CHAPITRE I - ACTIONS DE GROUPES

§1 DEFINITIONS, EXEMPLES

1.1 Si X est un ensemble, on note $\mathfrak{S}_X$ le groupe des bijections (permutations) de X ; $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}_{\{1,2,\ldots,n\}}$ est le groupe symétrique.

1.2 Définition : Soit G un groupe et X un ensemble. Une action (à gauche) de G sur X est un morphisme φ de G dans $\mathfrak{S}_X$. L'application

$$\begin{array}{l} G\times X \xrightarrow{(*)} X \\ (g,x) \longmapsto \varphi(g)(x) = g\cdot x \end{array} \quad \text{vérifie alors} \quad \begin{cases} (1)\ \forall x\in X \quad e x = x \\ (2)\ \forall g,h\in G, x\in X \quad g(hx) = (gh)\cdot x \end{cases}$$

et réciproquement la donnée d'une application $(*)$ vérifiant (1) et (2) définit bien une action de G sur X. On dit aussi que G opère (à gauche) sur X. Notons que $\varphi(g^{-1}) = [\varphi(g)]^{-1}$.

1.3 Exemples : • $\mathfrak{S}_n$ agit sur $\{1,2,\ldots,n\}$ par $\varphi = id$

- Le groupe des homographies agit sur la sphère de Riemann
- Soit V un espace vectoriel. $GL(V)$ agit sur V.

1.4 On définirait de même une action à droite de G sur X comme la donnée d'un antimorphisme $\psi : G \longrightarrow \mathfrak{S}_X$ (id est $\psi(g)\circ\psi(h) = \psi(hg)$), ou de façon équivalente d'une application $\begin{array}{l} X\times G \longrightarrow X \\ (x,g) \longmapsto xg \end{array}$ telle que $x\cdot e = x$ et $(xg)h = x(gh)$.

Si G est commutatif, les notions d'action à gauche et à droite coïncident. Dans ce cas on notera souvent l'action additivement :
$\begin{array}{l} X\times G \longrightarrow X \\ (x,g) \longmapsto x+g \end{array}$, et on a évidemment $x+0 = x$ et $x+(g+h) = (x+g)+h$, et on omet donc les parenthèses.

1.5 Si G agit (à gauche) sur X, un sous-groupe H de G aussi (par $\varphi/_H$).
Si G agit sur X, il agit aussi naturellement sur X^n, $\mathcal{P}(X)$, etc...

1.6 Un groupe G agit toujours sur lui-même à gauche (et aussi à droite) par translations : $\begin{array}{l} G\times G \longrightarrow G \\ (g,h) \longmapsto gh \end{array}$

On note $\operatorname{Aut} G$ le groupe des automorphismes de G ($\subset \mathfrak{S}_G$), et $\operatorname{Int} G \subset \operatorname{Aut} G$ l'ensemble des "automorphismes intérieurs" de G, c'est-à-dire des automorphismes de G de la forme $g \longmapsto \sigma_a(g) = aga^{-1}$, où $a\in G$.
G agit à gauche sur G par automorphismes intérieurs (par σ), et $\operatorname{Int} G$ est donc un sous-groupe de $\operatorname{Aut} G$. Ce sous groupe est distingué, et plus précisément : $\forall a\in G, \rho\in \operatorname{Aut} G$ $\quad \boxed{\rho\circ\sigma_a\circ\rho^{-1} = \sigma_{\rho(a)}}$.

§2 ORBITES, STABILISATEURS, INVARIANTS, NOYAU

2.1 L'action de G sur X définit une relation d'équivalence :
$\forall x, y \in X, \quad x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G, y = gx$
La classe $\dot{x} = Gx$ d'un point X s'appelle l'orbite de x sous l'action de G, et l'ensemble quotient $G \backslash X$ l'espace des orbites.

2.2 Exemples : — $\mathcal{P}\{1, .., n\}$ est découpé par l'action de $\mathfrak{S}_n$ en $n+1$ orbites
- Si H est un sous-groupe de G, les orbites des actions de H sur G par translations (à gauche et à droite) sont les "classes modulo H"
- Les orbites de l'action de G sur G par automorphismes intérieurs sont les "classes de conjugaison"
- Soit V un espace vectoriel. $GL(V)$ agit sur V, $\mathbb{P}V$, l'ensemble des bases de V, l'ensemble des sous-espaces de V... Décrire les orbites.

2.3 Pour $x \in X$, l'ensemble $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ est un sous-groupe de G, appelé stabilisateur (ou sous-groupe d'isotropie) de x sous l'action de G.
C'est l'image réciproque de $\{x\}$ par l'application surjective $\begin{array}{l} G \longrightarrow G.x \\ g \longmapsto gx \end{array}$.
Comme $gx = hx \Leftrightarrow g^{-1}h \in G_x \Leftrightarrow \dot{g} = \dot{h}$ dans $G/_{G_x}$, on en déduit une bijection naturelle $\boxed{G/_{G_x} \xrightarrow{\sim} G.x}$ (par $\dot{g} \longmapsto gx$)

2.4 On dit que $x \in X$ est invariant sous l'action de G si
$\forall g \in G \quad gx = x$
Il revient au même de dire que l'orbite de x est $\{x\}$, ou que $G_x = G$.

2.5 Supposons G fini, et soit H un sous-groupe de G. On a
$\#G = (\#H).(\#G/_H)$, puisque toutes les classes à droite gH ont le même cardinal, étant deux à deux en bijection par des translations à gauche, et que ce cardinal est donc celui de $eH = H$.

Supposons G et X finis, G agissant sur X. On a donc $\#G = (\#G_x)(\#G/_{G_x})$, et de plus $\#X = \sum_{G.x \in G\backslash X} \#G.x$. Comme $\#G.x = \#G/_{G_x}$ par 2.3, il vient la "formule des classes" :

$$\boxed{\#X = \sum_{\dot{x} \in G\backslash X} \frac{\#G}{\#G_x}}$$

2.6 Exemples d'application

- $\mathfrak{S}_n$ agissant sur $\{1, .., n\}$, posons $\#\mathfrak{S}_n = s_n$. Il y a une seule orbite, et le stabilisateur d'un point s'identifie à $\mathfrak{S}_{n-1}$. D'où $\frac{s_n}{s_{n-1}} = n$, et donc $s_n = n!$.

- Supposons $\#G = p^k$ (p premier, k entier) et $\#X = n$. Si G agit sur X et que p n'est pas un diviseur de n, il y a au moins un invariant.
(sinon, $\forall x \in X$, $\#G_x = p^{k'}$ avec $k' < k$, donc $\#G/_{\#G_x}$ est un multiple de p ...)

• Supposons $\# G = 35$ et $\# X = 13$ (ou 16, ou 18, ou 23). Il y a un point invariant.

2.7 Si $Gx = Gy$, G_x et G_y sont conjugués. Plus précisément, dès que $y = gx$, on a $G_y = g G_x g^{-1}$. Mais la réciproque est fausse (considérer une action triviale). En particulier si G est commutatif, tous les points d'une même orbite ont même stabilisateur.

2.8 Le noyau N du morphisme $\varphi : G \longrightarrow \mathfrak{S}_X$ qui définit l'action s'appelle noyau de l'action. Il est clair que $N = \bigcap_{x \in X} G_x$, et c'est un sous-groupe distingué de G. On dit que l'action est fidèle si $N = \{e\}$. Sinon, le groupe $G/_N$ agit naturellement sur X, et cette action est fidèle.

§3 ESPACES HOMOGÈNES

3.1 On dit que G agit sur X transitivement s'il n'y a qu'une seule orbite. On dit alors aussi que X est un espace homogène sous G. Dans ce cas, tous les stabilisateurs G_x sont conjugués (2.7), et X est en bijection naturelle avec chaque quotient $G/_{G_x}$ (2.3).

3.2 Par exemple si H est un sous-groupe de G, G agit transitivement sur $G/_H$ (par $g\,\bar{g}' = \overline{gg'}$) et les stabilisateurs sont tous conjugués de $G_{\bar{e}} = H$.

3.3 On dit que G agit simplement transitivement sur X si

$$\forall x, y \in X \quad \exists ! \, g \in G \quad y = gx \qquad (\text{cet élément } g \text{ se note } g_{yx})$$

Il revient au même de dire que l'action est transitive et que

$$\forall x \in X \quad G_x = \{e\}$$

On dit encore dans ce cas que X est un espace homogène principal sous G. La donnée de n'importe quel point $x \in X$ définit alors une bijection naturelle de X sur G :

$$\underset{(\text{transitivité})}{X \simeq G.x} \ \underset{(2.3)}{\simeq G/_{G_x}} \simeq G$$

Par exemple l'ensemble des bases d'un espace vectoriel V est un espace homogène principal sous $GL(V)$.

3.4 Si G commutatif agit fidèlement et transitivement sur X, G agit simplement transitivement.

Preuve : Comme l'action est fidèle, on a $\{e\} = N = \bigcap_{x \in X} G_x$. Mais tous les G_x sont conjugués (2.7) par transitivité, donc égaux puisque G est commutatif. Par suite : $\forall x \in X \quad G_x = N = \{e\}$. ∎

3.5 C'est faux si G n'est pas commutatif : considérer l'action du groupe G des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, sur l'ensemble $\mathbb{R}$, définie par $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = ax + b$.

3.6 Si X est un espace homogène principal sous G, l'application
$$\Phi : X\times X \longrightarrow G \qquad (x,y) \longmapsto \Phi(x,y) = g_{yx}$$
vérifie les deux propriétés suivantes :

(1) $\forall x\in X$ l'application $\Phi_x : X \longrightarrow G$, $y \longmapsto \Phi(x,y)$ est bijective

(2) $\forall x,y,z\in X \qquad g_{zy}\, g_{yx} = g_{zx}$ ("relation de Chasles")

Réciproquement, la donnée d'une application $\Phi : X\times X \to G$ vérifiant (1) et (2) définit une action simplement transitive de G sur X, par laquelle $\Phi(x,y) = g_{yx}$.

Preuve : La première assertion est claire. Pour la réciproque, on pose
$$\forall x\in X,\ g\in G \qquad gx = \Phi_x^{-1}(g)$$
Comme la relation de Chasles implique que $g_{xx} = e$ pour tout x, on a bien $ex = \Phi_x^{-1}(e) = x$. Si maintenant $\Phi_x^{-1}(g) = y$ et $\Phi_x^{-1}(h) = z$, on a $y = gx$ et $z = hy$, d'où $g = g_{yx}$, $h = g_{zy}$ et donc $hg = g_{zx}$ par (2), soit $(hg)x = h(gx)$. Le reste est clair. ∎

L'application Φ_x s'appelle choix de l'origine au point x.

3.7 Si X est homogène principal sous G commutatif, on notera $\vec{xy} = \Phi(x,y)$.
Dans ce cas on a : $\forall x,y\in X \quad y = x + \vec{xy}$,
la relation de Chasles s'écrit : $\forall x,y,z\in X \quad \vec{xy} + \vec{yz} = \vec{xz}$
et implique $\forall x\in X \quad \vec{xx} = 0$, et $\forall x,y\in X \quad \vec{xy} = -\vec{yx}$.

3.8 Si G agit sur X, H sur Y, et $u : G\to H$ est un morphisme de groupes, on dit qu'une application $f : X\to Y$ est u-équivariante si le diagramme suivant est commutatif :
$$\begin{array}{ccc} G\times X & \xrightarrow{\ \cdot\ } & X \\ {\scriptstyle u}\downarrow\ \ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ H\times Y & \xrightarrow{\ \cdot\ } & Y \end{array}$$
autrement dit si $\forall x\in X\ \forall g\in G \qquad f(gx) = u(g)\, f(x)$.

Si $H = G$ et $u = id_G$, on dit alors que f est G-équivariante.
Si de plus $Y = X$, l'ensemble des bijections G-équivariantes de X forme le groupe structural de X sous G.

§4 EXERCICES

4.1 a) Montrer que le groupe des rotations de l'espace qui conservent un cube est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$ (en étudiant son action sur les diagonales du cube). Décrire les orbites de l'action de ce groupe sur les points qui sont sur la surface du cube. (elles ont 6, 8, 12, ou 24 éléments. Décrire le groupe S des isométries de l'espace qui conservent le cube : donner toutes les façons de le "dévisser" en "produit semi-direct" (cf. II.3.6) de $\mathfrak{S}_4$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

b) On appelle "solide platonicien" un polyèdre dont toutes les faces sont des polygones réguliers égaux, dont le même nombre est joint en chaque sommet.
Démontrer qu'il y en a cinq qui sont ceux du tableau suivant.
Vérifier que $S-A+F=2$, où S, A, F sont les nombres de sommets, arêtes, faces

c) Étant donné un solide platonicien, les centres des faces sont les sommets d'un autre solide platonicien, appelé son dual. Comment se transforment S, A, F par dualité. Qui est dual de qui ?

On note S (resp. S_d) le groupe des isométries (resp. isométries directes) de l'espace (on dit les "symétries") qui conservent l'un de ces solides. Montrer qu'un solide et son dual ont mêmes S et S_d.

d) Pour le tétraèdre, établir que $S \simeq \mathfrak{S}_4$ et $S_d \simeq \mathfrak{A}_4$. Description géométrique.

e) Tous les autres ont un centre de symétrie. En déduire que S est un produit semi-direct (cf. II.3.6) de S_d et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

f) Montrer que le dodécaèdre possède cinq "cubes inscrits" (c'est-à-dire dont les sommets sont pris parmi ses sommets). En étudiant l'action de S_d sur ces cubes, établir que $S_d \simeq \mathfrak{A}_5$

g) Décrire le plus explicitement possible S et S_d dans chaque cas.

h) On suppose le solide inscrit à une sphère de rayon 1. Calculer les longueurs des arêtes, les distances de deux sommets.

4.2 On note G le plus grand sous-groupe de $GL(2,\mathbb{R})$ qui, agissant sur $\mathbb{R}^2$, conserve $\mathbb{Z}^2$ globalement.

a) Montrer que G est le groupe des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ et $ad-bc=\pm 1$

b) Si $(p,q)\in\mathbb{Z}^2$, on note $p\wedge q \begin{cases} \text{le pgcd de } p \text{ et } q \text{ s'ils sont nuls} \\ |p| \text{ si } q=0,\ |q| \text{ si } p=0,\ 0 \text{ si } p=q=0 \end{cases}$

Montrer que (p,q) et (p',q') sont dans la même G-orbite si et seulement si $p\wedge q = p'\wedge q'$.
Décrire le stabilisateur de $(1,0)$, puis de tout point. Donner un isomorphisme entre les stabilisateurs de deux points quelconques (autres que $(0,0)$).

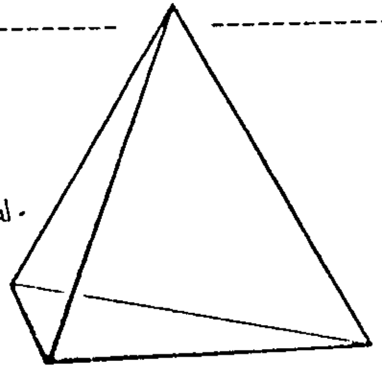
c) On fait maintenant agir G sur $\mathbb{Z}^2\times\mathbb{Z}^2=\mathbb{Z}^4$. Décrire toutes les orbites
Lesquelles sont des espaces homogènes principaux sous G ?

d) Même questions en remplaçant $GL(2,\mathbb{R})$ par $GL^+(2,\mathbb{R})$.

LES SOLIDES DE PLATON

TETRAEDRE

4 sommets
6 arêtes
4 faces
chaque face
est un triangle équilatéral.

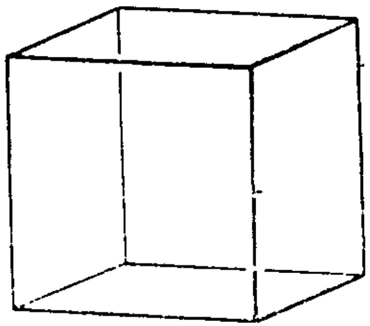


$S \cong \mathfrak{S}_4$

$S_d \cong A_4$

CUBE

8 sommets
12 arêtes
6 faces
chaque face
est un carré.

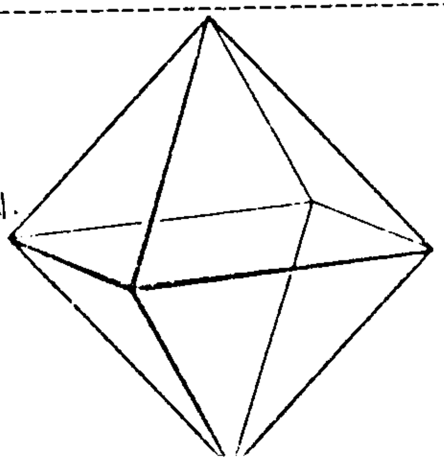


$S \cong \mathfrak{S}_4 \times \{-1,1\}$

$S_d \cong \mathfrak{S}_4$

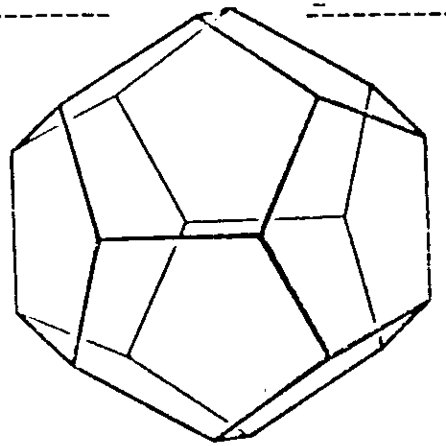
OCTAEDRE

6 sommets
12 arêtes
8 faces
chaque face
est un triangle équilatéral.



DODECAEDRE

20 sommets
30 arêtes
12 faces
chaque face est
un pentagone régulier.

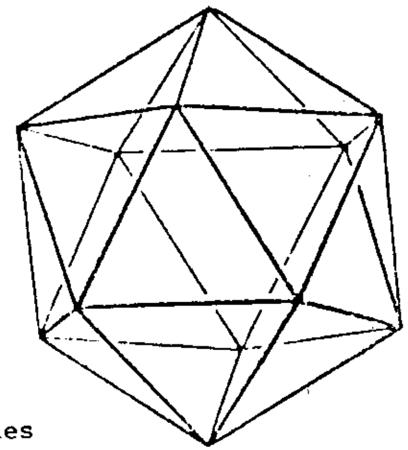


$S \cong A_5 \times \{-1,1\}$

$S_d \cong A_5$

ICOSAEDRE

12 sommets
30 arêtes
20 faces
chaque face
est un triangle équilatéral.



S est le groupe des isométries du solide S.

S_d est le sous-groupe des isométries directes.

---- relie deux solides duaux.

4.3 Action de $SL(2,\mathbb{R}) = G$ sur le demi-plan de Poincaré $X = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$

a) Soit $G_0 = GL^+(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R} \text{ et } ad-bc>0 \right\}$. Pour $g_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G_0$ et $z \in X$ on pose $h_{g_0}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Montrer que h est une action transitive à gauche de G_0 sur X de noyau N isomorphe à $(\mathbb{R}^*, \times)$ et que $G_0/_N \simeq G/_{\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}} = \tilde{G}$. En particulier G agit aussi transitivement sur X (par $h|_G$).

b) Calculer le stabilisateur G_i de $i = \sqrt{-1}$. Montrer que $G_i \simeq \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$, que $\lambda(z) = \left|\frac{z-i}{z+i}\right|$ ne dépend que de l'orbite $G_i \cdot z$ de $z \in X$. Calculer $\arg\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$ pour $g \in G_i$, et en déduire une description géométrique de l'orbite $G_i \cdot z$ et de l'action de G_i

c) Soit $G_\infty = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G \mid c = 0 \right\}$. Montrer que $G_\infty/_{\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}} = \tilde{G}_\infty$ agit simplement transitivement sur X, de même que $G_\infty^+ = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G_\infty \mid a > 0 \right\}$. Décrire explicitement des isomorphismes $G/_{G_i} \simeq G \cdot i \simeq X \simeq G_\infty^+ \cdot i \simeq G_\infty^+ \simeq \tilde{G}_\infty$

d) Montrer que l'ensemble des éléments de G qui conservent la partie imaginaire de tout point de X forme un sous-groupe $T \subset G_\infty$ et que $T \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$. On pose $T^+ = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in T \mid a > 0 \right\}$. Décrire les $T^\pm$ orbites.

e) Montrer que l'ensemble des éléments de G qui conservent l'argument de tout point de X forme un sous-groupe $H \subset G_\infty$ et que $H \simeq (\mathbb{R}^*, \times)$. Décrire les H-orbites. Montrer que T^+ est distingué dans G_∞, et que la suite exacte $\{e\} \to T^+ \hookrightarrow G_\infty \to G_\infty/_{T^+} \to \{e\}$ admet une section $G_\infty/_{T^+} \xrightarrow{\sim} H \overset{i}{\hookrightarrow} G_\infty$ (cf. II.3 6)

f) Déduire de ce qui précède que <u>toute matrice M de G_0 s'écrit de façon unique</u>

$$M = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v \\ \sin v & \cos v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & w^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ avec } u \in \mathbb{R}^*, 0 \le v < \pi, w > 0, x \in \mathbb{R}.$$

A quelle décomposition géométrique de la transformation h_M cela correspond-il ?

g) Montrer que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{a+d}{2} + i\frac{b-c}{2} & \frac{a-d}{2} - i\frac{b+c}{2} \\ \frac{a-d}{2} + i\frac{b+c}{2} & \frac{a+d}{2} - i\frac{b-c}{2} \end{pmatrix}$

est un isomorphisme de $SL(2,\mathbb{R})$ sur le groupe G' des matrices $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ telles que $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$ (on peut utiliser O.13)
et que G' agit (par $z \mapsto \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta} z + \bar{\alpha}}$) dans le disque-unité ouvert D du plan complexe.
L'action de G' sur D s'identifie à celle de G sur X (par O.13).
Reprendre les questions (b) à (f) dans ce nouveau cadre.