CHAPITRE VI : HYPERBOLICITÉ ET CARACTÉRISTIQUES

§1 LE(S) THÉORÈME(S) DE CAUCHY-KOVALEVSKA

Le "problème de Cauchy" est très souvent "bien posé", pourvu qu'on raisonne dans des espaces de fonctions très régulières (analytiques (réelles), c'est ce que signifie ici $\mathcal{A}$), où l'on prend les données et cherche l'inconnue, et pourvu qu'on se contente d'un résultat très "local". C'est ce que dit le fameux "théorème de Cauchy-Kovalevska".

U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $N\in\mathbb{N}^*$, $T>0$; on se donne $f\in\mathcal{A}(U\times]-T,T[\to\mathbb{C}^N)$, et pour $0\leq j\leq n$, des $A_j\in\mathcal{A}(U\times]-T,T[\to M_N(\mathbb{C}))$, enfin $u_0\in\mathcal{A}(U,\mathbb{C}^N)$. On cherche $u\in\mathcal{A}(U\times]-T,T[\to\mathbb{C}^N)$ solution du "problème de Cauchy" :

$$(*)\quad\begin{cases}\partial_t u=\sum_{j=1}^{n}A_j(t,x)\partial_j u+A_0(t,x)u+f(t,x)\\ u(0,x)=u_0(x)\end{cases}\qquad(\forall x\in U,\ t\in]-T,T[)$$

<u>Remarque</u> : Les données (et l'inconnue) étant analytiques, se prolongent automatiquement (et uniquement) aux valeurs <u>complexes</u> des variables (t,x), et on peut reposer le problème $(*)$ en remplaçant $\mathcal{A}$ par $\mathcal{O}$ ("holomorphe"), U par un voisinage V de U dans $\mathbb{C}^n$, et $]-T,T[$ par un disque ouvert de $\mathbb{C}$; c'est bien en fait dans ce cadre, qu'on le résout.

> <u>Théorème (de Cauchy-Kovalevska)</u> : Pour tout ouvert V tel que $\overline{V}\Subset U$, il existe $T'\in]0,T[$, tel que le problème $(*)$ ait une et une seule solution $u\in\mathcal{A}(V\times]-T',T'[\to\mathbb{C}^N)$

<u>Idée de la preuve</u> : on raisonne d'abord localement, au voisinage d'un point $(x_0,0)$, avec $x_0\in V$: on développe en série toutes les données, et on cherche le développement en série de la solution ; par identification des coefficients, on montre l'existence et l'unicité d'une série formelle solution ; on montre sa convergence par la méthode dite des "séries majorantes" (qui utilisent la compacité de $\overline{V}$ dans U). L'unicité d'un prolongement analytique montre que les solutions locales ainsi obtenues dans des voisinages de $(x_0,0)$ se recollent. $\overline{V}$ étant compact, on peut le recouvrir par un nombre fini de tels voisinages $V_{x_0}\times]-T',T'[$, d'où l'existence d'un $T'>0$ qui convient sur tout l'ouvert V. ∎

<u>Remarques</u> 1) Le problème $(*)$ est en fait un problème de Cauchy posé (et résolu) pour un <u>système</u> de N équations aux dérivées partielles, mais de <u>degré un</u>. On va montrer qu'on peut souvent ramener une équation de degré plus élevé à un tel système (et donc aussi un système de telles équations) : c'est la deuxième forme du théorème, ci-dessous.

2) La preuve ci-dessus est la preuve "classique". On en connaît d'autres aujourd'hui, plus abstraites (analyse fonctionnelle), moins "calculatoires", et légèrement plus générales : en particulier on peut se passer de

l'hypothèse d'analyticité en t.

3) La faiblesse de ces "théorèmes de Cauchy-Kovalevska" est double
 – les données doivent être <u>analytiques</u>, au moins en espace ; C^ω ne suffit pas ! (cf § 2)
 – le résultat est très <u>local</u> surtout en temps : on ne va pas très loin dans la prédiction de l'avenir (cf. la météo.)

4) Les énoncés donnés ici portent sur des systèmes linéaires ; mais il y a aussi des versions "non linéaires"

<u>On peut toujours ramener le problème de Cauchy</u>

$$(**)\begin{cases} \partial_t^m u = \sum\limits_{\substack{|\alpha|+p\le m\\ p<m}} a_{p,\alpha}(t,x)\partial_t^p\partial_x^\alpha u + f(t,x) \\ \partial_t^k u(0,x) = g_k(x) \text{ pour } 0\le k\le m-1 \end{cases}$$

, sous les mêmes hypothèses d'analyticité : $a_{p,\alpha}\in \mathcal{A}(U\times]-T,T[\to M_N(\mathbb{C}))$, $f\in\mathcal{A}(U\times]-T,T[\to\mathbb{C}^N)$ et les $g_k\in\mathcal{A}(U\to\mathbb{C}^N)$, <u>à un problème</u> (*), en introduisant des inconnues auxiliaires (mais il y a beaucoup de façons de le faire), par exemple :
en posant $u_0=u$, $u_j=\partial_j u$ $(1\le j\le n)$, $u_{n+1}=\partial_t u$, puis $U=(u_0,\dots,u_{n+1})$ on peut récrire la première équation sous la forme

$$\partial_t^{m-1}u_{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1}\sum_{\substack{|\alpha|+p\le m-1\\ p<m-1}} b_{p,\alpha}(t,x)\partial_t^p\partial_x^\alpha u_j + f ,$$

qui combinée avec les contraintes $\partial_t^{m-1}u_0=\partial_t^{m-2}u_{n+1}$ et $\partial_t^{m-1}u_j=\partial_t^{m-2}\partial_j u_{n+1}$ $(1\le j\le n)$, donne un système (équivalent) du type

$$\partial_t^{m-1}U = \sum_{\substack{|\alpha|+p\le m-1\\ p<m-1}} C_{p,\alpha}(t,x)\partial_t^p\partial_x^\alpha U + F$$

et on peut aussi récrire les conditions initiales (comme $\partial_t^k u_0(0,x)=g_k(x)$ $(0\le k\le m-2)$, $\partial_t^k u_j(0,x)=\partial_j g_k(x)$ $(0\le k\le m-2, 1\le j\le n)$ et $\partial_t^k u_{n+1}(0,x)=g_{k+1}(x)$) sous la forme $\partial_t^k U(0,x)=G_k(x)$ $(0\le k\le m-2)$.

Autrement dit, on a transformé le problème (**) en un problème de la même forme, équivalent, avec $m-1$ au lieu de m, comme degré de l'équation principale. Itérant ce procédé tant que $m>1$, on se ramène finalement au problème (*) (Mais la taille N du système croît à chaque étape, et assez vite !). En conséquence :

<u>Théorème (de Cauchy Kovalevska)</u> : Pour tout ouvert V tel que $\overline{V}\Subset U$ il existe $T'\in]0,T[$, tel que le problème (**) ait une solution et une seule $u\in\mathcal{A}(V\times]-T',T'[\to\mathbb{C}^N)$.

<u>Remarque</u> : Ce n'est pas n'importe quel système qui peut se mettre sous la forme (**), qui est "diagonalisée en ∂_t^m", et où le temps joue un rôle très particulier ; on verra au § 3 comment rendre ce résultat plus "intrinsèque".

§2 HYPERBOLICITÉ

On ne fait ici que donner quelques indications sur cette notion importante : elle peut se définir pour un système d'e.d.p., même non linéaires, mais on n'envisage que le cas d'une seule équation, linéaire et à coefficients constants, et celui, auquel on peut la ramener comme au §1, d'un système linéaire de degré un à coefficients constants : considérons le problème de Cauchy

$$(*)\begin{cases} \partial_t u = \sum_{j=1}^{n} A_j \partial_j u + A_0 u + f \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \quad (\text{les } A_j \in M_N(\mathbb{C}), 1 \leq j \leq n, \text{ et } A_0 \in \mathbb{C} \text{ sont } \underline{\text{constants}})$$

On dira que ce problème est "<u>bien posé</u>" (dans la catégorie différentiable) si, pour toutes données de $f \in C^0(\mathbb{R}_t \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$ et $u_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ il admet une unique solution $u \in C^1(\mathbb{R}_t \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$, et que cette solution est $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ quand les données le sont !

Dans ce cas, on peut démontrer que l'application $(f, u_0) \mapsto u$ est continue pour la topologie de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+1})$ dans le cas C^∞ (par le théorème du graphe fermé, donc via le théorème de Baire !) et de même faiblement continue dans le cas de $\mathcal{D}'$.

Pour $\xi \in \mathbb{R}^n$, notons $A(\xi)$ la <u>matrice</u> $\sum_{j=1}^{n} \xi_j A_j$. On a alors le résultat fondamental suivant :

<u>Théorème (de Gårding)</u> : Le problème (*) est bien posé si et seulement s'il a la propriété suivante :
(H) $\exists C > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda$ valeur propre de $A(\xi) - iA_0$, $\lvert \operatorname{Im} \lambda \rvert \leq C$

<u>Argument de la preuve</u> : Cette condition caractérise la "stabilité" du système différentiel ordinaire $\partial_t \tilde{u} = \left(\sum_{j=1}^{n} A_j (i\xi_j) + A_0\right)\tilde{u} + \tilde{f}$, obtenu par transformation de Fourier "formelle" sur les variables d'espace... !

<u>Définition</u> : On dit que le système (*) est <u>hyperbolique</u> s'il vérifie (H).

<u>Remarques</u>. 1) <u>Si $A_0 = 0$</u>, les valeurs propres λ de la condition (H) sont celles de $A(\xi)$, donc homogènes de degré 1 en ξ, et (H) équivaut alors à dire qu'elles sont toutes <u>réelles</u>. Pour $A_0 \neq 0$ (mais forcément petit devant $A(\xi)$ pour $|\xi|$ assez grand, on peut montrer que (H) <u>implique</u> que les valeurs propres de $A(\xi)$ sont réelles ; mais ce n'est plus suffisant...

2) Par contre, on a les deux conditions <u>suffisantes</u> suivantes (qui sont toutes les deux des hypothèses de <u>diagonalisabilité</u> (sur $\mathbb{R}$) du système :

— si <u>$A(\xi)^* = A(\xi)$</u>, (*) est hyperbolique

— si $A(\xi)$ a, partout $\xi \neq 0$, toutes ses <u>valeurs propres réelles et distinctes</u>, (*) est hyperbolique.

Dans le deuxième cas, on dit que (*) est "<u>fortement hyperbolique</u>", et cette condition, comme ses conséquences, s'étend au cas de systèmes à coefficients variables (elle doit alors être vérifiée en chaque point.)

3) On appelle <u>symbole</u> de l'o. d. l. $P(x,\partial) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\partial^\alpha$, le polynôme (de ξ) à coefficients C^∞ (de x):

$$\sigma(P) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)(i\xi)^\alpha$$

et <u>symbole principal</u> sa partie de plus haut degré

$$\sigma_m(P) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)(i\xi)^\alpha$$

Par exemple, les opérateurs <u>elliptiques</u> (cf. ch. IV, §1) sont ceux dont le symbole principal ne s'annule qu'à l'origine:

$\forall x\in U \ \forall \xi\in \mathbb{R}^n$: $\sigma_m(P)(x,\xi)=0 \Rightarrow \xi=0$

De même le symbole de l'opérateur de (*) est

$$i\tau - \sum_{j=1}^n A_j(i\xi_j) - A_0 = i(\tau-(A(\xi)-iA_0))$$

et les valeurs propres de $A(\xi)-iA_0$ sont les racines du déterminant de (...) dans $\mathbb{C}\times\mathbb{R}^n$ (identifiant τ à $\tau\cdot id_{\mathbb{C}^n}$). On voit que la condition (H) est une <u>propriété algébrique du symbole</u> de l'opérateur de (*).

Plus généralement, le symbole de l'opérateur du système (**) du §1 sera, au facteur i^m près:

$$\tau^m \cdot I_N - \sum_{\substack{|\alpha|+p\leq m\\ p<m}} a_{p,\alpha}\,\tau^p\,\xi^\alpha\cdot i^{p+|\alpha|-m}$$

(c'est une matrice de polynômes), et on peut vérifier que le déterminant de cette matrice n'est que multiplié par une puissance de τ quand on passe de (**) à (*) par la "réduction" du §1 (cf. p. 84)

Il en résulte la <u>caractérisation de l'hyperbolicité</u> dans le cas d'une seule équation:

<u>Théorème</u>: Pour l'opérateur $P(\partial_t,\partial_x) = \partial_t^m - \sum_{\substack{|\alpha|+p\leq m\\ p<m}} a_{p,\alpha}\partial_t^p\partial_x^\alpha$ de symbole $\sigma(P) = P(i\tau,i\xi) = (i\tau)^m - \sum a_{p,\alpha}(i\tau)^p(i\xi)^\alpha$, le problème de Cauchy (**) est bien posé si et seulement si:

(H) $\exists C>0, \forall\xi\in\mathbb{R}^n, \forall\tau\in\mathbb{C}$, $\sigma(P)(\tau,\xi)=0 \Longrightarrow |\mathrm{Im}\,\tau|\leq C$

C'est en particulier le cas lorsque P est fortement hyperbolique, c'est-à-dire lorsque son symbole principal

$$\sigma_m(P)(\tau,\xi) = P_m(i\tau,i\xi) = (i\tau)^m - \sum_{p+|\alpha|=m} a_{p\alpha}(i\tau)^p(i\xi)^\alpha$$

a, pour tout $\xi\in\mathbb{R}^n$ non nul, toutes ses racines en τ <u>réelles et distinctes</u>.

§3 LA MÉTHODE DES CARACTÉRISTIQUES : L'IDÉE

On donne ici un aperçu d'une méthode de résolution d'une équation aux dérivées partielles, très différente de ce qu'on a vu jusqu'ici, de nature purement géométrique et locale. L'idée, due à Lagrange (1736-1813), est de ramener le problème à la résolution d'un système d'équations différentielles ordinaires, que l'on sait en principe résoudre localement (théorème de Cauchy-Lipschitz, par exemple).

Dans le problème de Cauchy tel qu'on l'a posé jusqu'ici, le temps est une variable très différente des variables d'espace ; on va ici le considérer comme une variable ordinaire.

Considérons, dans un ouvert U de $\mathbb{R}$, une e.d.p. linéaire du type

$$(E)\qquad P(x,\partial)u = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\,\partial_j u + c(x)u = f(x)$$

On suppose les a_j et f C^∞ dans U, et on cherche $u \in C^\infty(U)$ aussi. Introduisons le "système caractéristique" :

$$(C)\quad \begin{cases} \mathring{x}_1 = a_1(x_1,\dots,x_n) \\ \mathring{x}_n = a_n(x_1,\dots,x_n) \end{cases}$$

où $\mathring{x}_j = \frac{dx_j}{dt}$: on rajoute une variable t, et on cherche des fonctions $x_1(t),\dots,x_n(t)$ solutions de (C). Le théorème de Cauchy-Lipschitz affirme l'existence de telles solutions, et l'unicité de $x(t) : I \to \mathbb{R}^n$, où I est un petit intervalle de $\mathbb{R}$ autour de 0, et $x \in C^\infty(I,\mathbb{R}^n)$, $x=(x_1,\dots,x_n)$ solution de (C), pourvu que l'on se donne $x(0)=x_0$ (Il donne aussi une méthode de calcul de x, au moins numérique)

Sur une telle "courbe" $x(t)$, appelée courbe caractéristique (il en passe une seule par chaque point x_0 de U), toute solution u de (E) est elle-même la solution d'une équation différentielle ordinaire (E') : si l'on note $w(t) = u(x(t))$, il vient :

$$\frac{d}{dt}w(t) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j u(x(t))\frac{dx_j}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_j(x(t))\,\partial_j u(x(t)) = f(x(t)) - c(x(t))u(x(t))$$

soit : $(E')\qquad \mathring{w}(t) - c(x(t))w(t) = f(x(t))$.

Tant que le théorème de Cauchy s'applique, deux telles courbes caractéristiques ne peuvent se rencontrer (on pourrait l'appliquer au point commun), et on a donc obtenu localement une fibration de U en courbes caractéristiques « parallèles », sur chacune desquelles l'e.d.p. (E) se ramène à une e.d.o (E').

Si l'on coupe chacune de ces courbes par une hypersurface S (définie par un paramétrage local : par $(x_1,\dots,x_{n-1})$ par exemple), $\{x_1,\dots,x_{n-1},t\}$ est localement un système de coordonnées dans U, au voisinage de S ; si l'on se donne la valeur de u sur S,

u sera déterminée par un problème de Cauchy bien posé:

$$\begin{cases} \dot{w}(x_1,\dots,x_{n-1},t) - c(x_1,\dots,x_{n-1},t)w(\dots) = f(\dots) \\ w|_{t=0} = u|_S \end{cases}$$

Encore faut-il que S soit bien "transverse" aux courbes caractéristiques (pour que le théorème des fonctions implicites s'applique). Pour cela il suffit que $\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi$ (où $\varphi = 0$ est une équation de S) ne soit pas orthogonal aux vecteurs tangents aux courbes caractéristiques, $(\dot{x}_j = a_j)$, autrement dit que $\sum_{j=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \neq 0$, soit encore $P_1(x, \overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi) \neq 0$ (sur S) équation qui définit une "hypersurface non caractéristique" S.

Pour chaque hypersurface non caractéristique S, une donnée arbitraire de $u|_S$ détermine une et une seule solution de l'équation (E) dans un voisinage de S dans U.

On a donc ainsi généralisé, ou plutôt rendu intrinsèque le problème de Cauchy!

Remarques: 1) Tout est a priori local dans cette méthode, et ne peut se "globaliser" qu'autant qu'on sait résoudre les e.d.o introduites.

2) L'équation (E) était linéaire, et (E') l'est aussi, mais pas (C)!

3) Par contre cette méthode s'adapte à certaines équation aux dérivées partielles non linéaires (en u, mais linéaires en $\overrightarrow{\text{grad}}\,u$), dont le paragraphe suivant étudie l'exemple le plus simple.

§4 EQUATIONS DE TYPE "BURGER"

Il s'agit d'équations sur un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$ que l'on peut mettre sous la forme:

$$(E) \quad \partial_t u + \sum_{j=1}^{n} F_j(u,t,x)\,\partial_j u = 0$$

Remarques: 1) On suppose donc avoir su se ramener au cas où le coefficient de $\partial_t u$ vaut 1, que ce soit par un changement de variables, ou après avoir divisé par ce coefficient réputé non nul au voisinage d'un point...

2) Ainsi (E) est "hyperbolique en t", au sens que l'hyperplan $\{t=0\}$ est une hypersurface non caractéristique

3) La nouveauté est que les coefficients F_j ne dépendent pas que des variables (t,x), mais aussi de l'inconnue u: l'équation (E) n'est pas linéaire.

Le système caractéristique correspondant s'écrit

$$(C) \quad \begin{cases} \dot{x}_j(t) = F_j(u(t,x),t,x) \\ x_j(0) = x_j^0 \end{cases}$$

et il paraît bien difficile à résoudre sans connaître u ! Mais :

<u>Proposition :</u> <u>u est constante sur les courbes caractéristiques</u>

Preuve : $\frac{d}{dt}u(t,x) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j u \cdot \dot{x}_j + \partial_t u = \partial_t u + \sum_{j=1}^{n} F_j(u,t,x)\partial_j u = 0$. ■

Si l'on s'est donnée $u_0(x) = u(0,x)$, on a donc
$F_j(u(t,x),t,x) = F_j(u_0(x^0),t,x)$, et (C) se récrit :

$$(C) \quad \underline{\dot{x}_j(t) = F_j(u_0(x^0),t,x(t)) \text{ et } x(0) = x^0}$$

système qui admet localement une et une seule solution, dès que les F_j sont assez réguliers.

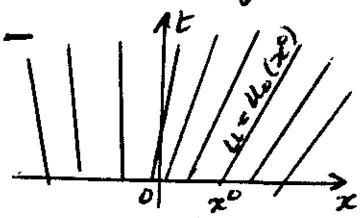
<u>Exemple</u> : <u>l'équation de Burger</u> : $\boxed{\partial_t u + u\,\partial_x u = 0}$ sur $\mathbb{R}^2_{t,x}$

(Bien qu'on la rencontre, par exemple en cinétique des gaz, l'équation de Burger est surtout un "cas d'école", permettant de tester des méthodes d'approche des équations non linéaires, théoriques ou numériques ; c'est en un sens « l'équation non linéaire (et non ordinaire) la plus simple » !)

Le système (C) devient ici : $\dot{x}(t) = u_0(x^0)$ et $x(0) = x^0$
et se résout aussitôt : $\underline{x(t) = u_0(x^0)t + x^0}$

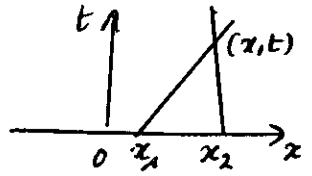
C'est dire que les caractéristiques sont des <u>droites</u>, celle qui passe par $(x^0, 0)$ ayant pour pente $u_0(x^0)$, ou plutôt $\frac{1}{u_0(x^0)}$ si l'on considère t comme fonction de x.

D'où la "géométrie" suivante (on ne s'intéresse à $u(x,t)$ que pour $t \geq 0$) :



– Si la fonction u_0 est partout <u>croissante</u> (même au sens large) les caractéristiques "vont en s'écartant", et la solution est bien définie dans tout $\mathbb{R}_x \times \overline{\mathbb{R}}_t^+$ (par exemple si $u_0(x) = e^x$, u vaut e^{x_0} sur chaque droite d'équation $t = e^{-x_0}(x - x_0)$.)

– dès qu'il existe $x_2 > x_1$ tel que $u_0(x_2) < u_0(x_1)$, les droites caractéristiques issues de x_1 et x_2 vont se rencontrer en un point (x,t) où u devrait valoir à la fois $u_0(x_1)$ et $u_0(x_2)$! Et la méthode ne fournit de solution que localement, dans un certain voisinage (non uniforme en général) de $\{t=0\}$.



La méthode des caractéristiques ne fournit que des bouts de solutions <u>régulières</u> ; rien ne prouve ici que l'on ne peut pas les prolonger en fonctions singulières, toujours solutions, mais en un sens plus faible.

Remarques : 1) L'utilisation des distributions pour résoudre les e.d.p. nonlinéaires se heurte à une grave difficulté : le produit ("point par point") de deux distributions n'est pas défini en général, et il est pour le moins malaisé de donner un sens raisonnable, déjà dans le cas de l'équation de Burger, à $u.\partial_x u$, lorsque $u \in \mathcal{D}'$.

2) Exemple : si $u_0(x) = -x$, u vaut $-x_0$ sur la droite d'équation $x = -x_0 t + x_0 = x_0(1-t)$, donc u y vaut $\frac{x}{t-1}$, donc ∞ pour $t=1$: La solution "explose" au temps $t=1$.

En cinétique des gaz, ceci modélise des phénomènes bien réels (du type du "mur du son")

3) Si l'on cherche à résoudre l'équation de Burger dans tout $\mathbb{R}^2$ la solution va toujours "exploser" soit pour $t>0$, soit pour $t<0$, sauf dans le cas où u_0 est une constante a : c'est la solution triviale $u=a$ partout !

Elle explose le long d'une "caustique" qui est l'enveloppe de la famille des caractéristiques :

---

§5 LES ÉQUATIONS DE JACOBI-HAMILTON

On dit ici quelques mots de la façon de généraliser la méthode des caractéristiques à une e.d.p. linéaire d'ordre $m>1$. Considérons l'opérateur $P(t,x,\partial_t,\partial_x) = \sum_{p+|\alpha|\leq m} c_{p,\alpha}(t,x)\partial_t^p\partial_x^\alpha$ à coefficients C^∞ dans un ouvert $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$, son symbole $\sigma(P) = P(t,x,i\tau,i\xi)$ et son symbole principal
$\sigma_m(P) = P_m(t,x,i\tau,i\xi) = \sum_{p+|\alpha|=m} c_{p,\alpha}(t,x)\, i^m \tau^p \xi^\alpha$

Dès que $P_m(t,x,1,0) \neq 0$ dans U, on peut récrire P sous la forme (**) du §1 (p. 84), puisque cela signifie que $c_{m,0}(t,x)$ ne s'y annule pas, en divisant par ce coefficient, et on pourra lui appliquer les résultats de ce paragraphe.

Mais plus généralement, si l'on connaît une hypersurface S de U, d'équation $\varphi(t,x)=0$, "non caractéristique", c'est-à-dire telle que $P_m(t,x,\partial_t\varphi,\partial_x\varphi)$ ne s'annule pas dans U, on saura se ramener au cas précédent, au moins localement au voisinage de chaque point de S, en remplaçant l'une des coordonnées par $\varphi(t,x)$ (théorème des fonctions implicites), et donc appliquer encore les mêmes résultats : t ne joue plus de rôle particulier ici, c'est l'un des x_j.

Il s'agit d'éviter en chaque point de $\mathbb{R}^n$, le "cône caractéristique" :

$$\Gamma_x = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid P_m(x,\xi) = 0\} \quad (\text{pour } x \in \mathbb{R}^n)$$

Au contraire, on dira que l'hypersurface S est "caractéristique" si en chaque point x de S, $\vec{\text{grad}}\,\varphi(x) \in \Gamma_x$. La recherche des hypersurfaces caractéristiques est importante, puisque c'est là qu'il n'y a plus unicité de la solution du problème de Cauchy : par exemple le bord du support d'une solution est une hypersurface caractéristiques ; de même les singularités d'une solution distribution sont portées par des hypersurfaces caractéristiques ...

Si $m=1$, les hypersurfaces caractéristiques sont "réglées" () par les "courbes caractéristiques" solutions du système (C) du §3. Mais pour $m>1$, (C) n'a plus de sens. On le remplace par le "<u>système de Jacobi-Hamilton</u>"

$$\begin{cases} \dot{x}_j(t) = \dfrac{\partial P_m}{\partial \xi_j}(x,\xi) \\ \dot{\xi}_j(t) = -\dfrac{\partial P_m}{\partial x_j}(x,\xi) \end{cases} \quad \text{et} \begin{cases} x_j(0) = x_0 \\ \xi_j(0) = \xi_0 \end{cases} \quad \text{pour } x_0 \in U,\ \xi_0 \in \mathbb{R}^n \text{ donnés, } \xi_0 \neq 0.$$

Les solutions sont des "courbes" localement définies, à valeurs dans $U \times \mathbb{R}^n$, appelées "<u>courbes bicaractéristiques</u>", et dont les projections dans U "règlent" de même les hypersurfaces caractéristiques cherchées ...

---

§6 THÊMES D'EXERCICES SUR LE CHAPITRE VI

1) Résoudre l'équation différentielle ordinaire $\begin{cases} \partial_t u = 2t(u+1) \\ u(0) = 1 \end{cases}$

a) par "variation de la constante"
b) par "développement en série" (méthode du §1)

2) Ramener le problème de Cauchy (pour le laplacien sur $\mathbb{R}^2$)

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + \partial_x^2 u = \Delta u = 0 \\ u(0,x) = g_0(x)\ ;\ \partial_t u(0,x) = g_1(x) \end{cases}$$

à un système équivalent du premier ordre, par la méthode indiquée au §1. Le résoudre alors comme indiqué au §1, par développement en série, pour $g_0(x) = 0$ et $g_1(x) = 1$.

3) Résoudre le problème de Cauchy (sur $\mathbb{R}^2$) du type (*) du §1 :

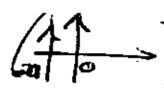
$$(*) \begin{cases} \partial_t u = A\partial_x u + Bu \\ u(0,x) = e^{-x^2} \end{cases} \quad (\text{pour } A, B \in \mathbb{C} \text{ donnés})$$

– par développement en série double
– par changement de variable linéaire

4) Soit $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$, et $F(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-i\tau t - (i\tau)^{1/2}x - (i\tau)^{\alpha})\, d\tau$

(on note, pour $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}^-$, $z^\alpha = \exp(\alpha \log z)$, où $\log$ est la détermination principale du logarithme)

a) Montrer que l'intégrale définit F dans tout $\mathbb{R}^2$, que F est C^∞, et que $\partial_t F = \partial_x^2 F$

b) Montrer que $F(t,x) = \int_{\operatorname{Re} z = -a} \exp(-zt - z^{1/2}x - z^{\theta})\, dz$ () pour tout $a > 0$. (Calcul des résidus)

c) En déduire l'existence de $C > 0$ tel que pour tout $a > 0$,

$$|F(t,x)| \leq C \exp(at + Ca^{\theta})$$

(C dépend de x, mais est borné sur tout compact de $\mathbb{R}_x$)

d) En déduire que $F(t,x) \equiv 0$ pour $t<0$

e) Conclure que l'opérateur de la chaleur n'est <u>pas hyperbolique</u> au sens de Hadamard (c'est-à-dire que le problème de Cauchy n'est pas "bien posé" dans C^∞)

f) Trouver de même une fonction $G(t,x)$, C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, nulle pour $t<0$, telle que $\frac{1}{i}\partial_t G = \partial_x^2 G$

Conclure que l'opérateur de Schrödinger n'est <u>pas hyperbolique</u> au sens de Hadamard.

g) Des quatre opérateurs étudiés au chapitre V, seul $\square$ est <u>hyperbolique</u>.

5) <u>Les équations de Maxwell</u> (dans le vide) s'écrivent:

$$(M) \quad \boxed{\partial_t \vec{E} = \overrightarrow{rot}\,\vec{H}\ ,\ \partial_t \vec{H} = -\overrightarrow{rot}\,\vec{E}\ ,\ \operatorname{div}\vec{E} = 0\ ,\ \operatorname{div}\vec{H} = 0}$$

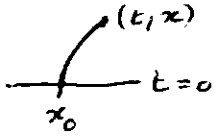
($\vec{E}(t,x,y,z)$ et $\vec{H}(t,x,y,z)$ sont les "champs" électrique et magnétique; pour un champ de vecteurs $\{X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z)\} = \vec{V}(x,y,z)$ sur $\mathbb{R}^3$, on pose $(\operatorname{div}\vec{V})(x,y,z) = \partial_x X + \partial_y Y + \partial_z Z$, et $\overrightarrow{rot}\,\vec{V} = (A,B,C)$, avec $A = \partial_z Y - \partial_y Z$, $B = \partial_x Z - \partial_z X$, $C = \partial_y X - \partial_x Y$)

a) Montrer que chaque composante $F(t,x,y,z)$ de chacun des champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ vérifie l'équation des ondes : $\square F = 0$

b) Le système (M) a la réputation d'être "<u>hyperbolique</u>". Est-ce au sens du § 2. ? Est-ce vrai ?

6) <u>Equations "de convection" unidimensionnelles</u>: On se pose le problème de Cauchy (sur $\overline{\mathbb{R}}_t^+ \times \mathbb{R}_x$) : $(*)\ \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(a(x)u) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$

où a, u_0 sont données, de classe C^1



Soit $x(t)$ la solution de : $\dot{x}(t) = a(x(t))$ et $x(0) = x_0$

a) Montrer que les variables x_0, x, t sont liées par la relation $t = F(x, x_0)$, où $F(x,x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{a(s)}$. En déduire que la solution de $(*)$ peut s'écrire $u(t,x) = u_0(x_0)\cdot\frac{\partial x_0}{\partial x}$ puis $u(t,x) = u_0(x_0)\frac{a(x_0)}{a(x)}$

b) La première formule ci-dessus pour $u(t,x)$ reste vraie si $a = a(t,x)$ dépend aussi du temps. Mais pas la seconde ; comment s'écrit-elle ?

7) Étudier la caustique de l'équation de Burger $\partial_t u + u\partial_x u = 0$, $u(0,x) = u_0(x)$, pour $u_0(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $\frac{1}{\operatorname{Ch} x}$; e^{-x^2} ; $\frac{x}{1+x^2}$; $\frac{1}{1+x^{2n}}$; ...

8) Étudier le cône caractéristique, et les courbes bicaractéristiques en $x=0$, dans le cas

- de l'équation des ondes $\partial_n^2 - v^2\left(\sum_{j=1}^{n-1}\partial_j^2\right)$, $v \neq 0$
- d'un champ de vecteurs $L = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\partial_j$

$\left(a_j \in C^\infty(U),\ \sum_{j=1}^{n}|a_j(x)| \neq 0 \text{ pour } x \in U\right)$.