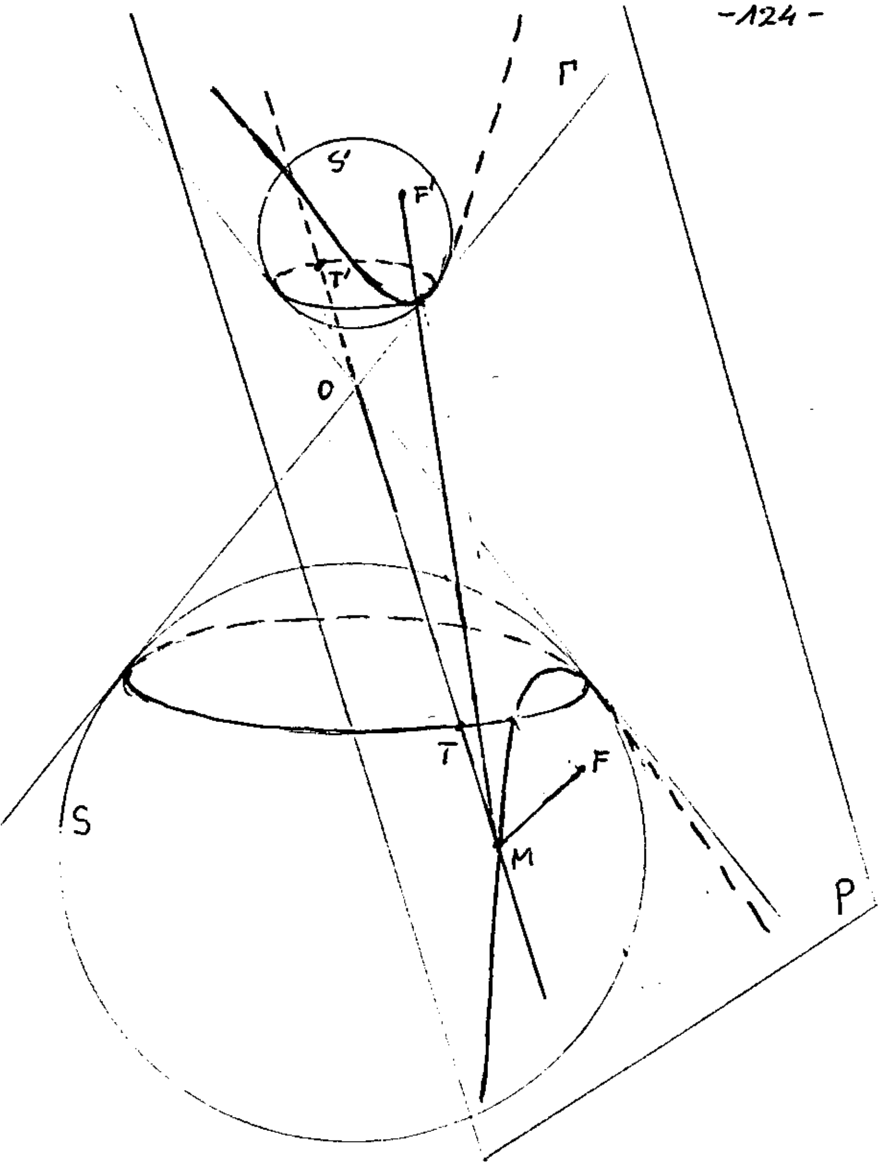


Soit $M \in P \cap \Gamma$.
Il y a deux sphères S et S' tangentes à Γ et à P. Posons $F = P \cap S$, $F' = P \cap S'$, $T = S \cap OM$, $T' = S' \cap OM$.
On a $MF = MT$ et $MF' = MT'$.
De plus dans le cas de l'ellipse (le plan étant "moins incliné" que les génératrices du cône); les deux sphères sont de part et d'autre de P, d'où : $MT + MT' = TT'$
Il est clair que $TT' = 2a$ ne dépend que de P et Γ.
Finalement :

$$MF + MF' = 2a$$

4.3 La même équivalence, dans le cas d'une hyperbole, se montre géométriquement de la même façon (cf. figure page suivante), la seule différence étant que dans ce cas (le plan étant "plus incliné" que les génératrices du cône), les deux sphères sont d'un même coté du plan P (et chacune dans une "nappe" de l'intérieur du cône), et par suite $TT' = |MT - MT'|$, d'où $|MF - MF'| = 2a$.

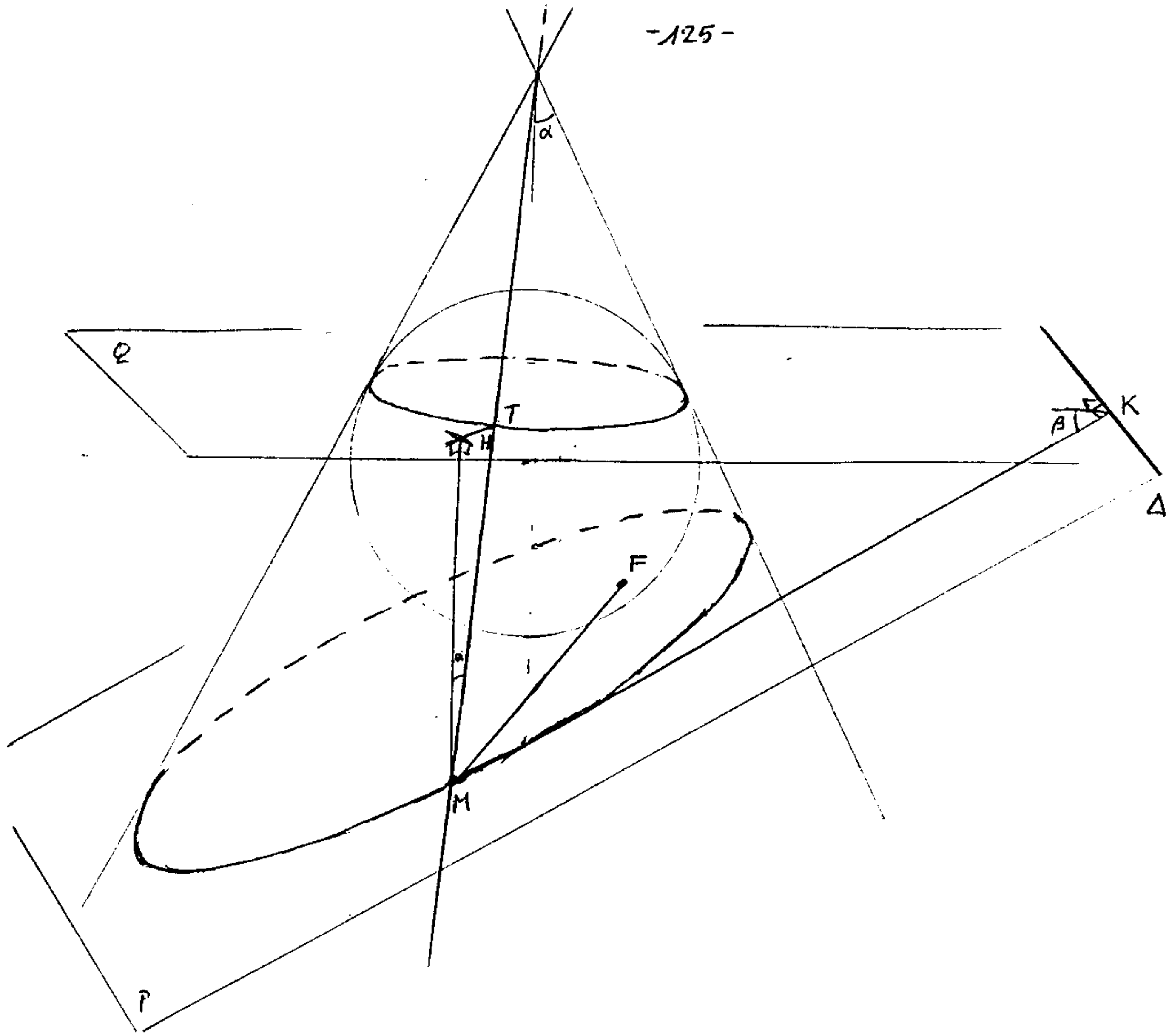
Ces deux démonstrations marchent dès qu'il y a effectivement deux sphères tangentes à P et Γ, autrement dit même pour le cercle (cas d'un plan horizontal), mais pas pour la parabole (cas d'un plan parallèle à l'une des génératrices) (heureusement !)



4.4 L'équivalence entre les définitions "d'Apollonius" et "par foyer et directrice" se démontre de même géométriquement ainsi (cf. figure page suivante) : il y a toujours au moins une sphère S tangente à Γ (dès que P ne passe pas par O) et à P. $S \cap \Gamma = \gamma$ est un cercle dans un plan Q, et $S \cap P = \{F\}$. Dès que P n'est pas "horizontal", c'est-à-dire sauf dans le cas du cercle, $P \cap Q = \Delta$ est une droite. Soit $M \in P \cap \Gamma$.
Posons $T = Q \cap \langle OM \rangle$, et notons H et K les projections orthogonales de M sur Q et sur Δ, α le demi-angle au sommet du cône Γ, β l'angle des plans P et Q. On a :

$$MF = MT = \frac{MH}{\cos\alpha} \quad \text{et} \quad MH = MK \sin\beta, \ \text{soit :}$$

$$\frac{MF}{MK} = \frac{\sin\beta}{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)} = e \ \ldots \ \blacksquare$$



4.5 Modulo $GA(X)$, il n'y a que trois coniques propres : ellipses ($\supset$ cercles), paraboles et hyperboles. Les propriétés les plus profondes des coniques sont du domaine de la géométrie projective, et font l'objet du chapitre XI. Notons ici qu'il n'y a qu'une conique projective propre. Nous reviendrons plus tard sur les propriétés métriques et affines des coniques. Notons seulement ici qu'en coordonnées polaires, leurs équations sont particulièrement simples, lorsqu'on prend pour pôle l'un des foyers:

$$x^2+y^2 = e^2(x+p)^2$$

$$\iff \rho = e(\rho \cos\theta + p)$$

$$\iff \boxed{\rho = \frac{ep}{1-e\cos\theta}}$$

§5 EXERCICES

5.1 Lieu des centres des cercles qui font un même angle donné avec deux cercles donnés.

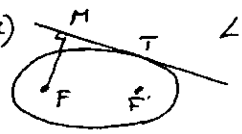
5.2 La distance du centre d'une conique à centre à l'une ou l'autre de ses directrices vaut $\frac{a^2}{c}$.

5.3 a) La tangente en un point M d'une conique à centre de foyers F et F' est la bissectrice de $(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MF'})$ (intérieure si c'est une hyperbole, extérieure si c'est une ellipse).

b) Dans le cas d'une parabole de foyer F et de directrice Δ, la tangente en un point M est la bissectrice (intérieure) de $(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MH})$ où H est la projection orthogonale de M sur la directrice.

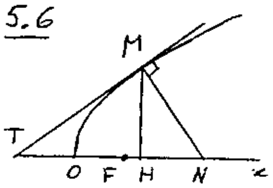
5.4 a) Le lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes orthogonales à une conique à centre donnée est un cercle appelé cercle orthoptique de la conique.

b) Pour une parabole, ce lieu est la directrice.

5.5 a) 

Lieu de M tel que (MF, MT) soit droit (pour toute conique)

b) Le produit des distances des foyers d'une conique à centre à l'une de ses tangentes est constant.

5.6 

Soit (P) une parabole de sommet O d'axe Ox, de foyer F, de directrice Δ.

Si $M \in (P)$ la tangente en M coupe Ox en T, la normale en M coupe Ox en N et M se projette en H orthogonalement sur Ox.

a) Montrer que la "sous-normale" $\overrightarrow{HN}$ est constante

b) Montrer que cette propriété caractérise la parabole (parmi les courbes paramétrées par des fonctions C^1)

c) Montrer que $FM = FT$ (cf. 5.3 b). Soit K la projection de M sur la directrice. Montrer que $MFTK$ est un losange, puis que $MN = FK$. Retrouver ainsi (a)

d) Déduire du (c) que $(TM, Ox) = \frac{1}{2}(FM, Ox)$, puis que l'angle que font les tangentes en deux points M et M' de (P) est la moitié de l'angle sous lequel on voit la corde MM' du foyer F.

e) Corollaire du (d) : Soit M un point extérieur à (P) et T et T' les pieds des tangentes menées de M à (P). Alors :

$$M \in \Delta \iff \langle TT' \rangle \text{ passe par } F$$

f) Corollaire du (d) : Le cercle circonscrit au triangle formé par trois tangentes à une parabole passe par son foyer.

5.7 D'un point M extérieur à une parabole (P) de foyer F et de directrice Δ, on mène deux tangentes à (P) en T et T'. On pose $N = \langle TT' \rangle \cap \Delta$, $N' = \langle TT' \rangle \cap \langle MF \rangle$.

a) Montrer que la division (T, T', N, N') est harmonique

b) Montrer que $\langle FM \rangle$ et $\langle FN \rangle$ sont orthogonales

c) Montrer que $\langle FM \rangle$ et $\langle FN \rangle$ sont les bissectrices de (FT, FT').

5.8 Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé

$$\rho = |Ax + By + C|$$

(où ρ est le rayon-vecteur $\sqrt{x^2+y^2}$, et A, B, C sont des constantes) est l'équation cartésienne d'une conique. Réciproque ?

5.9 Le "lieu à quatre droites"

C'est un problème ancien qui n'a été résolu que par Descartes au 17ème siècle, illustrant ainsi la puissance de sa méthode "analytique" :

Soient D_1, D_2, D_3, D_4 quatre droites et $k > 0$. Quel est le lieu des points M du plan tels que

$$\frac{d(M, D_1) \cdot d(M, D_2)}{d(M, D_3) \cdot d(M, D_4)} = k \quad ?$$

(On trouvera "en général" une courbe de degré 4 dégénérée en deux coniques)

Exemple : $D_1 \mid x = 0$ $D_2 \mid x = -1$; $D_3 \mid y = 0$ $D_4 \mid x + y = 1$ $\Big\}$ dans un repère orthonormé, et $k = \sqrt{2}$

5.10 Donner une paramétrisation rationnelle de l'ellipse d'équation réduite $x^2 + 2y^2 = 6$

5.11 Définition des coniques par "cercle directeur"

a) Soit C le cercle de centre F' et de rayon $2a$ et $F \notin C$. Le lieu des centres des cercles passant par F et tangents à C est une conique à centre de foyers F et F' et de "demi-grand-axe" a. C'est une ellipse si $F \in \operatorname{Int} C$, une hyperbole si $F \in \operatorname{Ext} C$. Comment distingue-t-on alors ces deux branches ?

b) Déduire du a) une construction à la règle et au compas de l'intersection d'une conique à centre et d'une droite

c) Si C dégénère en droite, ce lieu devient une parabole. Adapter le (b) à ce cas. (cf. le IX.5.15.I c)

d) Reprendre le IX.5.6 avec ces idées-là.

5.12 Deux sommets d'un triangle en carton glissent chacun sur une droite du plan. Quel est le lieu du troisième ?
(Le cas particulier où les deux droites sont perpendiculaires et les trois "sommets" alignés donne la construction de l'ellipse "à la bande de papier").

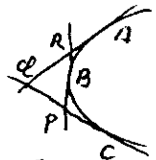
5.13 L'orthocentre d'un triangle inscrit à une hyperbole équilatère est sur l'hyperbole (théorème de Poncelet-Brianchon)

5.14 Construire l'ellipse inscrite à un parallélogramme ABCD donné et tangente à l'un des cotés en un point donné N

5.15 Lieu des centres des ellipses tangentes à quatre droites données.
(C'est le segment qui joint les milieux des diagonales du quadrilatère convexe qu'elles forment – théorème de Newton)

5.16 (Relations d'Apollonius)

a) Deux tangentes à une parabole en A et B se coupent en S. Si $I = \frac{A+B}{2}$, SI est parallèle à l'axe de la parabole

b) 

Trois tangentes en A, B, C se coupent en P, Q, R. Alors :
$$\frac{QR}{RA} = \frac{BP}{BR} = \frac{CP}{PQ}$$

c) Déduire du (b) une construction d'une parabole dont on connait deux points avec leurs tangentes (utiliser aussi le théorème de Lambert qui suit)

5.17 a) Deux tangentes à une parabole de foyer F en A et B se coupent en S. Montrer que les triangles SFA et SBF sont semblables

b) (Théorème de Lambert) Le cercle circonscrit au triangle de trois tangentes à une parabole passe par son foyer

c) Déduire du (b) une construction d'une parabole dont on connait quatre tangentes

d) Quel est le lieu des foyers des paraboles admettant trois tangentes données.

e) Retrouver ainsi que les cercles circonscrits aux triangles formés par quatre droites sont concourants (cf. VIII.7.9)

5.18 Soit D la tangente au sommet d'une parabole de foyer F ; M_1, M_2, M_3 trois points de D et $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ les perpendiculaires à M_jF en M_j $(j = 1,2,3)$
L'orthocentre du triangle formé par $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ est sur la directrice.

5.19 a) Le cercle de Feuerbach d'un triangle inscrit à une hyperbole équilatère passe par son centre.

b) Lieu des centres des hyperboles équilatères passant par trois points ?

c) Donner une construction de l'hyperbole équilatère passant par quatre points.

d) Les cercles de Feuerbach des quatre triangles déterminés par quatre points sont concourants.

Indications pour les exercices

5.1 Par un calcul, c'est une conique. Comparer avec IX.5.6

5.2 Calculer avec les notations du §3

5.3 a)

Ecrire les équations (dans les axes principaux) de la tangente et de la normale ; calculer x_n et x_t et vérifier que $(c,-c,x_t,x_n)=-1$

b) voir le 5.6

5.4 et 5.5 Les énoncés suggèrent un calcul. On a $FH \cdot F'H' = b^2$ (si H et H' sont les projections)

5.6 De nouveau un calcul est suggéré. Des méthodes géométriques pour obtenir les résultats de ces trois exercices s'obtiennent facilement à partir de la définition des coniques à centre par "cercle directeur" (cf. 5.)

5.7 Là encore il s'agit ici de calculer. Mais voir plus loin le paragraphe XI.4.

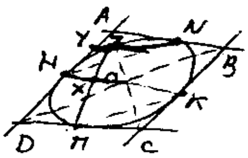
5.9 Dans le cas de l'exemple on trouve l'ellipse d'équation $x^2+y^2+xy+x-y=0$ et l'hyperbole d'équation $x^2-xy-y^2+x+y=0$. On étudiera leur intersection leurs axes, asymptotes, ...

5.10 La couper par une droite passant par (2,1).

5.11 (b) Un cercle centré sur la conique et sur D, et passant par F, passe aussi par le symétrique G de F par rapport à D. On est ramené à construire le cercle du faisceau à points de bases F et G et tangent à C ...

(c) se traite de même et (d) se ramène à (a).

5.14



M et N sont symétriques par rapport à $O = AC \cap BD$. K et H se construisent en remarquant que KM et HN sont parallèles à BD (c'est clair pour un cercle, donc vrai pour l'ellipse par affinité).

On construit autant de points qu'on veut de l'ellipse de la façon suivante : étant donné Y sur un coté, on construit X sur OM tel que $\frac{OX}{OM} = \frac{AY}{AN}$; alors $Z = NY \cap MX$ est sur l'ellipse. (Preuve par des triangles semblables dans le cas du cercle ; puis affinité)

5.15 Utiliser le VIII.7.17.b

5.16 a) Projeter A et B sur la directrice en H et K et considérer les médiatrices de FHK.

b) Projeter tous ces segments sur la directrice et utiliser (a)

c) Les relations d'Apollonius permettent de construire autant de tangentes qu'on veut. Dès qu'on en a quatre, on peut utiliser 5.17.c.

5.17 a) Si H et K sont les symétriques de F par rapport aux tangentes, le cercle circonscrit à FHK est centré en S ...

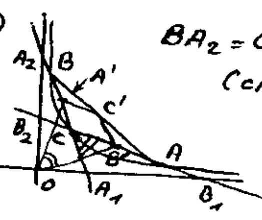
b) Angles inscrits en utilisant (a)

c) La construction du foyer est claire par (b). Ses symétriques par rapport aux tangentes [sont sur la directrice.

d) C'est le cercle circonscrit au triangle des tangentes

e) Au foyer de la parabole tangente !

5.19 a)



$BA_2 = CA_1$ et $AB_1 = CB_2$ avec des notations claires sur la figure (cf. XI.4.2.b). D'où $A' = \frac{A_1+A_2}{2}$, $B' = \frac{B_1+B_2}{2}$, puis $A'OA_1$ et $B'OB_1$ isocèles. On conclut que $A'C'B'C$ est un parallélogramme, puis par le théorème des angles inscrits.