CHAPITRE V : QUELQUES PROBLÈMES DE CAUCHY

Pour trois des opérateurs "instationnaires" (id est : dépendant du "temps") les plus importants en physique, l'équation de la chaleur $\partial_t - \Delta$, l'équation de Schrödinger $\frac{1}{i}\partial_t - \Delta$, et l'équation des ondes $\partial_t^2 - \Delta$, on répond à deux questions fondamentales :

- trouver une "bonne" solution élémentaire (en particulier tempérée)
- résoudre le problème de Cauchy pour une donnée initiale "raisonnable".

§1 UNE SOLUTION ÉLÉMENTAIRE DE LA CHALEUR

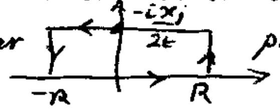
L'équation "de la chaleur" régit des phénomènes de diffusion ; c'est le prototype des équations d'évolution dites "paraboliques".

On cherche une distribution $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x)$ à support dans $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}^n$, et telle que $\partial_t E - \Delta E = \delta_{\mathbb{R}^{n+1}}$. Sa transformée de Fourier partielle en x, $\widetilde{E}$, vérifie alors : $\partial_t \widetilde{E} + |\xi|^2 \widetilde{E} = \delta(t) \otimes 1(\xi)$. Pour $\xi \in \mathbb{R}^n$ fixé, la solution de cette équation différentielle en t dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R}_t)$ est $\widetilde{E}(t,\xi) = H(t) e^{-|\xi|^2 t}$, qui est une fonction $\mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$, associée à une distribution visiblement tempérée : pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$, $|\langle \widetilde{E}, \varphi \rangle| \leq \left(\iint_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{dt\, d\xi}{(1+t^2+|\xi|^2)^{n+2}} \right) \sup (1+t^2+|\xi|^2)^{n+2} |\varphi(t,\xi)|$.

En fait pour tout $t \neq 0$, $\widetilde{E}(t,\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, d'où par inversion de Fourier :

$$E(t,x) = \frac{H(t)}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi.x - t|\xi|^2} d\xi = H(t) e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left(\prod_{j=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-t(\xi_j - \frac{ix_j}{2t})^2} d\xi_j \right)$$

$$= H(t) e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left(\prod_{j=1}^n \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-t\xi_j^2} d\xi_j}_{=\sqrt{\frac{\pi}{t}} \text{ (cf. p.32)}} \right)$$

(par le calcul des résidus sur le contour  puis $R \to \infty$)

soit

$$\boxed{E(t,x) = \frac{H(t)}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}$$

Cette fonction ne coïncide avec E a priori que dans l'ouvert $\{t \neq 0\}$, puisque ce calcul "intégral" de $\mathcal{F}_x$ ne vaut que pour une fonction intégrable ; mais $\partial_t E - \Delta E$ est nulle partout sauf à l'origine, car E y est C^∞.

Mais $E(t,x) \in \mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$ (même à l'origine), ce qui permet d'écrire $\langle \partial_t E - \Delta E, \varphi \rangle$, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ sous forme intégrale, et de vérifier alors, à nouveau par Fourier partiel que ça fait $\varphi(0)$!

La distribution associée à la fonction localement intégrable $E(t,x)$ ci-dessus est donc une solution élémentaire de l'équation de la chaleur, qui est $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$ (mais pas analytique puisque $E|_{t<0} \equiv 0$).

En particulier l'opérateur de la chaleur est hypoelliptique, mais pas hypoelliptique-analytique. (cf. ch. II §6, Théorème, et Remarque 2)

§2 PROBLÈME DE CAUCHY POUR LA CHALEUR

$u_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_x)$ et $f \in \mathcal{D}'(\underbrace{]0,+\infty[}_{=\mathbb{R}_+} \times \mathbb{R}^n)$ étant données, on cherche $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ telle que : $\begin{cases} \partial_t u - \Delta_x u = f \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$ (il faut donc que $u(0,x)$ ait un sens !)

Le résultat de base est le suivant (traitant le cas homogène : $f=0$)

Théorème : Soit $s \in \mathbb{R}$ et $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Il existe une et une seule application continue de $[0,+\infty[\longrightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$, soit $t \longmapsto (u(t))_x = u(t,x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ telle que $\partial_t u - \Delta_x u = 0$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, et $u(0) = u_0$.

Preuve : Si $t \mapsto u(t)$ est continue de $[0,+\infty[$ dans H^s, alors $t \mapsto \Delta_x u(t)$ est continue de $[0,+\infty[$ dans H^{s-2} (composée d'applications continues), et si u est solution, $t \mapsto \partial_t u(t)$ va de $\mathbb{R}^+$ dans H^{s-2}, $\partial_t \tilde{u} = \widetilde{\partial_t u}$ (en notant $\sim$ la transformation de Fourier partielle en x), comme on le voit "faiblement" dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$, d'où $\partial_t \tilde{u} + |\xi|^2 \tilde{u} = 0$ pour $t>0$, donc $\partial_t\left((1+|\xi|^2)^{s/2} \tilde{u}(t,\xi)\right) = -|\xi|^2 \left((1+|\xi|^2)^{s/2} \tilde{u}(t,\xi)\right)$

La parenthèse étant une fonction $\mathbb{L}^2$ de ξ, cette équation s'intègre en $(1+|\xi|^2)^{s/2} \tilde{u}(t,\xi) = C(\xi) e^{-|\xi|^2 t}$, et quand $t \to 0^+$ il vient à la limite et pour presque tout ξ : $C(\xi) = (1+|\xi|^2)^{s/2} \tilde{u}_0(\xi)$. Finalement $\tilde{u}(t,\xi) = \tilde{u}_0(\xi) e^{-|\xi|^2 t}$

Comme $|e^{-|\xi|^2 t}| \leq 1$ et $\tilde{u}_0(\xi)(1+|\xi|^2)^{s/2} \in \mathbb{L}^2$, on a $u(t,x) = (\tilde{u}(t,\xi))^{\sim -1} \in H^s$ pour tout $t \geq 0$ fixé, et la continuité de $t \longmapsto (\tilde{u}_0(\xi) e^{-|\xi|^2 t})^{\sim -1}$ résulte par exemple du théorème de convergence dominée. ∎

Proposition : La solution u du problème de Cauchy précédent est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$

Preuve : En itérant que $\partial_t \tilde{u} = -|\xi|^2 \tilde{u}$, il vient $\partial_t^k \tilde{u}(t,\xi) = (-1)^k |\xi|^{2k} \tilde{u}_0(\xi) e^{-|\xi|^2 t}$, d'où $\|\partial_t^k u\|_{H^{s-2k}} \leq \|u_0\|_{H^s}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. De plus, pour tout $s' \in \mathbb{R}$ $(1+|\xi|^2)^{s'/2} |\xi|^{2k} \tilde{u}_0(\xi) e^{-|\xi|^2 t}$ est dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$ pour tout $t>0$, donc

$$\partial_t^k u(t,\cdot) \in \bigcap_{s' \in \mathbb{R}} H^{s'}(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n). \blacksquare$$

Remarques : 1) Le problème général (non homogène), avec un second membre f (tempéré en x) se traite formellement de la même façon : $\partial_t \tilde{u}(t,\xi) + |\xi|^2 \tilde{u}(t,\xi) = \tilde{f}(t,\xi)$ et $\tilde{u}(0,\xi) = \tilde{u}_0(\xi)$, d'où $\tilde{u}(t,\xi) = C(t,\xi) e^{-|\xi|^2 t}$, avec $\partial_t C(t,\xi) e^{-|\xi|^2 t} = \tilde{f}(t,\xi)$ (méthode de "variation de la constante").

Il s'ensuit que $C(t,\xi) = \int_0^t \tilde{f}(s,\xi) e^{|\xi|^2 s} ds + C_0(\xi)$, puis

$\tilde{u}(t,\xi) = e^{-|\xi|^2 t} \int_0^t \tilde{f}(s,\xi) e^{|\xi|^2 s} ds + C_0(\xi) e^{-|\xi|^2 t}$, et pour $t=0$, $\tilde{u}_0(\xi) = C_0(\xi)$.

Finalement : $$u(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi.x - |\xi|^2 t} \left\{ \tilde{u}_0(\xi) + \int_0^t \tilde{f}(s,\xi) e^{|\xi|^2 s} ds \right\} d\xi \quad !$$

mais cette formule est souvent délicate à exploiter, car les intégrales sont "formelles" : l'une signifie "une certaine primitive de $\tilde{f} e^{|\xi|^2 \cdot}$, à préciser, et l'autre la transformée de Fourier d'une distribution tempérée...

2) Supposons $u_0 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} u_0 \subset \bar{B}(0,A)$. Le théorème de Paley-Wiener (ch III, §4) nous dit alors que $\tilde{u}_0$ est une fonction entière telle que : $\exists N \in \mathbb{N}, C>0, \forall \xi \in \mathbb{C}^n, |\tilde{u}_0(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^N e^{A|\operatorname{Im}\xi|}$. Par suite, pour $t>0$ donné, $\tilde{u}_0(\xi)e^{-t|\xi|^2}$ est encore une fonction entière, et à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^n$ ainsi que toutes ses dérivées en ξ (on majore les dérivées en utilisant la formule de Cauchy). Donc $\tilde{u}(t,\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et par suite $u(t,x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ aussi.

Mais $\tilde{u}$ n'est plus "de type exponentiel" dans les directions imaginaires, car $|e^{-t(\xi+i\eta)^2}| = |e^{-t(\xi^2-\eta^2)-2it\xi\cdot\eta}| = e^{-t\xi^2}e^{t\eta^2}$ ne peut se majorer par $C'e^{R'|\eta|}$ pour aucun couple $R'>0, C'>0$. Il s'ensuit, toujours par le théorème de Paley-Wiener, que $u(t,x)$ n'est pas à support compact (pour aucun $t>0$). Autrement dit : la diffusion de la chaleur se fait instantanément jusqu'à l'infini !

3) Dans l'équation de la chaleur, le signe moins dans $\partial_t - \Delta$ joue un rôle essentiel : il n'est pas question "d'inverser le temps" ($t \mapsto -t$), comme le prouve l'effet "régularisant" de la diffusion, décrit à la proposition précédente. La thermodynamique décrit des phénomènes "non réversibles" !

4) Pour $t \geq 0$ fixé, notons L_t l'application $u_0 \mapsto u(t,\cdot)$ du théorème. C'est un endomorphisme de $H^s(\mathbb{R}^n)$, de norme ≤ 1. De plus, comme $\widetilde{L_{t+t'}(u_0)}(\xi) = \tilde{u}_0(\xi)e^{-|\xi|^2(t+t')} = \left(\tilde{u}_0(\xi)e^{-|\xi|^2 t'}\right)e^{-|\xi|^2 t}$, on a $L_t \circ L_{t'} = L_{t+t'}$, pour tous $t,t' \geq 0$, et $L_0 = id_{H^s}$. On dit qu'on a un semi-groupe d'endomorphismes de H^s

Formellement si l'on pose $D = \lim_{h\to 0} \frac{L_{t+h}-L_t}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{L_h - id}{h}$, on aura $L_t = e^{tD} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}D^n$, et on peut donc reconstituer L_t à partir de la connaissance de son "générateur infinitésimal" D (qui est sa "dérivée" à l'origine). Mais D est ici l'opérateur $\mathcal{F}_\xi^{-1}\circ(-|\xi|^2\cdot)\circ\mathcal{F}_x$, c'est-à-dire le laplacien Δ qui applique H^s dans H^{s-2} : c'est ce qu'on appelle un "opérateur non borné" sur H^s : il n'est défini que sur une partie de H^s, son "domaine" (qui est dense, puisqu'il contient H^{s+2}). Formellement au moins, la solution du problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur peut donc s'écrire :
$\boxed{u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\Delta^n u_0(x)}$. Il resterait à déterminer quelle hypothèse il faut faire sur u_0 pour que la série soit convergente, au moins faiblement !

§3 UNE SOLUTION ÉLÉMENTAIRE DE SCHRÖDINGER

La recherche d'une solution E tempérée de $\frac{1}{i}\partial_t E - \Delta E = \delta$ peut se faire encore par transformation de Fourier partielle (notée ici $\sim$) sur les variables d'espace : $\frac{1}{i}\partial_t \tilde{E} + |\xi|^2 \tilde{E} = \delta(t) \otimes 1_x$, d'où une solution $\tilde{E}$ dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ pour tout ξ fixé : $\tilde{E}(t,\xi) = i H(t) e^{-i|\xi|^2 t}$, qui est une fonction L^∞, donc L^1_{loc}, qui définit bien une distribution tempérée. Mais l'inversion de Fourier est ici un peu plus délicate, car le résultat n'est plus L^1_{loc}. Si l'on pose $\tilde{E}_\varepsilon = i H(t) e^{-(\varepsilon + it)|\xi|^2}$, avec $\varepsilon > 0$, $\tilde{E}_\varepsilon \to \tilde{E}$ quand $\varepsilon \to 0^+$, dans L^1_{loc} (convergence dominée), donc aussi faiblement dans $\mathcal{S}'$! Pour $\tilde{E}_\varepsilon$, le même calcul de l'inversion de Fourier que dans le cas de la chaleur (cf. §1) donne pour $t > 0$:

$$E_\varepsilon(t,x) = i(2\pi)^{-n} \exp\left(\frac{-|x|^2}{4(\varepsilon+it)}\right) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(\varepsilon+it)|\xi|^2} d\xi$$

Quand $\varepsilon \to 0^+$, la dernière intégrale, qui s'écrit $\prod_{j=1}^{n}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-(\varepsilon+it)\xi_j^2} d\xi_j\right)$, tend vers la puissance n-ième de $\frac{1}{\sqrt{t}} J$, où J est « l'intégrale de Fresnel », oscillante mais simplement convergente :

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu^2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos u^2 du - i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin u^2 du .$$

Il est classique (calcul des résidus, après usage de la parité et de $u^2 = v$) que $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos u^2 du = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin u^2 du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Comme $\frac{1-i}{\sqrt{2}} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$, E_ε tend point par point vers la fonction

$$\boxed{E(t,x) = H(t) e^{-i(n-2)\frac{\pi}{4}} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{-|x|^2}{4it}\right)}$$

Mais cette fonction n'est plus L^1_{loc} au voisinage de $t = 0$ (sauf si $n = 1$), et ne peut définir une distribution tempérée que par un procédé de "partie finie" à plusieurs variables (cf. ch. I, § 6, le cas d'une variable ; il s'agirait ici de définir $\mathrm{Pf}\, \frac{H(t)}{(\sqrt{t})^n}$, avec $n = 3$ dans le cas "physique")

Si l'on choisit comme définition de cette partie finie « la limite faible de E_ε quand $\varepsilon \to 0^+$ », alors la distribution associée est bien une solution élémentaire de l'équation de Schrödinger, de support $\overline{\mathbb{R}^+_t} \times \mathbb{R}^n_x$. Comme $E|_{\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}}$ n'est pas C^∞ (même pas L^1_{loc} !) on conclut (ch. II, §6) que l'opérateur de Schrödinger n'est pas hypoelliptique.

§4 PROBLÈME DE CAUCHY POUR SCHRÖDINGER

Pour le problème de Cauchy "homogène": $(*)\begin{cases}\frac{1}{i}\partial_t u - \Delta_x u = 0\\ u(0,x) = u_0\end{cases}$ on a de même (cf §2) le

Théorème: Soit $s \in \mathbb{R}$ et $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Le problème $(*)$ admet une et une seule solution $t \mapsto u(t,x) \in C^0([0,+\infty[\to H^s(\mathbb{R}^n))$. Elle est donnée par: $\forall t \geq 0 \quad \tilde{u}(t,\xi) = \tilde{u}_0(\xi)\, e^{-it|\xi|^2}$, où $\sim$ est la transformation de Fourier dans les variables d'espace.

Preuve: Si u est solution, $\partial_t \tilde{u} = -i|\xi|^2 \tilde{u}$, d'où, en raisonnant comme pour le théorème du §2, la formule ci-dessus, et donc l'unicité. Comme on en déduit $|\tilde{u}(t,\xi)| = |\tilde{u}_0(\xi)|$ (pour presque tout ξ), donc $\|u(t,\cdot)\|_{H^s} = \|u_0\|_{H^s}$, à t fixé, l'application $L_t : H^s \to H^s$ $(u_0 \mapsto u(t,\cdot))$ est bien continue, et même isométrique. La continuité en t résulte encore de la convergence dominée, comme au §2. ∎

Remarques: 1) $L_t : u_0 \mapsto u(t,\cdot)$ définit encore un semi-groupe d'opérateurs unitaires $(\|L_t u\| = \|u\|)$ de chaque H^s $(s \in \mathbb{R})$: $L_t \circ L_{t'} = L_{t+t'}$, et $L_0 = id$ (cf §2, remarque 4). Mais de plus ici, chaque L_t est inversible, et $L_t^{-1} = L_{-t}$ avec $\widetilde{L_{-t}u}(\xi) = \tilde{u}(\xi)\, e^{+i|\xi|^2 t}$, et c'est donc tout un groupe d'isomorphismes unitaires de H^s que définit l'équation de Schrödinger.

Cette équation décrit en effet l'évolution des particules élémentaires en mécanique quantique, et décrit des phénomènes "réversibles": changer t en $-t$ revient à changer i en $-i$ dans l'équation, ce qui est bien sûr indécelable !

2) Le groupe ci-dessus ne produit aucune "régularisation" de la donnée initiale: $L_t(H^s) = H^s$. Par exemple si $u_0 = \delta(x) \in H^{-\frac{n}{2}-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\widetilde{L_t\delta} = e^{-it|\xi|^2}$, d'où $L_t\delta = e^{-in\frac{\pi}{4}}(4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(i\frac{|x|^2}{4t}\right)$ pour $t > 0$ (cf. ci-dessus §3, et chap III, §8, ex 11, d), p. 48). Si l'on choisit $u_0 = L_{-t}\delta$, donc $u_0 = e^{in\frac{\pi}{4}}|4\pi t|^{-\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{-i|x|^2}{4t}\right)$, on aura donc $L_t u_0 = \delta$. Ceci montre d'ailleurs que $|t|^{-\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{\pm i|x|^2}{4t}\right) \in H^{-\frac{n}{2}-\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$, mais pas mieux, comme δ.

3) L'opérateur L_t a un "noyau" K_t, c'est-à-dire que c'est un opérateur de convolution: $\forall u \in H^s$, $L_t u = K_t * u$, où $K_t = L_t\delta$ est la distribution associée à la fonction définie au (2). C'est un "convoluteur de $\mathcal{S}'$", au sens de (chap III, §8, ex 13), puisque $\tilde{K}_t = e^{-it|\xi|^2}$ est, pour tout t fixé, une fonction tempérée.

4) Pour $s = 0$, $H^s = L^2(\mathbb{R}^n)$, et $|u(t,x)|^2$ s'interprète en mécanique quantique comme la densité de probabilité de présence à l'instant t au point x (d'un électron, par exemple):

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^2 dx = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{u}(t,\xi)|^2 d\xi = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{u}(0,\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |u(0,x)|^2 dx = 1.$$

5) Comme pour la chaleur (§2, Proposition), du fait que $\partial_t u = i\Delta u$, on déduit aussitôt par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, que $\|\partial_t^k u\|_{H^{s-2k}} \leq \|u_0\|_{H^s}$.
On ne peut en déduire que $t \mapsto u(t,\cdot)$ est C^∞ de $]0,+\infty[$ dans chaque H^s, comme à la proposition du §2 (et c'est faux), mais cette application est C^∞ (faiblement) à valeurs dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, pour tout $u_0 \in \mathcal{S}$, puisque c'est un convoluteur de $\mathcal{S}'$, de $\mathbb{L}^2$, et de $\mathcal{S}$ (cf. rem. 3)

6) Proposition: Si $u_0 \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap H^s(\mathbb{R}^n)$ pour un certain $s \in \mathbb{R}$, alors $\|u(t,\cdot)\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} = O(|t|^{-n/2})$ quand $t \to \infty$.

Preuve: $u(t,x) = (K_t * u_0)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_t(x-y)\, u_0(y)\, dy$ (cf. remarque 3)
d'où $\sup_x |u(t,x)| \leq \sup |K_t| \cdot \|u_0\|_{\mathbb{L}^1}$, et $|K_t| = (4\pi|t|)^{-n/2}$. ■

Corollaire: Soit E une région de l'espace de volume fini (c'est: $\chi_E \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$)
Alors $\int_E |u(t,x)|^2 dx \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ quand $t \to \infty$.

Preuve: par "régularisation", il existe $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|u_0 - \varphi\|_{\mathbb{L}^2} < \varepsilon$ (pour tout $\varepsilon > 0$ donné), d'où

$$\left(\int_E |u(t,x)|^2 dx\right)^{1/2} = \left(\int_E |L_t u_0(x)|^2 dx\right]^{1/2} \leq \left(\int_E |L_t u_0 - L_t\varphi|^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int_E |L_t\varphi|^2 dx\right)^{1/2}$$
$$\leq \|L_t(u_0-\varphi)\|_{\mathbb{L}^2} + \sup|L_t\varphi| \cdot \sqrt{v(E)} = \|u_0-\varphi\|_{\mathbb{L}^2} + \sqrt{v(E)}\,\|L_t\varphi\|_{\mathbb{L}^\infty}$$

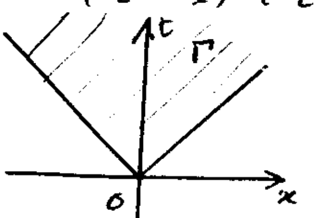
où $v(E) = \int_E dx < \infty$, $\|u_0-\varphi\|_{\mathbb{L}^2}$ est arbitrairement petit, et $\|L_t\varphi\|_\infty$ tend vers zéro quand $t \to \infty$, car $\|L_t\varphi\|_\infty \leq \sup|K_t| \cdot \|\varphi\|_{\mathbb{L}^1}$, et on conclut par la proposition ci-dessus. ■

Interprétation physique du corollaire: Sans influence extérieure (c'est, lorsque le second membre de (*) est nul), les particules élémentaires "s'évanouissent à l'infini" (d'où elles sont venues de toutes façons ! ($t \to -\infty$) « Vanitas vanitatum, et omnia vanitas »)

§5 UNE SOLUTION ÉLÉMENTAIRE DES ONDES

L'opérateur "des ondes" (ou "d'Alembertien" (sic)) gouverne l'évolution de phénomènes "vibratoires"; on le rencontre donc en acoustique par exemple, mais aussi et surtout en électromagnétisme (équations de Maxwell).

— Traitons d'abord le cas $n=1$ (équation "des cordes vibrantes"), qui est très particulier du fait que l'opérateur est alors factorisable en $\square = (\partial_t - \partial_x)\circ(\partial_t + \partial_x) = (\partial_t + \partial_x)\circ(\partial_t - \partial_x)$, ce qui n'est plus le cas pour $n \geq 2$.



Une solution élémentaire est alors

$$E(t,x) = \tfrac{1}{2} H(t-x) H(t+x)$$

qui est à support dans le demi-cône "de lumière" (ou "cône d'avenir") $\Gamma = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid t+x \geq 0 \text{ et } t-x \geq 0\}$

(cf. chap I, §7, ex. 22 p. 16, ex. T_2). On peut aussi écrire
$E(t,x) = \frac{1}{2} H(t)\, H(t^2-x^2)$, puisque $\Gamma = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid t^2 \geq x^2 \text{ et } t \geq 0\}$.

On vérifie que $\underline{(\partial_t^2-\partial_x^2)E=\delta}$, par exemple ainsi : si $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$

$I=\langle(\partial_t^2-\partial_x^2)E,\varphi\rangle=\frac{1}{2}\iint_\Gamma\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(t,x)-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(t,x)\right)dt\,dx.$

Si l'on pose $\begin{cases}u=t+x\\ v=t-x\end{cases}$, il vient $\partial_t=\partial_u+\partial_v$ et $\partial_x=\partial_u-\partial_v$, d'où $\partial_t^2-\partial_x^2=4\partial_u\partial_v$, $dt\,dx=\frac{1}{2}du\,dv$, et $I=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2\varphi(u,v)}{\partial u\partial v}du\,dv=\int_0^{+\infty}-\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,0)du=\varphi(0,0)=\langle\delta,\varphi\rangle.$ ∎

Notons que E est $\mathbb{L}^1_{loc}$ et $\mathbb{L}^\infty$, donc tempérée, mais pas C^∞ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, et l'équation des ondes n'est <u>pas hypoelliptique</u> (même pour $n>1$, comme on va le voir).

— Dans le cas général ($n>1$) on s'intéresse surtout aux propriétés de support et d'invariance d'une "bonne" solution élémentaire (qui permettent de "démontrer" pour $n=3$, en physique, les principes de "causalité", et de la "relativité (restreinte)" !)

On procède, comme dans tout ce chapitre, par transformation de Fourier partielle sur les variables d'espace (notée ici $\sim$) : l'équation $\partial_t^2E-\Delta E=\delta$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$ devient $\partial_t^2\tilde{E}+|\xi|^2\tilde{E}=\delta(t)\otimes 1_\xi$, ce qui se résout facilement dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R}_t)$ à ξ fixé, par le calcul symbolique (ch II, § 5) : $(\delta''+|\xi|^2\delta)^{*-1}=(\delta'-i|\xi|\delta)^{*-1}*(\delta'+i|\xi|\delta)^{*-1}=H(t)e^{i|\xi|t}*H(t)e^{-i|\xi|t}$, d'où $\tilde{E}(t,\xi)=H(t)\frac{\sin|\xi|t}{|\xi|}$ (et $tH(t)$ pour $\xi=0$), qui pour ξ fixé est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_t)$, donc est la transformée de Fourier d'une distribution tempérée. Comme $\tilde{E}(t,\xi)$ n'est pas intégrable en t, on remarque que c'est la limite faible, quand $\varepsilon\to0^+$, de $\tilde{E}_\varepsilon(t,\xi)=H(t)e^{-\varepsilon t}\frac{\sin|\xi|t}{|\xi|}$, et $\hat{E}(\tau,\xi)$ est donc la limite faible de $(\tilde{E}_\varepsilon)^{\wedge t}=\int_0^{+\infty}e^{-it(\tau-i\varepsilon)}\frac{\sin|\xi|t}{|\xi|}dt=\frac{1}{2i|\xi|}\int_0^{+\infty}\left(e^{-i(\tau-i\varepsilon-|\xi|)t}-e^{-i(\tau-i\varepsilon+|\xi|)t}\right)dt$

$=\frac{-1}{2|\xi|}\left(\frac{1}{\tau-i\varepsilon-|\xi|}-\frac{1}{\tau-i\varepsilon+|\xi|}\right)=\frac{-1}{(\tau-i\varepsilon)^2-|\xi|^2}$

D'où $\langle E,\check{\varphi}\rangle=\langle\hat{\hat{E}}^{-1},\check{\varphi}\rangle=\langle\hat{E},\hat{\check{\varphi}}^{-1}\rangle=-(2\pi)^{-n-1}\lim_{\varepsilon\to0}\iint\frac{\hat{\varphi}(\tau,\xi)\,d\tau\,d\xi}{(\tau-i\varepsilon)^2-|\xi|^2}$

Pour $\varphi\in\mathcal{D}$, la fonction sous l'intégrale est holomorphe en τ tant que le dénominateur ne s'annule pas (Paley-Wiener) ; on peut donc (calcul des résidus) translater dans l'imaginaire l'intégration en τ : pour tout $a>0$

$\langle E,\check{\varphi}\rangle=(2\pi)^{-n-1}\lim_{\varepsilon\to0}\iint\frac{\hat{\varphi}(\tau-ia,\xi)\,d\tau\,d\xi}{(\tau-ia-i\varepsilon)^2-|\xi|^2}$, ce qui trivialise la limite en ε :

$\langle E,\check{\varphi}\rangle=(2\pi)^{-n-1}\iint\frac{\hat{\varphi}(\tau-ia,\xi)\,d\tau\,d\xi}{(\tau-ia)^2-|\xi|^2}$ (pour tout $a>0$)

La même manipulation vaut pour les variables "d'espace" ξ, à condition de ne jamais annuler le dénominateur ; finalement :

$\forall(a,b)\in\mathbb{R}^{n+1}$, $|b|^2<a^2$ et $a>0$, $\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$

$$\boxed{\langle E,\check{\varphi}\rangle=-(2\pi)^{-n-1}\iint\frac{\hat{\varphi}(\tau-ia,\xi-ib)\,d\tau\,d\xi}{(\tau-ia)^2+(\xi-ib)^2}}$$

définit une <u>solution élémentaire de $\square$</u>, tempérée (l'intégrale ne dépend pas de (a,b) soumis aux conditions prescrites).

C'est la solution qui nous intéresse, car elle répond aux deux énoncés :

<u>Proposition : E est invariante par la composante connexe de l'origine du groupe de Lorentz</u>

"<u>Rappels</u>" (sic) : <u>Le groupe de Lorentz</u> (homogène ; on compose avec les translations, pour obtenir le groupe entier) est le sous-groupe (fermé) de $GL(\mathbb{R}^{n+1}_{\tau,\xi})$ des transformations linéaires qui conservent la forme quadratique $\tau^2-|\xi|^2$ (qui définit la pseudo-"métrique" de Minkovsky (=relativiste) sur l'"espace-temps" local $\mathbb{R}^{n+1}$). Il est découpé en deux par le déterminant (qui vaut ± 1), et chaque composante encore en deux par le "signe de t", conservé ou non : il a donc quatre composantes connexes, celle de l'identité étant définie par les conditions : la transformation conserve l'orientation (déterminant) et la flèche du temps (signe de τ).

Soit G_0 cette composante (qui est connexe !). G_0 contient évidemment le sous-groupe $O(n)$ des rotations d'espace (qui conserve séparément $|\xi|$ et τ, et le déterminant)

<u>Preuve :</u> Comme l'intégrale qui définit E est indépendante de $(a,b)\in\mathbb{R}^{n+1}$ sous les conditions $a>0$ et $|b|^2<a^2$, il suffit de montrer que ces conditions sont conservées par une transformation de G_0, ce qui est clair ! ■

<u>Proposition :</u> <u>$\operatorname{supp} E\subset\Gamma=\{(t,x)\in\mathbb{R}^{n+1}\mid |x|^2\leq t^2 \text{ et } t\geq 0\}$ ("cône d'avenir")</u>

<u>Preuve :</u> On sait déjà que $E|_{t<0}=0$ (voir l'expression de $\widetilde{E}$, p. 76). Or les transformations de Lorentz du sous-groupe G_0 transforment le demi-espace ouvert $\{(t,x)\in\mathbb{R}^{n+1}\mid t<0\}$ en n'importe quel autre demi-espace sous le cône d'avenir Γ (c'est-à-dire ne le rencontrant pas), et la réunion de tous ces demi-espaces est le complémentaire de Γ ! ■ (cf. §7, exercice 8)

---

§6 PROBLÈME DE CAUCHY POUR LES ONDES

Le "problème de Cauchy" général, pour une équation aux dérivées partielles sur $\mathbb{R}^{n+1}_{t,x}$ consiste à chercher celles de ses solutions qui ont une "valeur" donnée au "temps" $t=0$ ("condition initiale"). On dit qu'il est <u>bien posé</u> lorsqu'il admet une et une seule solution (dans l'espace où on les cherche !). Lorsque l'équation étudiée est de degré m en temps (id est : fait intervenir les dérivées en temps de l'inconnue jusqu'à l'ordre m), il faut, pour qu'il soit "bien posé", se donner les valeurs pour $t=0$, de toutes ses dérivées en temps jusqu'à l'ordre $m-1$ (phénomène bien connu pour les équations différentielles "ordinaires", c'est-à-dire portant sur les fonctions d'une seule variable). Ainsi pour l'équation des ondes, qui est d'ordre deux, le "problème de Cauchy" est : trouver $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ telle que :

$$(*)\quad\begin{cases}\partial_t^2 u-\Delta_x u=0\\ u|_{t=0}=u_0 \text{ et } \partial_t u|_{t=0}=u_1\end{cases}\qquad (u_0,u_1 \text{ données dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$$

Évidemment les restrictions à $t=0$ auront un sens par le théorème de trace (ch. IV, §4).

Théorème. Pour toute donnée de $s\in\mathbb{R}$, $u_0\in H^s(\mathbb{R}^n)$, $u_1\in H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$, le problème (*) a une et une seule solution $u\in C^0(\mathbb{R},H^s)\cap C^1(\mathbb{R},H^{s-1})$.
De plus l'application $(u_0,u_1)\mapsto(u,\partial_t u)$ est continue de $H^s\times H^{s-1}$ dans $C^0(\mathbb{R},H^s)\times C^1(\mathbb{R},H^{s-1})$ en ce sens qu'il existe une constante $C>0$ telle que, pour toute donnée de $u_0\in H^s(\mathbb{R}^n)$, $u_1\in H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$, et pour tout $t\in\mathbb{R}$

$$\|u(t,\cdot)\|_{H^s}+\|\partial_t u(t,\cdot)\|_{H^{s-1}}\leq C\left(\|u_0\|_{H^s}+(1+|t|)\|u_1\|_{H^{s-1}}\right)$$

Preuve: Par transformation de Fourier en espace, notée ici $\sim$: $\tilde u(t,\xi)$, $\tilde u_0(\xi)$, $\tilde u_1(\xi)$ sont, ou doivent être, des fonctions L^1_{loc} de ξ, à t fixé (par définition des H^s), vérifiant: $\partial_t^2\tilde u+|\xi|^2\tilde u=0$, $\tilde u(0)=\tilde u_0$, $\partial_t\tilde u(0)=\tilde u_1$. Pour ξ fixé, l'équation différentielle se résout en $\tilde u=A\cos|\xi|t+B\sin|\xi|t$, d'où $\tilde u_0=A$ et $\partial_t\tilde u(0)=B|\xi|$
Par suite, nécessairement

$$(**)\qquad \boxed{\tilde u(t,\xi)=\tilde u_0(\xi)\cos|\xi|t+\tilde u_1(\xi)\frac{\sin|\xi|t}{|\xi|}}$$

d'où l'unicité de la solution; on voit aussi sur (**) que u et $\partial_t u$ sont des fonctions C^∞ de t à valeurs dans H^s et dans H^{s-1} respectivement. De plus

$$\|u(t,\cdot)\|^2_{H^s}\leq\int(1+|\xi|^2)^s\left(|\tilde u_0(\xi)|^2|\cos|\xi|t|^2+|\tilde u_1(\xi)|^2\frac{|\sin|\xi|t|^2}{|\xi|^2}\right)d\xi$$

Le deuxième terme de la parenthèse ne pose pas de problème en 0, mais est en $O(t^2)$ dans cette région ($\frac{\sin|\xi|t}{|\xi|}\underset{|\xi|\to0}{\sim}t$), en $|\xi|^{-2}|\tilde u_1(\xi)|^2$ à l'infini, d'où

$$\|u(t,\cdot)\|^2_{H^s}\leq\|u_0\|^2_{H^s}+C^{te}(1+|t|^2)\|u_1\|^2_{H^{s-1}}\leq C^{ste}\left(\|u_0\|_{H^s}+(1+|t|)\|u_1\|_{H^{s-1}}\right)^2.$$

De même, par (**) $\partial_t\tilde u(t,\xi)=\tilde u_1(\xi)\cos|\xi|t-\tilde u_0(\xi)|\xi|\sin|\xi|t$, (***) d'où

$$\|\partial_t u(t,\cdot)\|^2_{H^{s-1}}\leq\int(1+|\xi|^2)^{s-1}\left(|\tilde u_1(\xi)|^2|\cos|\xi|t|^2+|\tilde u_0(\xi)|^2|\xi|^2|\sin|\xi|t|^2\right)d\xi$$
$$\leq\|u_1\|^2_{H^{s-1}}+\|u_0\|^2_{H^s}\leq\left(\|u_0\|_{H^s}+\|u_1\|_{H^{s-1}}\right)^2.\ \blacksquare$$

Définition: On appelle énergie de la solution u de (*) au temps t, le nombre $e(t)$ suivant, défini dès que $s\geq1$:

$$e(t)=\|\partial_t u(t,\cdot)\|^2_{L^2}+\sum_{j=1}^n\|\partial_j u(t,\cdot)\|^2_{L^2}$$

Proposition ("Conservation de l'énergie"): $\boxed{e(t)=e(0)=\|u_1\|^2_{L^2}+\sum_{j=1}^n\|\partial_j u_0\|^2_{L^2}}$ $(\forall t)$

Preuve: De (**) et (***) on tire d'abord

$$\partial_j\tilde u(t,\xi)=i\xi_j\tilde u_0(\xi)\cos|\xi|t+i\xi_j\tilde u_1(\xi)\frac{\sin|\xi|t}{|\xi|},\ \text{puis}$$

$$|\partial_j\tilde u(t,\xi)|^2=|\xi|^2|\tilde u_0(\xi)|^2(\sin|\xi|t)^2+|\tilde u_1(\xi)|^2(\cos|\xi|t)^2-2\mathrm{Re}\left(|\xi|\sin|\xi|t\cos|\xi|t\,\tilde u_0(\xi)\overline{\tilde u_1(\xi)}\right)$$

et $|\partial_j\tilde u(t,\xi)|^2=|\xi_j|^2|\tilde u_0(\xi)|^2(\cos|\xi|t)^2+\frac{|\xi_j|^2}{|\xi|^2}|\tilde u_1(\xi)|^2(\sin|\xi|t)^2+2\mathrm{Re}\left(\frac{|\xi_j|^2}{|\xi|}\sin|\xi|t\cos|\xi|t\,\tilde u_0(\xi)\overline{\tilde u_1(\xi)}\right)$

Finalement: $|\partial_t\tilde u(t,\cdot)|^2+\sum|\partial_j\tilde u(t,\cdot)|^2=|\xi|^2|\tilde u_0(\xi)|^2+|\tilde u_1(\xi)|^2$, ne dépend pas de t, et la formule encadrée s'en déduit en intégrant en ξ. $\blacksquare$

Remarques: 1) La preuve de la proposition montre qu'en fait, c'est à chaque "fréquence" ξ que l'énergie est conservée.

Une autre preuve, moins précise, mais plus directe et instructive se déduit du lemme général: $\forall T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ $\forall j\in[\![1,n]\!]$, $\int_{\mathbb{R}^n}\partial_j T=0$ faiblement

Preuve du lemme : Par densité de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}'$, puisque $\int_{\mathbb{R}^n} \partial_j \varphi = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (intégrer d'abord en x_j). ■

Preuve de la proposition : d'après (*),

$$0 = \partial_t u . \partial_t^2 u - \sum_j \partial_t u \partial_j^2 u = \partial_t \left(\tfrac{1}{2}(\partial_t u)^2\right) - \sum_j \left(\partial_j (\partial_t u \partial_j u) - \partial_j \partial_t u . \partial_j u\right)$$

$$= \partial_t \left(\tfrac{1}{2}(\partial_t u)^2\right) + \sum_j \partial_t \left(\tfrac{1}{2}(\partial_j u)^2\right) - \sum_j \partial_j (\partial_t u \partial_j u)$$

d'où en intégrant (en x) sur $\mathbb{R}^n$, et grâce au lemme :

$$\tfrac{1}{2}\partial_t e(t) = \sum_j \int_{\mathbb{R}^n} \partial_j (\partial_t u \partial_j u)\, dx = 0 \text{, et } e(t) \text{ est constante. ■}$$

2) Si l'on pose $K_t(x) = \left(\frac{\sin|\xi|t}{|\xi|}\right)^{\vee -1}$, la solution de (*) donnée par le théorème s'écrit :

$$\boxed{u = \partial_t K_t * u_0 + K_t * u_1}$$

K_t est le "noyau" de l'équation des ondes : c'est aussi la solution du problème de Cauchy :
$$\begin{cases} \partial_t^2 K - \Delta K = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^{n+1} \\ K|_{t=0} = 0 ,\ \partial_t K|_{t=0} = \delta_{\mathbb{R}^n} \end{cases}$$

puisque $K = \partial_t K_t * 0 + K_t * \delta = K_t$! D'après le théorème, on a donc $K_t \in C^0(\mathbb{R}, H^{-n/2-\varepsilon})$ pour tout $\varepsilon > 0$, puisque $\delta \in H^{-n/2-\varepsilon}$. Mais K_t n'est pas en général une fonction L^1_{loc}, sauf pour $n=1$, comme le montrent les exemples qui suivent.

3) Le cas $n=1$ (équation des "cordes vibrantes")

Rappelons que $\widetilde{\chi_{[-a,a]}}(\xi) = \int_{-a}^{a} e^{-ix\xi} dx = \left.\frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi}\right|_{-a}^{a} = \frac{e^{ia\xi} - e^{-ia\xi}}{i\xi} = 2\frac{\sin a\xi}{\xi}$ $(a>0)$

Comme $\widetilde{K_t}(\xi) = \frac{\sin|\xi|t}{|\xi|} = \frac{\sin \xi t}{\xi}$, il vient $K_t(x) = \frac{1}{2}\chi_{[-t,t]}$, d'où

$(K_t * u_1)(x) = \int K_t(x-y) u_1(y) dy = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(y) dy$, puis

$(\partial_t K_t * u_0)(x) = \frac{1}{2}\partial_t \left(\int_{x-t}^{x+t} u_0(y) dy\right) = \frac{1}{2}\left(u_0(x+t) + u_0(x-t)\right)$, et finalement :

$$\boxed{u(t,x) = \tfrac{1}{2}\left[u_0(x+t) + u_0(x-t)\right] + \tfrac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(y) dy}$$ "Formule des cordes vibrantes"

On voit que $u(t,x)$ ne dépend que des valeurs de u_0 et u_1 sur l'intervalle $[x-t, x+t]$: l'information ne se propage "pas plus vite que la lumière" (de vitesse 1 ici : l'équation des ondes électromagnétiques est $\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta$, où c est la vitesse de la lumière).

4) Le support du noyau : On admettra ici le résultat important que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\operatorname{supp} K_t \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x|^2 \leq t^2 \text{ et } t \geq 0\}$ (le "cône d'avenir") (la preuve est analogue à celle esquissée au §5 pour la solution élémentaire).

L'inclusion ci-dessus est en fait une égalité pour n pair, tandis que K_t est beaucoup plus concentrée, sur le bord du cône pour n impair. Cette propriété de support (et celle du produit de convolution) montre que le principe que "l'information ne va pas plus vite que la lumière", vu ci-dessus pour $n=1$, vaut en toutes dimensions.

- Pour $n=3$ on peut montrer que $K_t = \frac{1}{4\pi t} d\sigma_t$, où $d\sigma_t$ est la mesure de surface de $B(0,|t|)$, d'où :

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi t}\int_{B(0,t)} u_1(s_t)\,ds_t + \partial_t\left(\frac{1}{4\pi t}\int_{B(0,t)} u_0(s_t)\,ds_t\right) \quad \text{pour } t>0$$

et si par exemple $\operatorname{supp} u_0$ et $\operatorname{supp} u_1$ sont contenus dans $\overline{B}(0,R)$, le support de $u(t,x)$ sera contenu dans la couronne $\{-R+|t|\leq|x|\leq R+|t|\}$ dès que $|t|>R$ ("principe de Huygens").

- Pour $\underline{n=2}$ on peut montrer que $K_t = \frac{\operatorname{sgn}(t)}{2\pi\sqrt{t^2-|x|^2}}\chi_\Gamma$, où $\Gamma=\{(t,x)\mid |x|\leq t\}$ et le même raisonnement sur le support d'un produit de convolution montre alors seulement que le support de $u(t,x)$ est contenu dans $\overline{B}(0,R+|t|)$ si $\operatorname{supp} u_0$ et $\operatorname{supp} u_1 \subset \overline{B}(0,R)$.

(§7) THÈMES D'EXERCICES SUR LE CHAPITRE V

1) Soit $u_0(x)$ une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que la solution du problème de Cauchy $\partial_t u - \Delta_x u = 0$ pour $t>0$ et $u(0,\cdot)=u_0$ peut s'écrire pour $t>0$ $\quad u(t,x) = (2\sqrt{\pi t})^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} u_0(y)\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right)dy$

Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, $u(t,x)\to u_0(x)$ quand $t\to 0^+$.

2) On suppose maintenant u_0 $\underline{\text{analytique}}$ sur $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'alors la solution peut s'écrire :

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\Delta_x^n u_0(x) \qquad (\text{cf. §2, remarque 4})$$

la série convergeant au moins localement : $\forall K \Subset \mathbb{R}^n\ \exists t_0>0$, tel que la série est uniformément convergente sur $[-t_0,t_0]\times K$ (Utiliser la formule de Cauchy pour majorer les dérivées d'un prolongement de u_0 aux complexes).

3) <u>Réflexion sur l'"anti-chaleur"</u> : $(*)\begin{cases}\partial_t u + \Delta u = 0\\ u(0,\cdot) = u_0\end{cases}$

a) L'opérateur L_t de la chaleur (§II, théorème et remarque 4) est injectif de H^1 dans H^1 (Montrer que c'est la restriction d'une application $\mathcal{S}'\to\mathcal{S}'$ injective)

b) En déduire l'unicité d'une application $t\mapsto u(t,\cdot)$ qui soit solution de $(*)$ et continue de $[0,T]$ dans $\mathcal{S}'$ (faible)

c) Supposons qu'on puisse écrire $u_0(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x} f(\lambda)\,d\lambda$, même en un sens faible. Montrer que $u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda^2 t} e^{-\lambda x} f(\lambda)\,d\lambda$ est une intégrale qui converge au moins aussi bien, et solution de la question (b).
(comparer aux remarques du ch. III, §7)

d) Et si l'intégrale qui définit u_0 est sur un chemin du plan complexe ? (contenu dans $\operatorname{Re}\lambda^2>0$, par exemple !)

e) Quelles sont les distributions qu'on peut écrire sous une telle forme intégrale ? On rappelle par exemple la "formule de Mellin" :

$$\frac{\Gamma(s)}{x^s} = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\lambda^{s-1}\,d\lambda, \quad \text{dès que } \operatorname{Re} s>0 \text{ et } \operatorname{Re} x>0 \ldots$$

4) Expliciter tous les raisonnements esquissés à la remarque (5) du §4 (à propos du groupe unitaire de l'équation de Schrödinger)

5) L'équation de Schrödinger des § 3 et 4 n'est qu'un cas particulier (une particule dans le vide !), de la vraie équation de Schrödinger décrivant l'évolution de la fonction d'onde d'un "quanton" soumis à un champ dérivant d'un potentiel $V(x)$, et qui s'écrit : $i\hbar\, \partial_t u(t,x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_x u + V(x).u$, soit à des changement d'échelle près :

$\frac{1}{i}\partial_t u - \Delta u + V(x).u = 0$

a) Cas de l'"oscillateur harmonique" : $V(x) = |x|^2$

Montrer que le développement des distributions tempérées en séries de fonctions d'Hermite (ch III ; § 8, ex 14, p 49) permet de résoudre complètement le problème de Cauchy dans ce cas, ... et le faire ! (On pourra commencer par supposer $n=1$ pour simplifier).

b) "L'effet tunnel" : $n=1$ et $V(x) = V\chi_{[a,b]}$ $(V \in \mathbb{R})$

On suppose $u_0 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ et supp $u_0 \subset]-\infty, a[$. Montrer que pour t assez grand, supp $u(t,\cdot) \cap]b, +\infty[\neq \emptyset$. (Reprendre l'étude du § 4 en tenant compte de V...

6) Ondes stationnaires ($n=1$). On note (t,x) un point de $\mathbb{R}^2$. Une distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ est un "onde" si elle est réelle, et dans le noyau de $\square = \partial_t^2 - \partial_x^2$, et on dit qu'elle est "stationnaire" si c'est le produit tensoriel $F_t \otimes G_x$ de deux distributions $F, G \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

a) Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, calculer l'inverse de convolution de $\delta'' - \lambda^2\delta$. En déduire que toute distribution $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $S'' = \lambda^2 S$ est une fonction C^∞ ; les trouver toutes. Lesquelles définissent des distributions tempérées ?

b) Soit $T = F_t \otimes G_x$ une onde stationnaire non nulle. Justifier qu'il existe $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\langle G, \psi \rangle \neq 0$. On pose $\mu = \frac{\langle G, \psi'' \rangle}{\langle G, \psi \rangle}$; montrer que $F'' = \mu F$. En déduire que toute onde stationnaire est une fonction C^∞.

c) On suppose ici que la fonction C^∞ T du (b) est bornée

Montrer que F et G sont des fonctions sinusoïdales de même fréquence, c'est-à-dire chacune de la forme $A \cos\omega(t - t_0)$, avec $A, \omega, t_0 \in \mathbb{R}$, $A > 0$ (ω est la "fréquence" commune, A et t_0 "l'amplitude" et la "phase")

d) En déduire que si des données de Cauchy $T(0,x) = T_0(x)$, $\partial_t T(0,x) = T_1(x)$ déterminent une onde stationnaire bornée, alors T_0 et T_1 sont forcément des fonctions sinusoïdales proportionnelles

e) Réciproquement, si $T_0 = R\cos\omega(x - x_0)$, $T_1 = R'\cos\omega(x - x_0)$, avec $R, R' > 0$, $\omega, t_0 \in \mathbb{R}$, montrer que le problème de Cauchy $\begin{cases} \square T = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \\ T|_{t=0} = T_0,\ \partial_t T|_{t=0} = T_1 \end{cases}$ a une et une seule solution, qui est stationnaire, et l'expliciter

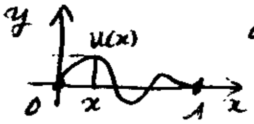
(f) quelles sont les "ondes planes" $\left((t,x) \mapsto e^{i(\tau t + \xi . x)}\right)$ qui sont stationnaires ?

g) que se passe-t-il pour $n > 1$?

7) <u>La "corde vibrante"</u> : On prend toujours $n=1$, et $\Box = \partial_t^2 - \partial_x^2$

a) Montrer que, pour toute fonction d'une variable f deux fois dérivable, $f(x+t)$ et $f(x-t)$ sont dans le noyau de $\Box$. Par un changement de variables dans $\mathbb{R}^2$, en déduire la solution générale de $\Box F = 0$ (F fonction deux fois dérivable), et de $\Box T = 0$ ($T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$)

b) Une corde "vibrante" (c'est-à-dire légèrement élastique, du type d'une corde de violon) est clouée aux points 0 et 1 de l'axe des x ; elle ne se déplace que dans le plan (x,y) (!) Au temps $t=0$ et au point x, elle est soulevée de $u_0(x)$.



On note $u(t,x)$ sa déformation au point x à l'instant $t>0$.
L'équation des cordes vibrantes s'écrit alors $\Box u = 0$
Ecrire le "problème mixte" qui décrit la situation.

c) Montrer que si l'on connait $u_0(x) = u(0,x)$ et $u_1(x) = \partial_t u(0,x)$ on peut déterminer la position de la corde à tout instant $t>0$.

d) Chercher les solutions "harmonieuses", id est périodiques en temps. (On pourra développer le tout en séries de Fourier, qui ont d'ailleurs été inventées à cette occasion !)

8) <u>Le cône d'avenir</u> : Il s'agit de prouver la dernière proposition du §5 : $\operatorname{supp} E \subset \Gamma = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{1+n} \mid |x|^2 \leq t^2 \text{ et } t \geq 0\}$ (où E est définie par $\langle E, \varphi\rangle = -(2\pi)^{-n-1} \iint \frac{\hat{\varphi}(\tau - ia, \xi - ib)\, d\tau\, d\xi}{(\tau - ia)^2 + (\xi - ib)^2}$) ; on sait déjà que $E|_{t<0} = 0$, et que E est invariante par la composante connexe de l'origine G_0 du groupe de Lorentz.

a) Montrer qu'il suffit de prouver que $\forall (t_1,x_1)$ et $(t_2,x_2) \in \mathbb{R}^{n+1}$, avec $t_1<0$ et $(t_2,x_2) \in \mathbb{R}^{n+1} - \Gamma$, il existe $g \in G_0$ telle que $g(t_1,x_1) = (t_2,x_2)$

b) Montrer que G_0 contient le groupe des rotations de $\mathbb{R}^n_x$. En déduire qu'on peut se contenter de prouver le (a) quand x_1 et x_2 n'ont qu'une seule composante non nulle (la première par exemple).

c) Déterminer tous les éléments du groupe de Lorentz pour $n=1$. Quelle est sa composante G_0 ?

d) Conclure.

(9) <u>Le noyau des ondes</u>

a) Préciser dans quels espaces de Sobolev se trouve le noyau K_t de l'équation des ondes (défini au §6, remarque (2))

b) Démontrer les assertions de la remarque (1) du §6 : en particulier, calculer K_t pour $n=2$ et $n=3$.)