PUblications

PÉdagogiques

GÉOMÉTRIE POUR l'ENSEIGNEMENT

A. Cérézo

PUPÉ n° 2

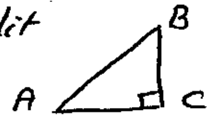
Décembre 1987

IMP. MATHS

Laboratoire de Mathématiques, Parc Valrose, 06034 NICE CEDEX , France

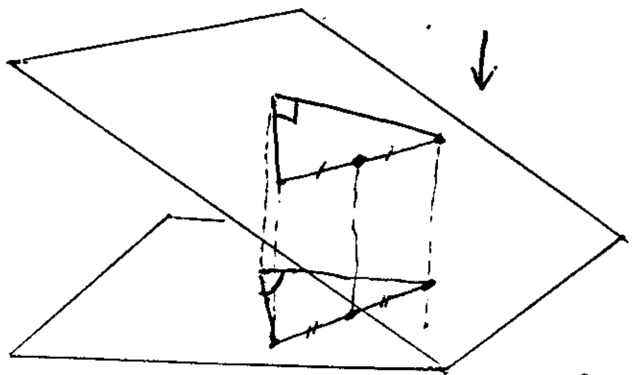
INTRODUCTION

Il s'agit d'apprendre la géométrie "classique", c'est-à-dire une chose que vous connaissez déjà en partie, mais d'un point de vue plus profond. On va parler de points, de droites, de vecteurs, d'angles, de plans, de cercles, de paraboles, etc.., et faire pas mal de figures. C'est l'une des parties les plus anciennes des mathématiques : on trouve des énoncés de géométrie, par exemple des "relations dans le triangle" sur des tablettes babyloniennes de la période d'Agade (~3.000 av. J.C), et sur des papyrus égyptiens dont les originaux remontent sans doute à l'Ancien Empire (à peu près les mêmes dates). On trouve par exemple dans ces deux types de sources des cas (présentés comme exercices) du théorème dit "de Pythagore" : $AB^2 = AC^2 + BC^2$



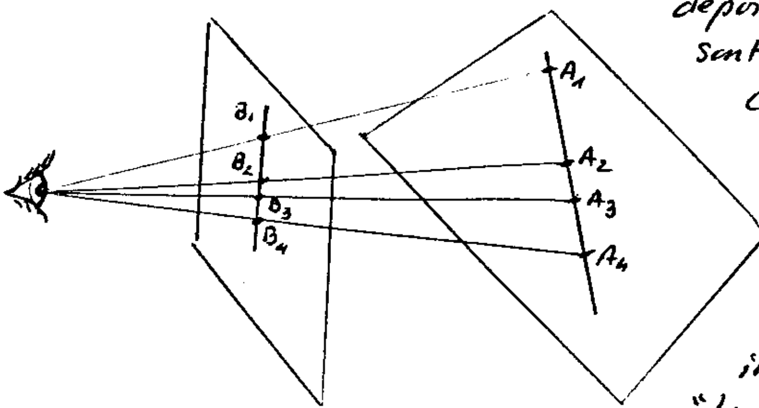
Certains des énoncés les plus classiques portent les noms de Grecs qui vivaient dans la période 700-400 av. JC, qui est un premier "âge d'or" de la géométrie. Ce trésor de connaissances fut conservé par les Byzantins pendant 1000 ans et transmis aux Perses, puis aux Arabes. A la fin du moyen-âge, il passe en Europe, ou va s'ouvrir un deuxième âge d'or, qui commence en France au XVIIe siècle et se répand en Europe. Mais c'est aussi le début d'une période de croissance "géométrique" (c'est le cas de (ne pas) le dire) de toutes les branches des mathématiques, qui dure jusqu'à ce jour, et dans laquelle la géométrie tend à perdre son indépendance. C'est au XIXe siècle et en Allemagne que se développent les idées (groupes, invariants) à la base d'un exposé actuel de la vieille géométrie, qui n'est plus aujourd'hui que le premier chapitre, un peu momifié de la "géométrie" moderne (géométries "algébrique", "différentielle", "topologie", ...)

Partons d'une évidence : l'idée de "longueur" n'est intéressante que parce qu'elle reste inchangée par un déplacement (tout menuisier ou vitrier qui livre une commande, ou quiconque achète des chaussures par correspondance le sait bien).
Une conséquence, un peu moins banale, est qu'on ne peut espérer comprendre à fond la notion de "longueur" qu'en étudiant le groupe de ces "déplacements", c'est-à-dire des transformations qui la conservent (par lesquelles elle est "invariante").
Quiconque feuillette un atlas et constate avec stupeur sur une carte de la planète que le Groenland y paraît plus gros que l'Amérique du Sud, se doute que la projection de Mercator ne respecte ni les longueurs ni les aires, ni même les rapports de longueurs ou d'aires (elle n'est pourtant pas sans intérêt, ayant d'autres invariants).



Une transformation qui ne respecte ni longueurs ni angles est la projection d'un plan sur un autre parallèlement à une direction donnée.
Pourtant celle-ci laisse invariants les rapports de longueur (on disait jadis les "proportions") :
le milieu d'un segment se transforme en le milieu...

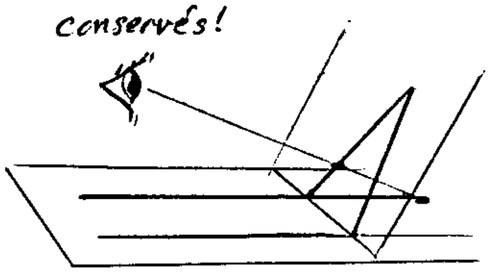
Mais les "projections" que chacun pratique inconsciemment depuis qu'il a ouvert les yeux sont encore plus bouleversantes, car ce sont des "perspectives" qui ne conservent ni longueurs ni proportions.



S'il est évident qu'elles conservent l'alignement, un invariant plus subtil est le "birapport" de 4 points alignés :

$$\frac{\dfrac{A_1A_3}{A_1A_4}}{\dfrac{A_2A_3}{A_2A_4}} = \frac{\dfrac{B_1B_3}{B_1B_4}}{\dfrac{B_2B_3}{B_2B_4}}$$

Ce sont maintenant les "rapports de rapports de longueurs" qui sont conservés!



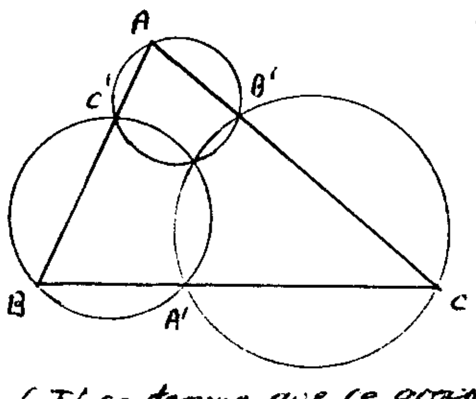
Notons aussi que ces perspectives transforment deux droites parallèles en deux droites concourantes, expérience courante depuis l'invention du chemin de fer, mais que Léonard de Vinci enseignait déjà à ses élèves.

On voit qu'un énoncé de géométrie n'aura de sens que si l'on précise à "quelle" géométrie il appartient, c'est-à-dire quel est le groupe de transformations (de la figure) qui le laisse invariant.

On peut imaginer des groupes énormes qui ne laissent plus grand'chose invariant : si vous possédez un mouchoir à rayures, froissez-le dans votre poche, les rayures sont devenues des courbes très compliquées, mais le nombre de régions (limitées par les rayures), par exemple, n'a pas changé ; la projection Mercator déjà citée conserve, pour deux pays, la propriété d'avoir une frontière commune ; imaginez deux élastiques comme sur le dessin

: on ne peut pas plus les séparer en tirant dessus que si c'étaient des anneaux de bronze. Les invariants qu'on vient de citer sont du domaine de la "topologie" (invariants par toute transformation "continue").

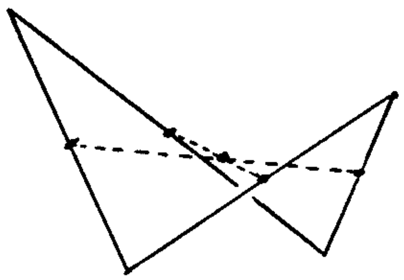
Les trois "géométries" dont il sera question dans ce cours (euclidienne, affine, projective) ont pour ambition de décrire les (ou plutôt des) invariants des trois groupes de transformations suivants (grosso modo) :



Le premier est celui qui conserve les <u>longueurs</u> (géométrie <u>euclidienne</u>) : un énoncé typique est le suivant : quel que soit le triangle ABC et les trois points A', B', C' choisis sur chaque côté, les cercles qui passent par A, B', C', par A', B, C', et par A', B', C, sont concourants.

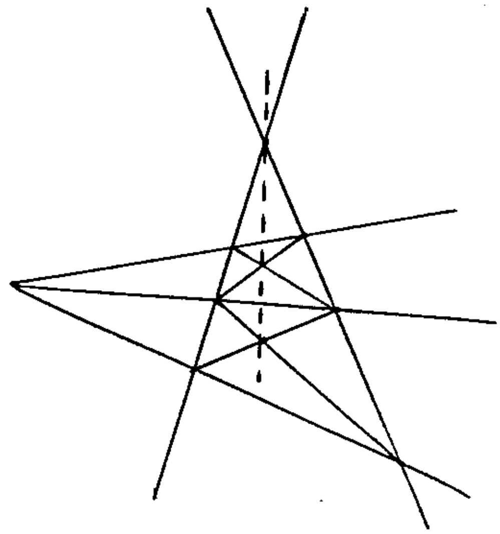
(Il se trouve que ce groupe conserve aussi les angles, mais l'inverse est faux : les "homographies" du paragraphe suivant conservent bien les angles, mais pas les longueurs.)

Le second est celui qui conserve les rapports de longueur (géométrie affine) : dans cette géométrie, dire par exemple que deux triangles sont égaux, ou qu'une courbe fermée est un cercle, n'a pas de sens ; un énoncé typique sera par exemple :



les segments joignant les milieux des cotés opposés d'un quadrilatère (même gauche) se coupent en leur milieu.

Le troisième est celui qui conserve les birapports de longueurs (géométrie projective) : ici la notion de "milieu" a disparu, mais pas celle d'alignement, et par exemple, un énoncé typique de cette géométrie est celui que suggère la figure ci-contre : les 3 points qui ont l'air d'être alignés le sont.



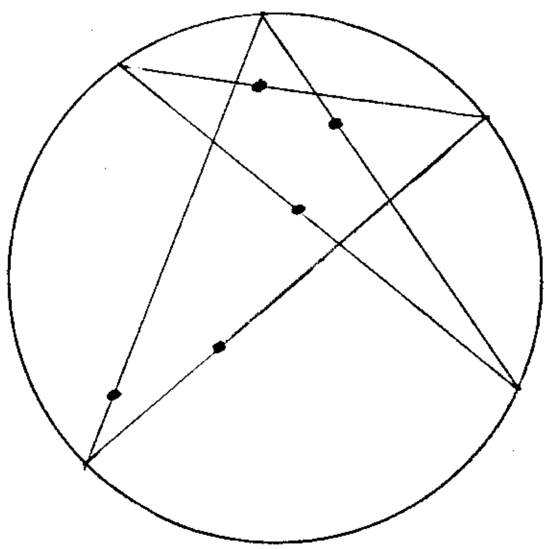
Pour donner un sens précis à ces idées intuitives, il faut préciser ce que transforme le "groupe de transformations" dont on parle, autrement dit l'espace de la géométrie qu'on étudie. Eh bien c'est l'"espace" au sens de tout le monde, celui dont les usagers du métro ont la nostalgie. Depuis Descartes au moins (déjà les Egyptiens anciens...), on lui accorde "trois dimensions indépendantes" (sans compter le temps !), et une texture "continue", c'est-à-dire qu'on admet qu'il ressemble fort à $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (mais qui donc est un triple zéro ?).

Il est bon de savoir que ce n'est pas nécessaire pour "faire de la géométrie", et que jusqu'à une date récente (1960 ?) beaucoup de géomètres se promenaient dans un espace qui ne devait rien (ou si peu) aux nombres (réels ou autres), mais était plutôt un ensemble abstrait de points qui se groupaient en droites, etc..., assaisonné seulement d'un système d'axiomes (« par deux points passe une seule droite » ; etc..).

Ce sport vivifiant est passé de mode et la géométrie est devenue une province de l'algèbre (sans référendum). On y gagne en généralité (on se hâte de remplacer la dimension 2 ou 3 par n, ou ∞, et $\mathbb{R}$ par un corps quelconque ...), et encore bien plus dans le champ d'étude (courbes algébriques de <u>tout</u> degré, variétés différentiables, ...). Mais, tout comme la "Graecia capta" a fait des Romains, la géométrie a gardé son langage et la vision qu'il porte, et a su en pénétrer toute l'algèbre, avec les plus grands fruits. C'est pourquoi la pratique de la géométrie même la plus "classique" ne sert pas qu'à passer le CAPES ...

On ne s'étonnera pas, après ces réflexions, que le premier chapitre de ce cours s'intitule "Actions de groupes", et que les deux premiers (et certains paragraphes des suivants) ne soient que la mise en place d'un appareil algébrique assez lourd, et même lourdaud. On voudra bien les ingurgiter, dans l'attente du dessert.

En attendant, qui sait comment, étant donné un cercle et cinq points à l'intérieur, construire un "quinquilatère" inscrit au cercle et dont chaque coté passe par l'un des points ? et combien y-a-t-il de solutions ? n'est-ce pas 12 "en général" ?



PRÉLUDE - LE GROUPE DES HOMOGRAPHIES DE LA SPHÈRE DE RIEMANN

<u>0.1</u> On appelle <u>homographie</u> h_M une application de la forme $z \xrightarrow{h_M} \frac{az+b}{cz+d}$, où $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice inversible à coefficients complexes. Soit $S = \mathbb{C} \amalg \{\infty\}$ la "<u>sphère de Riemann</u>". h_M devient une application de S dans S lorsqu'on pose $h_M(-\frac{d}{c}) = \infty$, $h_M(\infty) = \frac{a}{c}$ (et si $c=0$, $\frac{a}{c} = -\frac{d}{c} = \infty$).

<u>Proposition: Les homographies forment un sous-groupe $\mathcal{H}$ du groupe des bijections de S, isomorphe au quotient de $GL(2,\mathbb{C})$ par son centre.</u>

Preuve: $h_M \circ h_{M'} = h_{MM'}$ et $h_I = id_S$, d'où $h_{M^{-1}} = (h_M)^{-1}$; les homographies sont donc des bijections de S, et $M \mapsto h_M$ est un morphisme de groupes de $GL(2,\mathbb{C})$ dans $\mathcal{H}$, surjectif par définition, et de noyau l'ensemble des M telles que: $\forall z \in S \quad az+b = cz^2+dz \iff a=d$ et $b=c=0$. ∎

<u>0.2</u> Une homographie a toujours un ou deux points fixes.
Par exemple les points fixes de $z \longmapsto \frac{z-(5-i)}{z+(2i-2)}$ sont $1+i$ et $2-3i$.

<u>0.3</u> Les transformations classiques du plan complexe connues sous le nom de rotations, homothéties et translations sont des homographies ($z \mapsto a(z-z_0)+z_0$ avec $|a|=1$; $z \mapsto a(z-z_0)+z_0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$; $z \mapsto z+b$) et engendrent le sous-groupe $\mathcal{H}_\infty$ de $\mathcal{H}$ des transformations de la forme $z \mapsto az+b$ ($a,b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$), appelées <u>similitudes directes</u>. $\mathcal{H}_\infty$ est exactement le sous-groupe de $\mathcal{H}$ formé des homographies qui laissent ∞ fixe. Celles qui n'ont pas d'autre point fixe sont les translations.

<u>0.4</u> Une homographie est déterminée par les images de trois points, puisque le système linéaire $\begin{cases} az_1+b-cz_1z'_1-dz'_1=0 \\ az_2+b-cz_2z'_2-dz'_2=0 \\ az_3+b-cz_3z'_3-dz'_3=0 \end{cases}$
est toujours de rang 3 : c'est clair si $(1,1,1)$, (z_1,z_2,z_3), et (z'_1,z'_2,z'_3) sont libres; si $z'_j = \alpha z_j + \beta$ $(j=1,2,3)$, le déterminant $|z_j, z_jz'_j, 1|$ est de Vandermonde.

<u>0.5</u> On appelle <u>birapport</u> de quatre points z_1,z_2,z_3,z_4 de S, et on note (z_1,z_2,z_3,z_4) le point de S $\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} \cdot \frac{z_4-z_2}{z_4-z_1}$, avec les conventions évidentes.

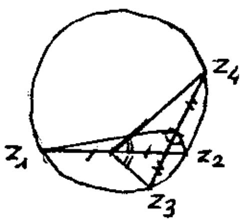
Si $\lambda = (z_1,z_2,z_3,z_4)$, on a $\begin{cases} (z_2,z_1,z_3,z_4) = (z_1,z_2,z_4,z_3) = \frac{1}{\lambda} \\ (z_1,z_3,z_2,z_4) = (z_4,z_2,z_3,z_1) = 1-\lambda \end{cases}$

Par suite, par permutation des points, le birapport prend les six valeurs λ, $\frac{1}{\lambda}$, $1-\lambda$, $\frac{1}{1-\lambda}$, $1-\frac{1}{\lambda}$ et $1-\frac{1}{1-\lambda}=\frac{1}{1-\frac{1}{\lambda}}=\frac{\lambda}{\lambda-1}$.

Elles sont distinctes sauf si $\lambda\in\{-1,2,\frac{1}{2}\}$, $\lambda\in\{-j,-j^2\}$, ou $\lambda\in\{\infty,0,1\}$.
Le dernier cas ne se produit pas si les quatre points sont distincts.
Si $(z_1,z_2,z_3,z_4)=-1$, on dit que les quatre points forment une <u>division</u> (ou un quadrangle) <u>harmonique</u>. Dans ce cas, si $z_4=\infty$, z_3 est le milieu de $[z_1,z_2]$.

<u>0.6</u> On appelle <u>cercle</u> de S un cercle de $\mathbb{C}$, ou une droite de $\mathbb{C}$ à laquelle on rajoute $\{\infty\}$.

<u>Proposition: Quatre points sont cocycliques (= sur un même cercle) si et seulement si leur birapport est réel.</u>



Preuve: $\arg(z_1,z_2,z_3,z_4)=0\ (\pi)$

$\Leftrightarrow\ (\overrightarrow{z_3z_1},\overrightarrow{z_3z_2})=(\overrightarrow{z_4z_1},\overrightarrow{z_4z_2})\ (\pi)$

et on conclut par le théorème des angles inscrits (VIII.2.6) ■

En particulier si $(z_1,z_2,z_3,z_4)=-1$, les quatre points forment la figure ci-contre ("quadrangle harmonique").

<u>0.7</u> <u>Proposition: Une homographie conserve le birapport de quatre points. Inversement, toute bijection de S qui conserve le birapport de quatre points est une homographie.</u>

Preuve: On peut vérifier la première par un calcul. Si $h: S\xrightarrow{\sim}S$ conserve le birapport et envoie z_1,z_2,z_3 sur z'_1,z'_2,z'_3, elle envoie z sur z' tel que

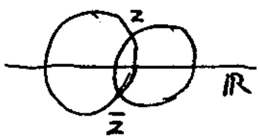
$$\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}\cdot\frac{z-z_2}{z-z_1}=\frac{z'_3-z'_1}{z'_3-z'_2}\cdot\frac{z'-z'_2}{z'-z'_1}\ \dots\ ■$$

En fait, (z_1,z_2,z_3,z_4) est l'image de z_4 par l'homographie qui envoie z_1,z_2,z_3 sur $\infty,0,1$, et c'est une autre façon de montrer qu'une homographie conserve le birapport.

<u>0.8</u> On appelle <u>groupe circulaire</u> le groupe $\mathcal{C}$ des bijections de S qui transforment tout cercle en cercle. Par 0.6 et 0.7, on a $\mathcal{H}\subset\mathcal{C}$. Mais la transformation $z\overset{\sigma}{\longmapsto}\bar{z}$ (avec $\bar{\infty}=\infty$) appartient à $\mathcal{C}-\mathcal{H}$.

<u>Proposition: $\mathcal{C}$ est engendré par $\mathcal{H}$ et σ.</u>

Preuve: Si $f\in\mathcal{C}$, quitte à composer par un élément de $\mathcal{H}$, on peut supposer par 0.4 que f conserve trois points, par exemple ∞, 0, et 1. Comme f conserve ∞, elle transforme toute droite de $\mathbb{C}\simeq\mathbb{R}^2$ en une droite de $\mathbb{C}$. Par le théorème fondamental de la géométrie affine (III.5.5 et III.5.11) f est donc affine de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Conservant 0, elle est linéaire, et conservant 1, elle conserve $\mathbb{R}$ point par point. Si $a\in\mathbb{R}^+$, les points $a,-a,ia$, et $-ia$ sont cocycliques. Donc $f(a)=a$, $f(-a)=-a$, $f(ia)$ et $f(-ia)=-f(ia)$ aussi, ce qui implique que $f(ia)$ est de module a, donc que le cercle de centre 0 et de rayon a est globalement conservé



Appliquant ce raisonnement aux transmuées de f par des translations réelles, on conclut que f conserve globalement tous les cercles centrés sur $\mathbb{R}$. Par suite:

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad f(z) = z \text{ ou } \bar{z} \qquad \text{(cf. la figure)}$$

On conclut que $f = id$ ou σ en remarquant que si D est une droite, $f(D)$ aussi, et $D \cap \mathbb{R} = D \cap \bar{D}$ est fixe. ■

Remarques: En fait $\mathcal{H}$ est distingué dans $\mathcal{C}$, et $\mathcal{C}/\mathcal{H} = \{\hat{id}, \hat{\sigma}\}$
La proposition signifie, d'après 0.6 et 0.7, que toute bijection de S qui conserve la réalité du birapport le conserve en fait, ou le conjugue.
Cela signifie aussi que toute transformation du groupe circulaire est le produit de certaines (une de chaque au plus) des cinq transformations élémentaires suivantes: rotation, translation, homothétie, symétrie par rapport à une droite, et "inversion" ($z \longmapsto \frac{1}{\bar{z}}$). On peut faire en sorte que ce produit soit commutatif.
Cela implique encore que toute transformation du groupe circulaire conserve les angles orientés (homographie) ou les opposé (homographie composée avec σ).

<u>0.9 Si $h \in \mathcal{H}$ n'a qu'un seul point fixe a, elle est déterminée par la donnée de a, d'un autre point z_0 et de son image, de la façon suivante: on a $(a, x, z_0, h(z)) = -1$, où x est défini par $(a, x, h(z_0), z) = -1$
En particulier h est déterminée par a et $b = h(\infty)$, et la droite $\langle ab \rangle$ est globalement invariante.</u>

Preuve: Soit $h_0 \in \mathcal{H}$ telle que $h_0(z_0) = z_0$, $h_0(h(z_0)) = h(z_0)$, $h_0(a) = \infty$ (cf. 0.4)
Alors $h' = h_0 \circ h \circ h_0^{-1}$ a pour seul point fixe ∞, et $h'(z_0) = h(z_0)$. Par 0.3 c'est donc la translation de vecteur $\overrightarrow{z_0 h(z_0)}$, et h est bien déterminée.
Elle l'est aussi par la condition ci-dessus. Pour vérifier que ces deux déterminations coïncident, il suffit de le faire quand h est une translation, puisque h_0 conserve le birapport (0.7). Or si $h = t_{\vec{v}}$, on a
$a = \infty$, et $(a, x, h(z_0), z) = -1 \Leftrightarrow x = \frac{z + z_0 + \vec{v}}{2} \Leftrightarrow (a, x, z_0, h(z)) = -1$.
En particulier pour $z_0 = \infty$, $h(z_0) = b$, il vient que $h(z) = \frac{a + x}{2}$, où x est défini par $(a, x, b, z) = -1$ (quadrangle harmonique). Si $z \in \langle a, b \rangle$, x aussi, donc $h(z)$ aussi. ■

<u>0.10 Si $h \in \mathcal{H}$ a deux points fixes a et b, le birapport $(a, b, z, h(z))$ est constant.</u>

Preuve: Un simple calcul montre que

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_1, z_2, z_5, z_6) \Rightarrow (z_1, z_2, z_3, z_5) = (z_1, z_2, z_4, z_6)$$

Par suite si z_0 est choisi

$$(a, b, z_0, z) = (a, b, h(z_0), h(z)) \text{ et donc } (a, b, z, h(z)) = (a, b, z_0, h(z_0)).$$ ■

<u>0.11 Une homographie $h \neq id_S$ est involutive (id est $h^2 = id_S$) si et seulement si elle a deux points fixes a et b, et que:</u>

$$\forall z \in S \quad (a, b, z, h(z)) = -1 .$$

<u>En particulier l'image de ∞ est alors $\frac{a+b}{2}$, et h est le produit commutatif d'une inversion et d'une symétrie par rapport à une droite.</u>

Preuve: Si h n'avait qu'un seul point fixe, on trouverait comme en 0.9 $h_o \in \mathcal{H}$ telle que $h_o \circ h \circ h_o^{-1}$ soit une translation. Mais aucune translation n'est involutive. Donc h a deux points fixes a et b. Si alors $(a, b, z, h(z)) = \lambda$ (par 0.10) on a $\lambda^2 = 1$, d'où $\lambda = -1$. La figure formée par a, b, z, h(z) est donc un quadrangle harmonique, et le reste s'en déduit (cf. 0.6). ■

<u>0.12</u> Si une homographie h conserve globalement $\mathbb{R} \amalg \{\infty\}$, les coefficients de sa matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sont proportionnels à des réels, et on peut donc les supposer tous réels. Comme

$$\operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{ad-bc}{|cz+d|^2} \operatorname{Im} z ,$$

ou bien h échange $P = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ et $\overline{P} = \{\operatorname{Im} z < 0\}$, si $ad-bc<0$, ou bien conserve globalement chacun, si $ad-bc>0$. Dans ce cas, on peut supposer $ad-bc=1$. Autrement dit le groupe des homographies associées aux matrices de $SL(2,\mathbb{R})$ agit sur le "demi-plan de Poincaré" P.

<u>0.13</u> L'homographie $z \xmapsto{W} \frac{z-i}{z+i}$ envoie $\mathbb{R} \amalg \{\infty\}$ sur le cercle-unité et P sur le disque-unité ouvert $D = \{|z| < 1\}$. Toute homographie de S qui conserve D s'écrit donc $h_{M'} = W \circ h_M \circ W^{-1}$, avec $M \in SL(2,\mathbb{R})$. On a $W^{-1} : z \longmapsto i\frac{1+z}{1-z}$, et M' est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & -\bar{\alpha} \end{pmatrix}$ avec $|\beta|^2 - |\alpha|^2 = 1$.