CHAPITRE II : L'ESPACE $\mathcal{E}'$ ET LA CONVOLUTION

§1 LES DISTRIBUTIONS A SUPPORT COMPACT

Soit $T\in\mathcal{D}'(U)$, $\operatorname{supp} T = K \Subset U$. On peut étendre T en une forme linéaire sur $\mathcal{E}(U)$ de la façon suivante : si $\alpha\in\mathcal{D}(U)$, $\alpha\equiv 1$ au voisinage de K, pour $\varphi\in\mathcal{E}(U)$, on pose $\langle T,\varphi\rangle = \langle T,\alpha\varphi\rangle$. Si $K'=\operatorname{supp}\alpha$, il existe $m\in\mathbb{N}$ et $C>0$ tels que $|\langle T,\varphi\rangle| \le C\sum_{|\beta|\le m}\sup_{K'}|\partial^\beta(\alpha\varphi)|$ $\le C'\sum_{|\beta|\le m}\sup_{K'}|\partial^\beta\varphi|$, et ceci définit bien une forme linéaire sur $\mathcal{E}(U)$, continue pour la topologie déjà vue (cf. Introduction). On notera $\mathcal{E}'(U)$ le dual de $\mathcal{E}(U)$; comme $\mathcal{D}(U)$ est dense dans $\mathcal{E}(U)$, le prolongement ici construit est le seul possible (on vérifie qu'il ne dépend pas de α, directement par la dernière proposition page 11).

Inversement, soit $S\in\mathcal{E}'(U)$:

$$\exists C>0, m\in\mathbb{N}, K\Subset U, \forall\varphi\in\mathcal{E}(U)\quad |\langle S,\varphi\rangle|\le C\sum_{|\beta|\le m}\sup_K|\partial^\beta\varphi|$$

La restriction de S à $\mathcal{D}(U)$ est bien une distribution, d'où une application $\mathcal{E}'(U)\xrightarrow{i}\mathcal{D}'(U)$, injective par densité de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{E}$. Si $\operatorname{supp}\varphi\cap K=\emptyset$, on a clairement $\langle S,\varphi\rangle=0$, donc $\operatorname{supp} i(\varphi)\subset K$, et en particulier $i(\varphi)$ est à support compact.

On a donc identifié $\mathcal{E}'(U)$ au sous-espace de $\mathcal{D}'(U)$ des distributions qui sont à support compact, et i est clairement faiblement continue.

Remarques : 1) Appelons "support" d'un élément de $\mathcal{E}'(U)$ le plus petit K qui permet la majoration ci-dessus : son support au sens habituel est alors contenu dans K ; mais inversement, le premier raisonnement montre que si $T\in\mathcal{D}'(U)$, $\operatorname{supp}T=K$, son "support" est un compact K' arbitrairement "proche" de K. On peut démontrer que K lui-même convient, et que ces deux notions de support coïncident (par le théorème de Baire).

2) On peut de même définir le produit scalaire $\langle T,\varphi\rangle$, pour $T\in\mathcal{D}'(U)$ et $\varphi\in\mathcal{E}(U)$ dès que $\operatorname{supp}T\cap\operatorname{supp}\varphi$ est compact : il suffit de prendre $\alpha\in\mathcal{D}(U)$, $\alpha\equiv1$ au voisinage de $\operatorname{supp}T\cap\operatorname{supp}\varphi$, de poser $\langle T,\varphi\rangle = \langle \underset{\in\mathcal{D}'}{T}, \underset{\in\mathcal{D}}{\alpha\varphi}\rangle = \langle \underset{\in\mathcal{E}'}{\alpha T}, \underset{\in\mathcal{E}}{\varphi}\rangle$, et de vérifier que le résultat ne dépend pas de α (on a bien sûr $\operatorname{supp}\alpha T\subset\operatorname{supp}\alpha$)

3) Ainsi par exemple dès que $f\in\mathbb{L}^1_{loc}(U)$ et $K\Subset U$, $f\chi_K\in\mathcal{E}'(U)$, ainsi que toutes ses dérivées au sens des distributions.

§2 IMAGES DES DISTRIBUTIONS

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow U' \subset \mathbb{R}^{n'}$ une application C^∞. Les fonctions de $\mathcal{E}(U')$ ont des images réciproques naturelles par f : $f^* : \mathcal{E}(U') \longrightarrow \mathcal{E}(U)$, et de plus l'application f^* est linéaire continue : $\varphi \longmapsto f^*\varphi = \varphi \circ f$

$\forall K \Subset U, m \in \mathbb{N}, c > 0, \exists K' \Subset U', m' \in \mathbb{N}, c' > 0, \forall \varphi \in \mathcal{E}(U')$

$$c \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_K |\partial^\alpha(\varphi \circ f)| \leq c' \sum_{|\beta| \leq m'} \sup_{K'} |\partial^\beta \varphi|$$

(par dérivation d'une composée, et Leibniz ; on peut prendre $m' = m$ et $K' = f(K)$.)

Par transposition, on obtient une application naturelle, linéaire et faiblement continue : $f_* : \mathcal{E}'(U) \rightarrow \mathcal{E}'(U')$, appelée <u>image (directe)</u> :
$\forall T \in \mathcal{E}'(U), \varphi \in \mathcal{E}(U')$, $\quad \langle f_* T, \varphi \rangle = \langle T, f^*\varphi \rangle = \langle T, \varphi \circ f \rangle$

f_* n'a <u>pas</u> en général de prolongement de $\mathcal{D}'(U)$ dans $\mathcal{D}'(U')$, sauf si f est "<u>propre</u>" (l'image réciproque d'un compact est compacte), car dans ce cas f^* se restreint à $\mathcal{D}(U')$ et l'envoie dans $\mathcal{D}(U)$...

Si f est un <u>difféomorphisme</u> il vient que f_* est un isomorphisme faible de $\mathcal{E}'(U)$ dans $\mathcal{E}'(U')$ et de $\mathcal{D}'(U)$ dans $\mathcal{D}'(U')$, d'inverse $(f^{-1})_*$ qui est un prolongement aux distributions de f^*.

Exemple : Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est la translation τ_a, on a $(\tau_a)_* = (\tau_{-a})^*$

<u>Remarque</u> : Ce paragraphe montre que la notion de distribution est "intrinsèque" (invariante par difféomorphisme) ; comme elle est aussi "locale" (I.§5), on définit le <u>faisceau</u> des distributions sur une <u>variété</u> de façon naturelle, par localisation dans les cartes (la valeur d'une distribution sur une fonction se définit à l'aide d'une partition de l'unité associée)

On n'utilisera guère ces notions ici, sauf pour définir les espaces de Sobolev locaux, et en appliquer les propriétés au problème de Dirichlet (chapitre IV)

§3 PRODUIT TENSORIEL DE DISTRIBUTIONS

Pour $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$, on note ici (x, y) un point de $U \times V$; (ainsi $T \in \mathcal{D}'(U)$ se notera T_x et $S \in \mathcal{D}'(V)$, S_y)

L'application "<u>produit tensoriel</u>" $\mathcal{E}(U) \times \mathcal{E}(V) \xrightarrow{\otimes} \mathcal{E}(U \times V)$ définie par : $f \otimes g\,(x, y) = f(x) g(y)$ (pour $x \in U, y \in V$), est évidemment bilinéaire et continue (pour la topologie produit), et se restreint en $\mathcal{D}(U) \times \mathcal{D}(V) \xrightarrow{\otimes} \mathcal{D}(U \times V)$, qui a les mêmes propriétés ; on note les sous-espaces engendrés par leurs images $\mathcal{E}(U) \otimes \mathcal{E}(V)$ et $\mathcal{D}(U) \otimes \mathcal{D}(V)$ respectivement.

Lemme : $\mathcal{D}(U)\otimes\mathcal{D}(V)$ est dense dans $\mathcal{D}(U\times V)$ et dans $\mathcal{E}(U\times V)$

Preuve : Par densité de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{E}$, il suffit de démontrer la première assertion. Soit $\varphi\in\mathcal{D}(U\times V)$ et $K=\operatorname{supp}\varphi$. Les projections L et M de K sur U et sur V sont compactes, et $K\subset L\times M$, compact de $U\times V$.

On peut recouvrir L par un nombre fini de petits pavés $\mathring{L}_i$, avec $L_i\subset U$ (et de même M par des $\mathring{M}_j$, avec $M_j\subset V$). Si (α_i) et (β_j) sont des partitions de l'unité associées, $\varphi=\sum_{i,j}\alpha_i\beta_j\varphi$, et il suffit d'approcher chaque $\alpha_i\beta_j\varphi$; on s'est donc ramené au cas où $\operatorname{supp}\varphi$ est contenu dans un pavé $H\times K$, où H est un pavé de $U\subset\mathbb{R}^n$, et K un pavé de $V\subset\mathbb{R}^m$. On peut alors développer φ en série de Fourier (cf chap III. §) : pour certaines $\ell\in(\mathbb{R}^n)'$, $\ell'\in(\mathbb{R}^m)'$, $\varphi(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=\sum_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^{n+m}} c_{\alpha\beta}\,e^{i(\langle\alpha,\ell(x)\rangle+\langle\beta,m(y)\rangle)}$

Comme $\varphi\in\mathcal{D}_{H\times K}(U\times V)$, les $c_{\alpha\beta}$ sont à décroissance rapide ; si $\alpha\in\mathcal{D}(U)$ et $\beta\in\mathcal{D}(V)$, avec $\alpha\equiv 1$ au voisinage de H et $\beta\equiv 1$ au voisinage de K, on a $\varphi(x,y)=\alpha(x)\beta(y)\varphi(x,y)$, et les sommes partielles $\sum_{|\alpha+\beta|\le N} c_{\alpha\beta}\,e^{i\langle\alpha,\ell(x)\rangle}\alpha(x)\cdot e^{i\langle\beta,m(y)\rangle}\beta(y)$ convergent uniformément sur $H\times K$ vers $\varphi(x,y)$, ainsi que toutes leurs dérivées. ■

Proposition ("dérivation sous une distribution")

Soit $\varphi(x,y)\in\mathcal{D}(U\times V)$ et $T\in\mathcal{D}'(U)$; la fonction $y\mapsto\langle T_x,\varphi(x,y)\rangle$ est dans $\mathcal{D}(V)$, et $\forall\alpha\in\mathbb{N}^m$, $\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\alpha}\langle T_x,\varphi(x,y)\rangle=\langle T_x,\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\alpha}\varphi(x,y)\rangle$

Preuve : Si $\operatorname{supp}\varphi\subset H\times K$ avec $H\Subset U$ et $K\Subset V$, pour tout y dans V, la fonction $x\mapsto\varphi(x,y)$ est dans $\mathcal{D}_H(U)$. Si $\vec{h}=(0,\dots,0,h,\dots,0)$, avec h à la j-ème place, on a $\frac{1}{h}\{\langle T_x,\varphi(x,y+\vec{h})\rangle-\langle T_x,\varphi(x,y)\rangle\}-\langle T_x,\frac{\partial\varphi}{\partial y_j}(x,y)\rangle=\langle T_x,\varphi_h(x,y)\rangle$ avec $\varphi_h(x,y)=\frac{\varphi(x,y+\vec{h})-\varphi(x,y)}{h}-\frac{\partial\varphi}{\partial y_j}(x,y)=\frac{h}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_j^2}(x,y+\theta h)$, avec $0<\theta<1$.

Pour $|h|\le\varepsilon$, $\operatorname{supp}\varphi_h\subset H\times(K+\bar{B}(0,\varepsilon))$, et $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}\varphi_h(x,y)=\frac{h}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}\varphi(x,y+\theta h)$, donc quand $h\to 0$, $\varphi_h\to 0$ uniformément ainsi que toutes ses dérivées en x, et $\langle T_x,\varphi_h(x,y)\rangle\to 0$, d'où $\frac{\partial}{\partial y_j}\langle T_x,\varphi(x,y)\rangle=\langle T_x,\frac{\partial\varphi}{\partial y_j}(x,y)\rangle$, et il suffit d'itérer. ■

Remarque : Il est aisé de généraliser cet énoncé au cas où $T\in\mathcal{D}'(U)$, $\varphi\in\mathcal{E}(U\times V)$, quand la projection dans U de $\operatorname{supp}\varphi$ ne recoupe $\operatorname{supp} T$ que sur un compact (comme à la remarque 2 du § 1).

La fonction $y\mapsto\langle T_x,\varphi(x,y)\rangle$ sera alors dans $\mathcal{E}(V)$ et on pourra de même lui appliquer $S\in\mathcal{D}'(V)$ sous la même condition de support.

Théorème : Soient $T\in\mathcal{D}'(U)$ et $S\in\mathcal{D}'(V)$. Il existe une et une seule distribution sur $U\times V$, notée $T_x\otimes S_y$ telle que

(*) $\forall\psi\in\mathcal{D}(U),\ \chi\in\mathcal{D}(V),\quad \langle T\otimes S,\psi\otimes\chi\rangle=\langle T,\psi\rangle\langle S,\chi\rangle$

De plus, si $\varphi\in\mathcal{D}(U,V)$, on a

(**) $\langle T\otimes S,\varphi\rangle=\langle T_x,\langle S_y,\varphi(x,y)\rangle\rangle=\langle S_y,\langle T_x,\varphi(x,y)\rangle\rangle$

C'est $T\otimes S$ qu'on appelle "produit tensoriel" de T et S. La formule (**) est une variante du théorème de Fubini (cas où T et $S\in L^1_{loc}$).

Preuve : L'unicité d'une distribution vérifiant (*) résulte du lemme ci-dessus. Si $\varphi\in\mathcal{D}(U\times V)$, $\operatorname{supp}\varphi\subset H\times K$ avec $H\Subset U$, $K\Subset V$, il existe $C_1,C_2>0$ et $m_1,m_2\in\mathbb{N}$ tels que (utilisant la proposition précédente)

$$|\langle T_x,\langle S_y,\varphi(x,y)\rangle\rangle|\le C_1\sum_{|\alpha|\le m_1}\sup\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha\langle S_y,\varphi(x,y)\rangle\right|$$
$$=C_1\sum_{|\alpha|\le m_1}\sup\left|\langle S_y,\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha\varphi(x,y)\rangle\right|\le C_1C_2\sum_{|\alpha|\le m_1}\sum_{|\beta|\le m_2}\sup\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\beta\varphi(x,y)\right|$$

et le terme central de (**) définit donc une distribution sur $U\times V$, qui vérifie clairement (*) ; de même pour le terme de droite. ■

Proposition : $\operatorname{supp} T\otimes S=\operatorname{supp}T\times\operatorname{supp}S$

Preuve : si $\varphi\in\mathcal{D}(U\times V-\operatorname{supp}S\times\operatorname{supp}T)$, on a, par une partition de l'unité $\varphi=\chi+\psi$, avec $\operatorname{supp}\chi\in\mathcal{D}(U\times(V-\operatorname{supp}S))$ et $\operatorname{supp}\psi\in\mathcal{D}((U-\operatorname{supp}T)\times V)$, et on conclut $\langle T\otimes S,\varphi\rangle=0$ à l'aide de (**) ■

Remarque : Enfin il est clair que $T_f\otimes T_g=T_{f\otimes g}$ ...

---

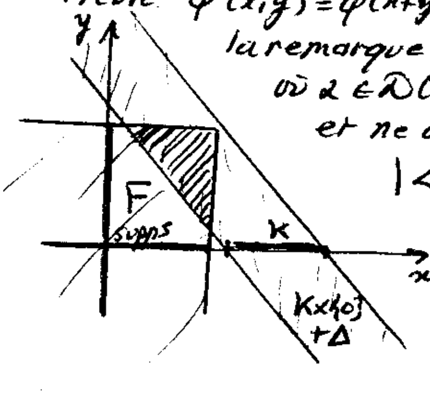
§4 LA CONVOLUTION DES DISTRIBUTIONS

Théorème : Soient $S,T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $F=(\operatorname{supp}S_x)\times(\operatorname{supp}T_y)\subset\mathbb{R}^{2n}$, et $\Delta=\{(x,-x)\mid x\in\mathbb{R}^n\}\subset\mathbb{R}^{2n}$. Supposons que, pour tout $K\Subset\mathbb{R}^n$, le fermé $(K\times\{0\}+\Delta)\cap F$ soit un compact de $\mathbb{R}^{2n}$. Alors la formule

(*) $\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\qquad \langle S*T,\varphi\rangle=\langle S_x\otimes T_y,\varphi(x+y)\rangle$

définit une distribution sur $\mathbb{R}^n$, appelée "produit de convolution" de S et T

Preuve : $\tilde\varphi(x,y)=\varphi(x+y)\in\mathcal{E}(\mathbb{R}^{2n})$ et le terme de droite a un sens d'après la remarque 2 p.17 : il est défini par $\langle S_x\otimes T_y,\alpha(x,y)\varphi(x+y)\rangle$ où $\alpha\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$, $\alpha\equiv1$ au voisinage de $(K\times\{0\}+\Delta)\cap F$, où $K=\operatorname{supp}\varphi$, et ne dépend pas de α ; d'où l'existence de C,m tels que



$$|\langle S*T,\varphi\rangle|\le C\sum_{|\alpha+\beta|\le m}\sup\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\beta(\alpha\tilde\varphi)\right|$$

et on conclut par la formule de Leibniz. ■

Dès que le produit de convolution de deux distributions est défini (c'est-à-dire pour l'instant sous les hypothèses du théorème), il a de nombreuses propriétés, dont on énonce ici les principales:

(1) $*$ est commutatif: $S*T=T*S$

Preuve: immédiate, d'après (*), puisque $\varphi(x+y)=\varphi(y+x)$. ∎

(2) $\boxed{\operatorname{supp} S*T \subset \operatorname{supp} S+\operatorname{supp} T}$

Preuve: par la dernière proposition du §3:

$\operatorname{supp} S\otimes T \cap \operatorname{supp}\tilde{\varphi} \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists (x,y) \mid x\in \operatorname{supp} S, y\in \operatorname{supp} T, x+y\in \operatorname{supp}\varphi$
$\Leftrightarrow \operatorname{supp}\varphi \cap (\operatorname{supp} S+\operatorname{supp} T)\neq\emptyset$ ∎

(3) $*$ étend la convolution des fonctions: $T_f * T_g = T_{f*g}$ (notée $f*g$)

Puisque les intégrales écrites ont toutes un sens, pour $f,g\in \mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, sous les hypothèses du théorème:

$$\langle T_f*T_g,\varphi\rangle=\langle T_f\otimes T_g,\tilde{\varphi}\rangle=\iint f(x)g(y)\varphi(x+y)\,dx\,dy$$
$$=\int f(x)\Big(\int g(y)\varphi(x+y)dy\Big)dx=\int f(x)\Big(\int g(z-x)\varphi(z)dz\Big)dx$$
$$=\int\Big(\int f(x)g(z-x)dx\Big)\varphi(z)dz=\langle T_{f*g},\varphi\rangle. \ ∎$$

(4) dès que S ou $T\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $S*T$ est bien défini, la condition du théorème étant alors réalisée, donc $(S,T)\mapsto S*T$ est bilinéaire et séparément (donc aussi "globalement") faiblement continue de $\mathcal{E}'\times\mathcal{D}'$ dans $\mathcal{D}'$, et de $\mathcal{E}'\times\mathcal{E}'\to\mathcal{E}'$ (grâce à la propriété 2)

(5) Si $f\in\mathcal{D}$ et $T\in\mathcal{D}'$ (ou si $f\in\mathcal{E}$ et $T\in\mathcal{E}'$), $f*T\in\mathcal{E}$ et c'est la fonction: $x\mapsto\langle T_y, f(x-y)\rangle$ (si $f\in\mathcal{D}$ et $T\in\mathcal{E}'$, $f*T\in\mathcal{D}$)

(Cet énoncé généralise la convolution des fonctions)

Preuve: $\langle f*T,\varphi\rangle=\langle T_y,\langle f(x),\varphi(x+y)\rangle\rangle=\langle T_y,\int f(x)\varphi(x+y)dx\rangle$
$=\langle T_y,\int f(z-y)\varphi(z)dz\rangle=\langle T_y,\langle\varphi(z);f(z-y)\rangle\rangle=\langle T_y\otimes\varphi(z),f(z-y)\rangle$
$=\langle\varphi(z),\langle T_y,f(z-y)\rangle\rangle=\int\langle T_y,f(z-y)\rangle\varphi(z)dz$. Le fait que cette fonction est C^∞ résulte de la dérivation "sous" la distribution T. ∎

Remarque: Le calcul ci-dessus montre du même coup que
$$\langle f*T,\varphi\rangle=\langle T,\check{f}*\varphi\rangle \text{ quand les } * \text{ sont bien définies}$$

(6) δ est l'élément neutre de $*$: $\forall T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ $\delta*T=T$

De plus pour $a\in\mathbb{R}^n$, $\alpha\in\mathbb{N}^n$: $\delta_a*T=\tau_a T$ et $\delta^{(\alpha)}*T=T^{(\alpha)}$

Les vérifications sont laissées au lecteur.

(7) Si (ρ_p) est la suite régularisante du chap I, §1 (ou une autre),

$\forall T\in\mathcal{D}'$, $\rho_p*T\in\mathcal{E}$ et $\rho_p*T\longrightarrow T$ faiblement dans $\mathcal{D}'$

$\forall T\in\mathcal{E}'$, $\rho_p*T\in\mathcal{D}$ et $\rho_p*T\longrightarrow T$ faiblement dans $\mathcal{E}'$

Preuve: résulte de (4) et (6), puisqu'on a déjà vu (chap I §3) que $\rho_p\to\delta$.

<u>Corollaire : $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est (faiblement) dense dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ et dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$</u>

Preuve : par (7) $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{E}'$, et $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{D}'$. Mais $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{E}$ (chap I, §2, Prop.). ■

<u>Proposition : $\mathcal{D}(U)$ est (faiblement) dense dans $\mathcal{E}'(U)$ et dans $\mathcal{D}'(U)$, pour tout $U \subset \mathbb{R}^n$</u>

Preuve : Si $T \in \mathcal{E}'(U)$, on peut la prolonger à $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, par 0 dans $\mathbb{R}^n - \operatorname{supp} T$. Le corollaire ci-dessus fournit alors la première assertion. La densité faible de $\mathcal{E}'(U)$ dans $\mathcal{D}'(U)$ s'obtient par troncature et régularisation : si (K_p) est une suite exhaustive de compacts de U, $(\rho_p * \chi_{K_p})\, T \xrightarrow[p\to\infty]{} T$ dans $\mathcal{D}'(U)$. ■

(8) <u>Remarque : Un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants est l'opérateur de convolution par une distribution portée par $\{0\}$ et réciproquement.</u>

Preuve : Si $P(\partial) = \sum\limits_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$, on a $P(\partial)T = \left(\sum a_\alpha \delta^{(\alpha)}\right) * T$ pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ d'après (6). La réciproque résulte du fait que toute distribution de support $\{0\}$ est de ce type (cf. chap I, §5). ■

(9) (<u>Associativité</u>) : Dès que <u>deux au moins</u> des trois distributions R, S, T sont <u>à support compact</u>, $*$ est associatif : <u>$R*(S*T) = (R*S)*T$</u>

Preuve : Utilisant (4) et le corollaire du (7), on peut supposer $R, S, T \in C^\infty$. La formule résulte alors d'un changement de variable dans une intégrale. ■

Toutefois il arrive que tous les $*$ de la formule soit bien définis, et qu'elle soit pourtant fausse. L'exemple classique est :

$$1 * (\delta' * H) = 1 * \delta = 1 \neq 0 = 0 * H = (1 * \delta') * H.$$

§5 L'ALGÈBRE $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ ET LE CALCUL SYMBOLIQUE

On note ici $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ l'espace des distributions sur $\mathbb{R}$ de support <u>borné à gauche</u>. (Celles de support borné à droite forment l'espace $\mathcal{D}'_-(\mathbb{R})$.)

Si $\operatorname{supp} S \subset [a, +\infty[$ et $\operatorname{supp} T \subset [b, +\infty[$, la condition du théorème du §4 est toujours réalisée, donc $S*T$ est bien définie, et par la propriété (2) $\operatorname{supp} S*T \subset [a+b, +\infty[$, en particulier $S*T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$

<u>Proposition : $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ est une algèbre commutative unitaire pour la convolution</u>

Preuve : $(S, T) \mapsto S*T$ est bilinéaire ; la commutativité vient de (1), et l'élément neutre est δ par (6). L'associativité se montre alors comme en (9). ■

On a évidemment le même énoncé pour $\mathcal{D}'_-(\mathbb{R})$, et il résulte de (9) pour $\mathcal{E}'(\mathbb{R}) = \mathcal{D}'_+ \cap \mathcal{D}'_-$. Enfin on l'a aussi pour certaines sous-algèbres des précédentes, par exemple $\mathcal{D}'_{0,+} = \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \mid \operatorname{supp} T \subset [0, +\infty[\}$, $\mathcal{D}'_{0,-} = \{T \in \mathcal{D}' \mid \operatorname{supp} T \subset]-\infty, 0]\}$ et $\mathcal{D}'_0 = \{T \in \mathcal{D}' \mid \operatorname{supp} T \subset \{0\}\} = \mathcal{D}'_{0,+} \cap \mathcal{D}'_{0,-}$ -

A plusieurs variables, on a encore des énoncés semblables : si Γ est un cône fermé saillant de $\mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire tel qu'il existe un hyperplan vectoriel H de $\mathbb{R}^n$ tel que $\Gamma \cap H = \{0\}$), on note $\mathcal{D}'(\Gamma)$ l'espace des distributions dont le support est contenu dans un translaté $a+\Gamma$ de Γ (pour $a \in \mathbb{R}^n$). Alors

$$\mathcal{D}'(\Gamma),\ \mathcal{D}'(-\Gamma),\ \mathcal{E}' = \mathcal{D}'(\Gamma) \cap \mathcal{D}'(-\Gamma), \text{ et (si } \mathcal{D}'_0(\Gamma) = \{T \mid \operatorname{supp} T \subset \Gamma\})$$
$$\mathcal{D}'_0(\Gamma),\ \mathcal{D}'_0(-\Gamma),\ \mathcal{D}'_0 = \mathcal{D}'_0(\Gamma) \cap \mathcal{D}'_0(-\Gamma) = \{T \mid \operatorname{supp} T \subset \{0\}\} \text{ sont}$$

toutes des algèbres de convolution.

<u>Proposition</u> : $\mathcal{D}'_0$, munie de $*$ est isomorphe à l'algèbre des polynômes

Preuve : $\left(\sum_{|\alpha| \le p} a_\alpha \delta^{(\alpha)}\right) * \left(\sum_{|\beta| \le q} b_\beta \delta^{(\beta)}\right) = \sum_{\alpha,\beta} a_\alpha b_\beta \delta^{(\alpha+\beta)}$, car $\delta^{(\alpha)} * \delta^{(\beta)} = \delta^{(\alpha+\beta)}$ d'après (6), comme $\left(\sum a_\alpha X^\alpha\right)\left(\sum b_\beta X^\beta\right) = \sum_{\alpha,\beta} a_\alpha b_\beta X^{\alpha+\beta}$. ∎

Comme l'algèbre des polynômes est intègre, $\mathcal{D}'_0$ admet un corps de fractions. Il est remarquable que celui-ci, <u>en dimension 1</u> s'identifie à une sous-algèbre de $\mathcal{D}'_{0,+}(\mathbb{R})$ (ou aussi de $\mathcal{D}'_{0,-}(\mathbb{R})$ ...)

> <u>Théorème</u> : La sous-algèbre de $\mathcal{D}'_{0,+}(\mathbb{R})$ engendrée par $\mathcal{D}'_0$ et les distributions $H(x)e^{\lambda x}$, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, est un corps commutatif pour $*$, le corps des fractions de $\mathcal{D}'_0$. De plus c'est la somme directe de $\mathcal{D}'_0$ et de l'espace des distributions de la forme $H(x)\left(\sum P_j(x) e^{\lambda_j x}\right)$ (la somme est finie, les $\lambda_j \in \mathbb{C}$ et les P_j sont des polynômes). Ce corps est isomorphe au corps $\mathbb{C}(X)$ des fractions rationnelles.

Preuve : D'abord, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $\underline{(\delta' - \lambda\delta)^{*-1} = H(x)e^{\lambda x}}$; en particulier $\underline{\delta'^{*-1} = H}$: puisque $\langle \delta' - \lambda\delta * e^{\lambda x} H, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} e^{\lambda x} \langle \delta'_y - \lambda \delta_y, \varphi(x+y) \rangle \, dx$

$$= \int_0^{+\infty} e^{\lambda x}(-\varphi'(x) - \lambda\varphi(x))\, dx = -\int_0^{+\infty} (e^{\lambda x}\varphi(x))' \, dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

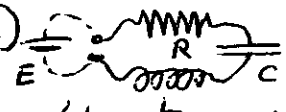
Le corps cherché, isomorphe à $\mathbb{C}(X)$, par la décomposition des fractions rationnelles, est somme directe de $\mathcal{D}'_0$, et de l'espace des combinaisons linéaires de distributions de la forme $(\delta' - \lambda\delta)^{*-m}$, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$. Il suffit donc de vérifier par récurrence que $(\delta' - \lambda\delta)^{*m+1} * H(x)\frac{x^m}{m!} e^{\lambda x} = \delta$, pour conclure. Or, par la formule des sauts, $(\delta' - \lambda\delta) * H(x)\frac{x^m}{m!} e^{\lambda x} = \left\{H(x)\left(\frac{x^m}{m!} e^{\lambda x}\right)\right\}' - \lambda H(x) \frac{x^m}{m!} e^{\lambda x} = H(x) \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} e^{\lambda x}$ tant que $m > 0$. ∎

L'usage systématique de l'isomorphisme du théorème pour résoudre les systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants (qui sont des équations de convolution par la remarque (β) du §4) s'appelle le "<u>calcul symbolique</u>" de Heaviside, utile aux électroniciens.

<u>Exemples</u> : 1) D'abord, outre les formules soulignées dans la preuve ci-dessus, on a aussi : pour $\lambda \ne \mu \in \mathbb{C}$, $\underline{H(x)e^{\lambda x} * H(x)e^{\mu x} = H(x)\frac{e^{\lambda x} - e^{\mu x}}{\lambda - \mu}}$, puisque $\frac{1}{X-\lambda} \cdot \frac{1}{X-\mu} = \frac{1}{\lambda-\mu}\left(\frac{1}{X-\lambda} - \frac{1}{X-\mu}\right)$.

2) Soit à résoudre l'équation $T'+H*T = T_0 \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ à l'inconnue $T\in\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.
L'équation proposée, $(\delta'+H)*T=T_0$ revient à inverser $\delta'+H$ dans $\mathcal{D}'_+$.
Comme $\left(X+\frac{1}{X}\right)^{-1} = \frac{X}{X^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{X-i}+\frac{1}{X+i}\right)$, un inverse de $(\delta'+H)$ dans $\mathcal{D}'_+$ est
$\frac{1}{2}\left[(\delta'-i\delta)^{*-1}+(\delta'+i\delta)^{*-1}\right] = \frac{1}{2} H(x)(e^{ix}+e^{-ix}) = H(x)\cos x$
La seule solution dans $\mathcal{D}'_+$ est donc $T = H(x)\cos x * T_0$

Par exemple si $T_0=T_{f_0}$ et qu'on cherche les f telles que T_f soit solution, il s'agit de l'équation "intégro-différentielle": $f'(x)+\int_0^x f(y)\,dy = f_0(x)$, avec $\mathrm{supp}\, f_0\subset[0,+\infty[$, et on a ainsi montré que la seule solution à support dans $[0,+\infty[$ est: $f(x)=\int_0^x \cos(x-t)f_0(t)\,dt$.

3) 

Dans un circuit électrique de résistance R, de capacité C, et d'auto-induction L, l'intensité I est nulle tant qu'il est ouvert. Au temps $t=0$, on ferme le circuit par un générateur de tension $E(t)$, et on veut calculer $I(t)$ pour $t>0$. Dans un système d'unités cohérent, $E(t) = RI(t)+LI'(t)+\frac{1}{C}\int_0^t I(s)\,ds$
E et I, nulles jusqu'à $t=0$, sont dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ et cette équation se récrit: $(R\delta+L\delta'+\frac{1}{C} H)*I=E$. Elle est donc aisée à résoudre par le calcul symbolique; un circuit plus complexe, avec des dérivations, donnerait un système de telles équations, qui se résoudrait de même.

Remarques Le calcul symbolique fournit des inverses de convolution des opérateurs différentiels linéaires à coefficients constants, en dimension 1. Mais ce ne sont pas les seuls inverses possibles dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$: par exemple $(H+C)*\delta'=\delta$ pour toute constante C, mais $H+C\in\mathcal{D}'_+ \Leftrightarrow C=0$.

On trouvera en exercice une preuve que $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ est une algèbre de convolution intègre ($S*T=0 \Rightarrow S$ ou $T=0$), d'où l'unicité de l'inverse dans $\mathcal{D}'_+$, lorsqu'il existe, d'une distribution de $\mathcal{D}'_+$.

§6 SOLUTIONS ÉLÉMENTAIRES

On appelle solution élémentaire d'un opérateur différentiel linéaire $P(x,\partial)=\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\partial^\alpha$ toute distribution $E\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ telle que $P(x,\partial)E=\delta$. Dans le cas d'un opérateur $P(\partial)$ à coefficients constants, il s'agit donc d'un inverse de convolution; l'équation $P(\partial)T=T_0$ aura donc la solution particulière $E*T_0$ (puisque $P(\partial)(E*T_0) = P(\partial)E*T_0=\delta*T_0=T_0$) dès que ce produit a un sens, par exemple dès que $T_0\in\mathcal{E}'$. (Il faudrait ensuite trouver le noyau de $P(\partial)$ pour avoir toutes les solutions). D'où l'intérêt de connaître des solutions élémentaires ayant de bonnes propriétés de support, de régularité, ou de décroissance à l'infini (pour permettre d'autres T_0).

<u>Exemple</u> : L'exercice 22 (chap I, § 7) fournit des solutions élémentaires de trois opérateurs "classiques" en dimension 2.

L'existence d'une solution élémentaire donne aussitôt un résultat de <u>résolubilité locale</u> :

<u>Proposition</u> : Soit $P(\partial)$ un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants et $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ telle que $P(\partial)E = \delta$. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ borné.
<u>Alors</u> : $\forall T_0 \in \mathcal{D}'(U)$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $PT = T_0$ <u>dans</u> U_ε, <u>où</u> $U_\varepsilon = \{x \in U \mid d(x, \complement U) > \varepsilon\}$.

Preuve : On choisit $\alpha \in \mathcal{D}(U)$, $\alpha \equiv 1$ au voisinage de $\overline{U_\varepsilon}$; comme αT_0, prolongée par 0, est dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $E * \alpha T_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, et

$$P(E*\alpha T_0)\Big|_{U_\varepsilon} = PE*\alpha T_0\Big|_{U_\varepsilon} = \delta * \alpha T_0\Big|_{U_\varepsilon} = \alpha T_0\Big|_{U_\varepsilon} = T_0\Big|_{U_\varepsilon}. \blacksquare$$

<u>Remarque</u> : Si T_0 admet un prolongement dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, on peut se passer de α, donc de ε, et résoudre $PT = T_0$ dans U tout entier.

Lorsqu'on connaît une solution élémentaire régulière, on en déduit un résultat de <u>régularité</u> de l'opérateur.

On dit qu'un opérateur P est <u>hypoelliptique</u> dans un ouvert U si : $\forall T \in \mathcal{D}'(U)$, $PT \in \mathcal{E}(U) \Rightarrow T \in \mathcal{E}(U)$. Il l'est alors aussi dans tout $V \subset U$, et s'il l'est dans les U_j, il l'est dans $\bigcup_j U_j$ (adapter la preuve ci-dessous)

<u>Théorème</u> : Soit $P = P(\partial)$ un o.d.l. à coefficients constants, et $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ telle que $PE = \delta$ et $E|_{\mathbb{R}^n - \{0\}} \in C^\infty$. Alors P est hypoelliptique sur $\mathbb{R}^n$.
Réciproquement, si P est hypoelliptique, toutes ses solutions élémentaires sont C^∞ hors de l'origine

Preuve : La réciproque est claire, puisque $PE|_{\mathbb{R}^n - \{0\}} = \delta|_{\mathbb{R}^n - \{0\}} = 0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\})$.
Dans le sens direct, soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ telle que $PT \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$ et V un voisinage ouvert borné de a. Soit $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\alpha \equiv 1$ au voisinage de $\overline{V}$. On a $P(\alpha T) = \alpha PT + S$, avec $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ puisque $\operatorname{supp} S \subset \operatorname{supp} \alpha$; mais $S|_V = 0$ (formule de Leibniz). Comme $E * P(\alpha T) = PE * \alpha T = \alpha T$, il vient $\alpha T = E * \alpha PT + E * S$. Comme $\alpha PT \in \mathcal{D}$, $E * \alpha PT \in \mathcal{E}$, et il reste à montrer que $E * S$ est C^∞. Soit $\varepsilon > 0$ et $\beta \in \mathcal{D}_{\overline{B}(0,2\varepsilon)}(\mathbb{R}^n)$, $\beta \equiv 1$ sur $\overline{B}(0,\varepsilon)$; $E * S = (\beta E) * S + ((1-\beta)E) * S$, et le dernier terme est C^∞ car $(1-\beta)E$ l'est.
Enfin $\operatorname{supp} \beta E * S \subset \operatorname{supp} \beta + \operatorname{supp} S \subset \overline{B}(0,2\varepsilon) + \operatorname{supp} S$, et comme S est nulle dans V, $(\beta E) * S$ l'est dans $V_{2\varepsilon} = \{x \in V \mid d(x, \complement V) > 2\varepsilon\}$, qui est encore un voisinage de a pour ε assez petit. Donc $E * S|_{V_{2\varepsilon}}$ est C^∞, et finalement $\alpha T|_{V_{2\varepsilon}} = T|_{V_{2\varepsilon}}$ aussi. $\blacksquare$

<u>Remarques</u> : 1) Il suffirait que E vérifie $E|_{\mathbb{R}^n - \{0\}} \in C^\infty$ et $PE - \delta \in C^\infty$ pour que la même preuve marche (un terme C^∞ de plus dans la décomposition). Une distribution E telle que $PE - \delta \in C^\infty$ s'appelle une "<u>paramétrix</u>"

et l'existence d'une paramétrix régulière hors de l'origine suffit donc à prouver l'hypoellipticité.

2) Ce théorème a aussi une version <u>analytique</u> : si $E \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n - \{0\})$ et $PE - \delta \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ alors P est "<u>hypoelliptique analytique</u>" sur $\mathbb{R}^n$.
$\forall U \subset \mathbb{R}^n \ \forall T \in \mathcal{D}'(U)$, $PT \in \mathcal{A}(U) \Rightarrow T \in \mathcal{A}(U)$;
et de même dans ce cas <u>toutes</u> les solutions élémentaires de P seront analytiques hors de 0.

3) Par exemple, d'après l'exercice 22 (ch. I, §7), l'opérateur "<u>de Cauchy-Riemann</u>" $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ et celui <u>de Laplace</u> $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ sont hypoelliptiques analytiques (donc hypoelliptiques !), tandis que l'opérateur "<u>des cordes vibrantes</u>" $\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ n'est pas hypoelliptique.

§7 THÈMES D'EXERCICES SUR LE CHAPITRE II

1) Montrer que les combinaisons linéaires de mesures de Dirac sont denses (faiblement) dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ et dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. (Approcher d'abord une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. En déduire qui approchent $\delta', \dots, \delta^{(p)}$. Et à plusieurs variables ?

2) <u>Autre preuve de la densité de $\mathcal{D} \otimes \mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$.</u>
   a) Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et f est un polynôme, $\varphi * f$ est un polynôme
   b) Si $\operatorname{supp} \varphi \subset]-\alpha, \alpha[$ et $f_p = (1-x^2)^p$ pour $|x| \leq 1$, 0 ailleurs, alors $\varphi * f_p |_{]-1+\alpha, 1-\alpha[}$ est un polynôme $(0 < \alpha < 1)$
   c) Si $\lambda_p = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^p dx$ et $F_p = \frac{1}{\lambda_p} f_p$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, $F_p \to 0$ uniformément sur $]-\infty, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, +\infty[$. En déduire que $\varphi * F_p \to \varphi$ uniformément.
   d) Refaire (a), (b), (c) à plusieurs variables, avec $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} \varphi \subset \bar{B}(0, A)$ et $f_p = \left(A^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^p$ pour $|x| \leq A$, 0 ailleurs. En particulier montrer que $\varphi * F_p$ est un polynôme dans la boule $\bar{B}(0, (n-1)A)$.
   e) Si $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} \alpha \subset B(0, (n-1)A)$, $\alpha \equiv 1$ sur $\bar{B}(0, A)$, et $\varphi_p(x_1, \dots, x_n) = \alpha(x_1) \cdots \alpha(x_n)(\varphi * F_p)(x_1, \dots, x_n)$ montrer que $\varphi_p \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$; puis conclure.

3) Pour $a \in \mathbb{C}^n$, $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ montrer que $e^{\langle a, x \rangle}(S * T) = (e^{\langle a, x \rangle} S) * (e^{\langle a, x \rangle} T)$ (quand $*$ est bien défini).

4) On dit que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est <u>périodique</u> de période $a \in \mathbb{R}$ si $\tau_a T = T$. Alors $\forall k \in \mathbb{Z}$, T est de période ka. Si $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, $S * T$ est de période a. Si $T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$, $T = 0$. Si $\{a \in \mathbb{R} \mid \tau_a T = T\}$ admet un point d'accumulation, T est constante. Généraliser à n variables.

5) Soit (U_1, U_2) un recouvrement ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ telles que $T_1|_{U_1} \in \mathcal{E}(U_1)$ et $T_2|_{U_2} \in \mathcal{E}(U_2)$. On note $T_1 T_2$ l'unique distribution sur $\mathbb{R}^n$ telle que $T_1 T_2|_{U_1} = T_1|_{U_1} T_2|_{U_1}$ et $T_1 T_2|_{U_2} = T_2|_{U_2} T_1|_{U_2}$. Montrer que $\operatorname{supp} T_1 T_2 \subset \operatorname{supp} T_1 \cap \operatorname{supp} T_2$, que $(\rho_p * T_1)(\rho_p * T_2) \to T_1 T_2$ faiblement. Que vaut $(T_1 T_2)^{(p)}$?

6) a) Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ alors $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x,y)\,dy = 0 \Leftrightarrow \exists\, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2),\ \varphi = \frac{\partial \psi}{\partial y}$

b) Si $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, l'application $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \xrightarrow{S} \mathbb{C}$ définie par $\langle S, \psi \rangle = \langle T, \psi(x)\alpha(y) \rangle$ est une distribution.

c) Montrer que : $\forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, $\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \exists S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}),\ T = S_x \otimes 1_y$

d) Montrer que les solutions $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ de $\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} = 0$ sont les distributions de la forme $R_x \otimes 1_y + 1_x \otimes S_y$, avec $R, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Lesquelles sont C^∞?

e) Décrire le noyau de l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

7) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante (donc L^1_{loc} !). Montrer que $(T_f)'$ est positive : $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \varphi \geq 0 \Rightarrow \langle (T_f)', \varphi \rangle \geq 0$. Réciproque ?

8) Remarquer que tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ telle que $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ est la somme d'une fonction holomorphe et d'une fonction antiholomorphe (de $z = x + iy$)

9) Si $f_\lambda(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{x^2 + \lambda^2}$ vérifier que $f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu}$ et que $f_\lambda \xrightarrow[\lambda \to 0]{} \delta$

De même si $\sigma > 0$ et $g_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$, $g_\sigma * g_\tau = g_{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}$

10) Soient f et $k \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$. On cherche $g \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ solution de

$$(*) \quad g(x) + \int_0^x k(x-t)\, g(t)\, dt = f(x)$$

a) Transformer $(*)$ en une équation dans $\mathcal{D}'_+$ et une autre dans $\mathcal{D}'_-$.

b) Montrer que la série $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (Hk)^{*n}$ est convergente dans $\mathcal{D}'_+$

(Montrer que $|(Hk)^{*n}(x)| \leq \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \left(\sup_{[0,x]} |k|\right)^n$.)

c) Montrer que $(\delta + S) * (\delta + Hk) = \delta$ et résoudre $(*)$ dans $\mathcal{D}'_+$, puis sur $\mathbb{R}$.

11) On cherche les $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que

$(*)$ $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ $\quad \langle T, \varphi * \psi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \langle T, \psi \rangle$

a) Montrer que $\langle T, \tau_a(\varphi * \psi) \rangle = \langle T, \varphi \rangle \langle T, \tau_a \psi \rangle$, puis que $\langle T, \tau_a \rho_p \rangle \xrightarrow[p \to \infty]{} \frac{\langle T, \tau_a \varphi \rangle}{\langle T, \varphi \rangle} = f_\varphi(a)$, où f_φ ne dépend pas de φ, et est une fonction dérivable ! Que vaut $f'(0)$?

b) En déduire une équation différentielle que satisfait T.

c) Résoudre $(*)$, et étendre le résultat à n variables.

12) Résoudre dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ l'équation $\quad T'' - 3T' + 2T = H(x)\,\mathrm{Ch}\,2x$,

puis dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation $T'' - 3T' + 2T = \mathrm{Ch}\,2x$

13) Pour une équation différentielle linéaire à coefficients constants $P = P(\frac{d}{dx})$, résoudre le "<u>problème de Cauchy</u>", c'est trouver la seule fonction $y(x) \in C^\infty$ telle que $Py = f \in C^\infty$ et $y^{(k)}(0) = a_k$ pour $k = 0, \ldots, m-1$, où $m = \deg P$. Ceci peut se faire par le calcul symbolique :

a) Si $z = Hy$, calculer $Pz - HPy$ comme combinaison de $\delta, \delta', \ldots, \delta^{(m-1)}$

b) En déduire la solution sur $\mathbb{R}_+$, puis sur tout $\mathbb{R}$.

c) S'entraîner à calculer des exemples : $\begin{cases} y' - y = e^x \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} y''' - y'' + y' - y = \sin x \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} y''' - y = \cos x \\ y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 2\,\mathrm{Ch}\,x \\ y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = 1 \end{cases}$

14) Calcul symbolique "matriciel": Résoudre dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ le système

$$\begin{cases} T''-2T'-S' = H(x)\sin x \\ T''+S''=0 \end{cases}$$

Résoudre dans $C^\infty(\mathbb{R})$ le "problème de Cauchy": $\begin{cases} y'''-z''-y''=0 \\ z'+y+z=0 \\ y(0)=z(0)=y'(0)=0 \\ y''(0)-z'(0)=6 \end{cases}$

15) Trouver les fonctions $y(x)$ solutions de $\int_0^x Sh(x-t)y(t)\,dt = x^2+6y'(x)$

16) Démontrer qu'en dimension 1, tout o.d.l. à coefficients constants est hypo-elliptique analytique.

17) Pour toute suite $(a_k)_{k\geq 1}$ de nombres complexes on pose $S_a=\delta+\sum_{k\geq 1} a_k\delta_k \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$

Calculer $S_a * S_b$ et résoudre $S_a * T=\delta$ dans $\mathcal{D}'_+$.

Si Σ est l'ensemble des distributions S_a, et Σ' l'ensemble des S_a dont la suite a est à croissance lente, montrer que Σ' est une sous-algèbre de Σ, mais pas un idéal. Est-ce un corps?

18) Une preuve du théorème de Titchmarsh: $T, S \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R}),\ T*S=0 \Rightarrow T$ ou $S=0$ (*)

a) Montrer qu'il suffit de prouver (*) pour $S, T\in\mathcal{E}(\mathbb{R})$, de support $\subset [0,+\infty[$, autrement dit: (**) $\forall f,g\in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^+})$ $\left(\int_0^x f(x-t)g(t)\,dt=0, \forall x\right) \Rightarrow f\equiv 0$ ou $g\equiv 0$.

b) On admet les trois énoncés (A), (B), et (C):

(A) Si $f\in C^0([0,X])$ et $\exists M>0, \forall n\in\mathbb{N}$ $\left|\int_0^X e^{nx}f(x)\,dx\right|\leq M$, alors $f\equiv 0$

(B) Si $f\in C^0([0,X])$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\int_0^X x^n f(x)\,dx=0$, alors $f\equiv 0$.

(C) (**) est vrai quand $f=g$

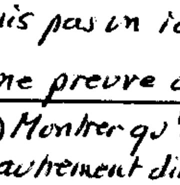
On pose $\tilde f(x)=xf(x)$ et $\tilde g(x)=xg(x)$. Montrer que sous l'hypothèse de (**), $\tilde f * g + f*\tilde g=0$, puis calculer $f*\tilde g*(\tilde f*g+f*\tilde g)$, et en déduire $f*\tilde g=0$.

Déduire de (B) que si $f*g=0$, alors $f(x-t)g(t)=0$ pour tous $0\leq t\leq x<+\infty$

Conclure sous ces hypothèses.

c) Pour montrer (C), on veut montrer que plus précisément

(C') $\left\{\forall x\in[0,2X],\ \int_0^x f(x-t)f(t)\,dt=0\right\} \Rightarrow \left\{\forall x\in[0,X],\ f(x)=0\right\}$



Par le changement de variables $t=X-u$, $x=2X-u-v$ calculer $\iint_\Delta e^{n(u+v)}f(X-u)f(X-v)\,du\,dv$, sous l'hypothèse de (C')

En calculant la même intégrale sur $\Delta\cup\Delta'$, en déduire

$\left|\int_{-X}^X e^{nu}f(X-u)\,du\right|^2\leq 2X^2A^2$, avec $A=\sup_{[0,2X]}|f(t)|$

En déduire (C') en utilisant (A).

d) Déduire (B) de l'assertion

(B') Si $g\in C^0([1,U])$ et $\exists M>0\ \forall n\in\mathbb{N}$ $\left|\int_1^U u^n g(u)\,du\right|\leq M$, alors $g\equiv 0$.

(Poser pour $x_0\in]0,X[$, $x=x_0u$, $X=x_0U$, $f(x)=g(u)$ ...)

Puis déduire (B') de (A). Reste à démontrer (A).

e) La série $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}e^{kh(x-t)}$ converge, pour h et x fixés, uniformément pour $t\in[0,x]$, vers $1-\exp(-e^{h(x-t)})$. En multipliant par $g(t)$, où $g\in C^0([0,X])$ et intégrant, en déduire: $\lim_{h\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\int_0^x e^{kh(x-t)}g(t)\,dt=\int_0^x g(t)\,dt$ (grâce à Lebesgue).

f) En déduire sous l'hypothèse du (A) que $\int_0^x f(x-t)\,dt=0$ pour $x\in[0,X]$, et enfin conclure!