CHAPITRE I : LES DISTRIBUTIONS

§1 L'ESPACE $\mathcal{D}(U)$

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $K \Subset U$ (= compact de U). Pour $f \in C^\infty(U)$ on appelle <u>support</u> de f le fermé de U : $\operatorname{supp} f = \complement_U \{x \in U \mid f(x) = 0\}$

On munit l'espace $\mathcal{D}_K(U) = \{f \in C^\infty(U) \mid \operatorname{supp} f \subset K\}$ de la topologie définie par les semi-normes $p_\alpha(f) = \sup |\partial^\alpha f|$, pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ (ce sont en fait des normes), qui en fait un espace métrique complet.

On munit ensuite l'espace $\mathcal{D}(U)$ des fonctions C^∞ à support compact dans U, $\mathcal{D}(U) = \bigcup_{K \Subset U} \mathcal{D}_K(U) = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \mathcal{D}_{K_p}(U)$ de la topologie ("limite inductive") la plus fine rendant continues toutes les injections $\mathcal{D}_K(U) \hookrightarrow \mathcal{D}(U)$: si E est un e.v.t., et $\alpha : \mathcal{D}(U) \to E$ est linéaire, α est continue si et seulement si toutes les composées $\mathcal{D}_K(U) \hookrightarrow \mathcal{D}(U) \xrightarrow{\alpha} E$ le sont. En <u>particulier</u> :

- si $U \subset V$, l'injection $\mathcal{D}(U) \hookrightarrow \mathcal{D}(V)$ est continue
- si $E = \mathbb{C}$ (muni de $|\ |$), une forme linéaire $T : \mathcal{D}(U) \to \mathbb{C}$ est continue si et seulement si :

$$\forall K \Subset U \quad \exists m \in \mathbb{N}, C > 0 \quad \forall f \in \mathcal{D}_K(U) \quad |T(f)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup |\partial^\alpha f|.$$

(C'est la définition d'une <u>distribution</u> sur U)

<u>Exemples</u> : Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $x_0 \in U$, et f une fonction localement intégrable sur U (c'est-à-dire intégrable sur tout compact de U) ; alors les formes linéaires sur $\mathcal{D}(U)$: $\varphi \mapsto \partial^\alpha \varphi(x_0)$ et $\varphi \mapsto \int_U f(x) \partial^\alpha \varphi(x)\, dx$ sont des distributions.

Ces définitions seraient vides si l'on avait $\mathcal{D}(U) = \{0\}$. Mais on va voir que $\mathcal{D}(U)$ est toujours assez gros pour être dense dans tous les autres espaces de fonctions et de distributions qu'on considèrera ; de plus, sa topologie est choisie pour qu'il s'y injecte continûment.

<u>Lemme</u> : <u>La fonction</u> $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ <u>définie par</u> $\rho(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right) & \text{pour } |x| < 1 \\ 0 & \text{pour } |x| \geq 1 \end{cases}$ <u>est dans</u> $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, <u>et</u> $\operatorname{supp} \rho = \overline{B}(0,1)$.

Preuve : Le dernier point est clair, et ρ est C^∞ pour $|x| \neq 1$; comme ρ ne dépend que de $|x|$, et que $x \mapsto |x|$ est C^∞ pour $x \neq 0$, il suffit de prouver que ρ est C^∞ dans le cas $n = 1$, et pour $x = 1$ (par parité) : comme $\rho^{(p)}(t)$ est de la forme $\frac{P_p(t)}{(t^2-1)^{2p}} e^{(t^2-1)^{-1}}$ pour $p \in \mathbb{N}$, $|t| < 1$, et 0 pour $|t| > 1$, on voit par récurrence sur p, que $\rho \in C^p$ et $\rho^{(p)}(1) = 0$. ■

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, posons alors $\rho_p(x) = \frac{p^n}{I} \rho(px)$, avec $I = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\, dx$.

Proposition : (a) $\rho_p \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $\rho_p \geqslant 0$; (b) $\operatorname{supp} \rho_p \subset \bar{B}(0,\frac{1}{p})$; (c) $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_p(x)dx = 1$.

Preuve : tout est clair. ∎ En fait, on appelle "suite régularisante" toute suite de fonctions vérifiant (a), (b), (c).

Ceci montre déjà que $\dim \mathcal{D}(U) = \infty$ pour tout ouvert U, mais on va déduire beaucoup plus des propriétés du "produit de convolution" :

§2 CONVOLUTION ET RÉGULARISATION

Formellement, le produit de convolution de deux fonctions $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, noté $*$, est défini par

$$f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

chaque fois que l'intégrale a un sens, ce qui est vrai déjà dans les deux cas suivants :

1) Si $f, g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$: $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$ est une algèbre, associative et commutative (mais non unitaire) pour le produit de convolution : par les théorèmes de Fubini et de changement de variable, $f*g$ est bien définie presque partout, $f*g \in \mathbb{L}^1$, $f*g = g*f$ et $f*(g*h) = (f*g)*h$. De plus : $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

2) Si $f, g \in \mathbb{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$, l'une au moins à support compact (le support étant le complémentaire du plus grand ouvert où la fonction est négligeable) : $f*g$ est alors partout définie (Cauchy-Schwarz), et on a encore $f*g = g*f$ et $f*(g*h) = (f*g)*h$ si deux au moins sont à support compact ; de plus dans ce cas, $f*g$ est une fonction continue :

Preuve : Notons $\tau_a f$ la translatée de $a \in \mathbb{R}^n$ de f, c'est-à-dire : $\tau_a f(x) = f(x-a)$; clairement $\tau_a(f*g) = (\tau_a f)*g = f*(\tau_a g)$, et
$|f*g(x) - f*g(x')| = |f*g(x) - (\tau_{x-x'}f)*g(x)| = |(f-\tau_{x-x'}f)*g(x)|$
$= \left|\int_{\mathbb{R}^n} (f-\tau_{x-x'}f)(y)\, g(x-y)dy\right| \leq \|f-\tau_{x-x'}f\|_2 \|g\|_2 \xrightarrow[x'\to x]{} 0$, les translations étant continues dans $\mathbb{L}^2$. ∎

Deux propriétés essentielles du produit de convolution, vraies dans les deux cas ci-dessus, et qui se généralisent à beaucoup d'autres cas, sont les suivantes :

- Propriété de support : $\boxed{\operatorname{supp} f*g \subset \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}}$

(Rappelons que $A+B = \{x+y \mid x \in A, y \in B\}$, que la somme de deux fermés est fermée dès que l'un des deux est compact, et compacte si les deux le sont ; l'inclusion est claire sur la définition)

- <u>Propriété de régularisation</u> : De $\tau_a(f*g) = (\tau_a f)*g = f*(\tau_a g)$, on tire par passage à la limite (dérivation "sous le signe somme"), que <u>si $f \in C^p$ et $g \in C^q$, alors $f*g \in C^{p+q}$ et d'ailleurs</u> :

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq p, |\beta| \leq q$: $\boxed{\partial^{\alpha+\beta}(f*g) = (\partial^\alpha f)*(\partial^\beta g)}$

En particulier si $f \in C^\infty$ et $g \in C^0$, $f*g \in C^\infty$! ($g \in \mathbb{L}^1_{loc}$ suffit d'ailleurs, des primitives partielles étant alors continues ...). D'où le

<u>Théorème "de régularisation"</u> : Soit $f \in \mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, et $F = \operatorname{supp} f$. Posons, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $f_p = \rho_p * f$, et $F_p = F + \bar{B}(0, \frac{1}{p})$. Alors :

a) $f_p \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\operatorname{supp} f_p \subset F_p$

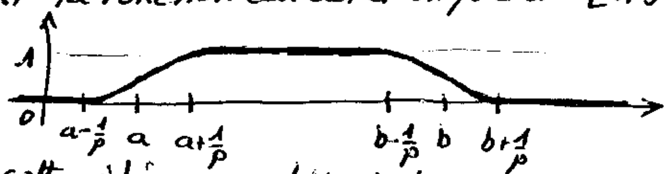
b) Pour tout compact K, $f_p|_K \xrightarrow[p\to\infty]{} f|_K$ dans $\mathbb{L}^1(K)$

c) Si de plus $f \in C^0$, $f_p \to f$ uniformément sur tout compact

d) Si de plus F est compact, $f_p \to f$ uniformément.

Preuve : Le (a) résulte des deux propriétés précédentes. De plus
$$\int_K |f_p(x) - f(x)|dx \leq \iint_{K\times \bar{B}(0,\frac{1}{p})} |f(x-y)-f(x)|\rho_p(y)dxdy = \int_{\bar{B}(0,\frac{1}{p})} \|\tau_y f - f\|\rho_p(y)dy$$
la norme écrite étant celle de $\mathbb{L}^1(K)$; d'où le (b), puis le (c) par l'expression centrale et le théorème de Heine, enfin le (d) par la propriété de support du (a). ■

<u>Exemple</u> : La convolution sert à "lisser" les fonctions peu régulières ; ainsi si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction caractéristique de $[a,b]$, le graphe de f_p est de la forme :



Généralisant cette idée, on obtient le

<u>Théorème "de partition de l'unité"</u> : Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert d'un compact K de $\mathbb{R}^n$. Il existe une famille $(\varphi_i)_{i\in I}$ de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, toutes nulles sauf un nombre fini, telles que $\operatorname{supp} \varphi_i \subset U_i$, $0 \leq \varphi_i \leq 1$, et $\sum \varphi_i \equiv 1$ au voisinage de K.

<u>Idées de preuve</u> : On ne garde que les U_i d'un sous-recouvrement fini ($\varphi_i \equiv 0$ sinon) ; ceux-ci recouvrent encore un compact un peu plus grand $K' = K + \bar{B}(0,\varepsilon)$. On découpe K' en $\bigcup K_i$, avec $K_i \Subset U_i$ et $K_i \cap K_j$ de mesure nulle, si bien que $\sum \chi_{K_i} = \chi_{K'}$. On n'a plus alors qu'à "lisser" les χ_{K_i} en les convolant par ρ_p pour p assez grand. ■

<u>Proposition : L'injection $\mathcal{D}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}(U)$ est continue et d'image dense : $\forall f \in \mathcal{E}(U)$, $\exists (f_p) \in \mathcal{D}(U)$; $f_p \to f$ dans $\mathcal{E}(U)$</u>.

Preuve : on peut poser $f_p = f \cdot (\rho_{2p} * \chi_{K_p})$, où K_p est une suite exhaustive de compacts de U. ■

Achevons ce paragraphe (et ses lecteurs) par quelques remarques utilisées systématiquement dans la suite : pour $f \in C^\infty$ fixée et $g \in C^\infty$, et pour K compact, on sait toujours majorer $\sup_K |\partial^\alpha(fg)|$ et $\sup_K |\partial^\alpha(f*g)|$ par $C^{ste}\left(\sum_{|\beta|\le|\alpha|} \sup_{K'} |\partial^\beta g|\right)$, avec $K'=K$ dans le premier cas (formule de Leibniz), et $K' = K + \operatorname{supp} f$ dans le second (propriétés de la convolution). De ces majorations résultent les énoncés suivants :

- si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, la convolution par f ($g \mapsto f*g$) est continue de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$; si $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, elle est continue de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$
- si $f \in \mathcal{E}(U)$, la multiplication par f ($g \mapsto fg$) est continue de $\mathcal{D}(U)$ dans $\mathcal{D}(U)$ et de $\mathcal{E}(U)$ dans $\mathcal{E}(U)$
- toute dérivation ($g \mapsto g^{(\alpha)}$) est continue de $\mathcal{D}(U)$ dans $\mathcal{D}(U)$ et de $\mathcal{E}(U)$ dans $\mathcal{E}(U)$
- on appellera <u>opérateur différentiel linéaire</u> (odl) tout composé des deux opérateurs précédents : $P(x,\partial) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\partial^\alpha$, avec $a_\alpha \in C^\infty(U)$: $g \mapsto Pg = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\, g^{(\alpha)}(x)$.
  Tout odl est donc continu de $\mathcal{D}(U)$ dans $\mathcal{D}(U)$ et de $\mathcal{E}(U)$ dans $\mathcal{E}(U)$.

---

§3 L'ESPACE $\mathcal{D}'(U)$

C'est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de toutes les <u>distributions</u> sur $U \subset \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire, rappelons-le ici, des formes linéaires $T : \mathcal{D}(U) \to \mathbb{C}$ telles que : $\forall K \Subset U\ \exists m \in \mathbb{N}, C>0, \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(U), |T(\varphi)| \le C \sum_{|\alpha|\le m} \sup |\partial^\alpha \varphi|$.

Le plus petit entier m qui "marche" s'appelle l'<u>ordre</u> de T sur K ; si m "marche" pour tout K, on dit que T est d'<u>ordre fini</u> (et $\le m$). Les distributions d'ordre zéro sont les <u>mesures</u> ("de Radon")

Donnons ici quelques exemples importants de distributions :

- Si $f \in \mathbb{L}^1_{loc}(U)$, l'application $\varphi \xmapsto{T_f} \int_U f(x)\varphi(x)\,dx$ est une distribution sur U, et même une mesure : c'est la distribution <u>associée</u> à la fonction f ; l'application $f \mapsto T_f$ est une <u>injection</u> de $\mathbb{L}^1_{loc}(U)$ dans $\mathcal{D}'(U)$: $T_f = 0$ signifie $\int f\varphi\,dx = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, donc par régularisation $\int f\chi_K\,dx = 0$ pour tout $K \Subset U$, et f est négligeable.
- On peut aussi associer des distributions à certaines fonctions non localement intégrables : en voici un exemple classique, la "valeur principale de $\frac{1}{x}$", qui est la distribution sur $\mathbb{R}$: $\varphi \mapsto \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|\ge\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$.

En effet si $\operatorname{supp}\varphi \subset [-A,A]$ et $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$, on a $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, et il vient :

$$vp\frac{1}{x}(\varphi)=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left\{\varphi(0)\underbrace{\left[\int_{-A}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int_{\varepsilon}^{A}\frac{dx}{x}\right]}_{=0}+\int_{-A}^{-\varepsilon}\psi(x)dx+\int_{\varepsilon}^{A}\psi(x)dx\right\}=\int_{-A}^{A}\psi(x)dx$$

d'où $|vp\frac{1}{x}(\varphi)|\leq 2A\sup|\psi|\leq 2A\sup|\varphi'|$ car $\psi(x)=\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\varphi'(\theta x), 0<\theta<1$.
$vp\frac{1}{x}$ est donc une distribution sur $\mathbb{R}$, d'ordre ≤ 1 (en fait $=1$; exercice !).

- on note δ_a la <u>mesure de Dirac</u> au point $a\in\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire la distribution $\varphi\mapsto\varphi(a)$ qui est clairement d'ordre 0, et appartient à $\mathcal{D}'(U)$ dès que $U\ni a$.
- si $x=(x',x'')$ avec $x'\in\mathbb{R}^p$, $x''\in\mathbb{R}^{n-p}$ et $\alpha'\in\mathbb{N}^p$, l'application $\varphi\mapsto\int_{\mathbb{R}^{n-p}}\partial_{x'}^{\alpha'}\varphi(0,x'')dx''$ est une "distribution de surface" sur $\mathbb{R}^n$, d'ordre $|\alpha'|$.

<u>Remarques</u>: Si $T\in\mathcal{D}'(U)$ et $\varphi_p\xrightarrow[p\to\infty]{}\varphi$ dans $\mathcal{D}(U)$ (c'est-à-dire dans l'<u>un</u> des $\mathcal{D}_K(U)$, alors $T(\varphi_p)\to T(\varphi)$, puisque $|T(\varphi_p-\varphi)|\leq C\sum_{|\alpha|\leq m}\sup_K|\partial^\alpha(\varphi_p-\varphi)|\to 0$.
On peut démontrer la réciproque : si $T:\mathcal{D}(U)\to\mathbb{C}$ a la propriété précédente (continuité sur les suites), c'est bien une distribution (majorée sur tout $\mathcal{D}_K(U)$ par des semi-normes).

Il est souvent pratique de noter $T(\varphi)=\langle T,\varphi\rangle$ comme un produit scalaire entre $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}$. On peut définir sur $\mathcal{D}'(U)$ plusieurs topologies associées à cette dualité. On se contentera ici de la plus "faible" : on dit que $T_p\xrightarrow[p\to\infty]{}T$ <u>faiblement</u> dans $\mathcal{D}'(U)$ si pour <u>tout</u> $\varphi\in\mathcal{D}(U)$, $\langle T_p,\varphi\rangle\xrightarrow[p\to\infty]{}\langle T,\varphi\rangle$, et qu'une application linéaire de $\mathcal{D}'(U)$ dans $\mathcal{D}'(V)$ est <u>faiblement continue</u> si l'image de toute suite faiblement convergente est faiblement convergente.

<u>Exemples</u>: Notons $\delta=\delta_0$ la mesure de Dirac à l'origine de $\mathbb{R}^n$.
<u>Alors $T_{\rho_p}\xrightarrow[p\to\infty]{}\delta$</u> faiblement (dans $\mathcal{D}'(U)$ dès que $U\ni 0$). En effet

$$|\langle T_{\rho_p},\varphi\rangle-\langle\delta,\varphi\rangle|=\left|\int_{B(0,\frac{1}{p})}\rho_p(x)\varphi(x)dx-\varphi(0)\int_{B(0,\frac{1}{p})}\rho_p(x)dx\right|\leq\underbrace{\left(\int\rho_p(x)dx\right)}_{=1}.\sup_{B(0,\frac{1}{p})}|\varphi(x)-\varphi(0)|\xrightarrow[p\to\infty]{}0$$

On écrira souvent $\langle f,\varphi\rangle$ au lieu de $\langle T_f,\varphi\rangle$, identifiant la fonction f et la distribution associée T_f, lorsque $f\in L^1_{loc}(U)$. Par exemple $\rho_p\to\delta$ $(p\to\infty)$; de plus on écrira T_x pour "la distribution T de la variable x".

Pour $a\in\mathbb{R}^n$ et $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, on définit la <u>translatée</u> τ_aT de T par
$\langle\tau_aT,\varphi\rangle=\langle T,\tau_{-a}\varphi\rangle=\langle T_x,\varphi(x+a)\rangle$ pour $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Comme les translations sont continues de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on obtient aussitôt « par transposition », qu'elles sont <u>faiblement continues</u> de $\mathcal{D}'$ dans $\mathcal{D}'$! De plus on vérifie aussitôt que, pour $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, <u>$T_{\tau_af}=\tau_aT_f$</u> (que l'on écrit donc τ_af !).

---

§4 LE MODULE $\mathcal{D}'(U)$

On prolonge ici l'action des o.d.l. aux distributions :

- d'abord on définit, pour $f \in \mathcal{E}(U)$ la <u>multiplication par f</u> : $\mathcal{D}'(U) \to \mathcal{D}'(U)$ par : $\forall \varphi \in \mathcal{D}(U), \forall T \in \mathcal{D}'(U)$ $\boxed{\langle fT, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle}$

  Comme $\varphi \mapsto f\varphi$ est continue dans $\mathcal{D}(U)$, fT est bien une distribution, et la multiplication par f est faiblement continue. De plus ce produit prolonge celui des fonctions : si $g \in L^1_{loc}(U)$, $f \cdot T_g = T_{fg}$

- puis on définit les <u>dérivées partielles</u> d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(U)$ par $\langle \partial_j T, \varphi \rangle = -\langle T, \partial_j \varphi \rangle$ (pour $\varphi \in \mathcal{D}(U)$). Comme $\varphi \mapsto -\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$ est continue dans $\mathcal{D}(U)$, $\partial_j T \in \mathcal{D}'(U)$, et la dérivation est faiblement continue dans $\mathcal{D}'(U)$. De plus elle prolonge celle des fonctions : $\partial_j T_f = T_{\partial_j f}$ (intégrer par parties). En itérant, pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, et $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$:
  $\boxed{\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle}$ définit une application $T \mapsto \partial^\alpha T$, faiblement continue dans $\mathcal{D}'(U)$, et prolongeant celle des fonctions (Ainsi on a rendu "<u>indéfiniment dérivables</u>" (faiblement, au "sens des distributions") au moins toutes les fonctions localement intégrables !)

- en composant les deux opérations précédentes, pour tout o.d.l. sur U, $P(x,\partial) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) \partial^\alpha$, on obtient un opérateur différentiel linéaire faiblement continu dans $\mathcal{D}'(U)$ en posant, pour $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, $T \in \mathcal{D}'(U)$
  $\boxed{\langle P(x,\partial) T, \varphi \rangle = \langle T, {}^tP\varphi \rangle}$, où ${}^tP$ est le "transposé formel" de P :
  $${}^tP(x,\partial) = \sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (a_\alpha \,\bullet) = \sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} \Big(\sum_{0 \le \beta \le \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} (\partial^{\alpha-\beta} a_\alpha) \partial^\beta \Big)$$
  ($\alpha!$ signifie $\alpha_1! \dots \alpha_n!$, et $0 \le \beta \le \alpha$ signifie $0 \le \beta_j \le \alpha_j$ pour $j = 1, \dots, n$.)

- on résume tout ceci en disant que $\mathcal{D}'(U)$ est un $\mathcal{P}(U)$-module, où $\mathcal{P}(U)$ est l'anneau des o.d.l. sur U, et que $\mathcal{E}(U)$ en est un sous-module : si $f \in \mathcal{E}(U)$, $T \in \mathcal{D}'(U)$, $P \in \mathcal{P}(U)$: $PT_f = T_{Pf}$.

  ${}^tP$ est un o.d.l. de même degré que P, et bien sûr ${}^t({}^tP) = P$.

  Chercher toutes les solutions (<u>faibles</u>) d'un o.d.l. dans U, c'est vouloir déterminer le noyau de cet opérateur dans $\mathcal{D}'(U)$, au sens précédent.

- la formule de <u>Leibniz</u> (par exemple) s'étend au produit d'une fonction et d'une distribution : pour $f \in \mathcal{E}(U)$, $T \in \mathcal{D}'(U)$,
  $$\boxed{\partial^\alpha (fT) = \sum_{0 \le \beta \le \alpha} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!\beta!} \partial^{\alpha-\beta} f \cdot \partial^\beta T}$$

Preuve : par récurrence sur $|\alpha|$, à partir de $|\alpha| = 1$:
$\langle \partial_j (fT), \varphi \rangle = -\langle fT, \partial_j \varphi \rangle = -\langle T, \partial_j (f\varphi) \rangle + \langle T, (\partial_j f)\varphi \rangle$
$= \langle \partial_j T, f\varphi \rangle + \langle (\partial_j f) T, \varphi \rangle = \langle f(\partial_j T) + (\partial_j f) T, \varphi \rangle$. ■

Exemples de calcul : On note H et on appelle Fonction de Heaviside la fonction de $\mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ qui vaut 1 sur $\mathbb{R}^+$ et 0 sur $\mathbb{R}^-$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a $\langle xH, \varphi\rangle = \int_0^{+\infty} x\varphi(x)dx$, d'où $\langle (xH)', \varphi\rangle = -\langle xH, \varphi'\rangle = -\int_0^{+\infty} x\varphi'(x)dx = \int_0^{+\infty}\varphi(x)dx$, soit $(xH)' = H$. Puis $\langle (xH)'', \varphi\rangle = \langle H', \varphi\rangle = \langle H, -\varphi'\rangle = -\int_0^{+\infty}\varphi'(x)dx = \varphi(0)$, soit $\boxed{H' = \delta}$. (Ce sont des cas particuliers de la "formule des sauts" ci-dessous).

Une formule importante : $\boxed{x\delta = 0}$, puisque $\langle x\delta, \varphi\rangle = \langle \delta, x\varphi\rangle = (x\varphi)(0) = 0$.

De même $x.\delta' = -\delta$: $\langle x\delta', \varphi\rangle = \langle \delta', x\varphi\rangle = -\langle \delta, (x\varphi)'\rangle = -\langle \delta, \varphi + x\varphi'\rangle = -\varphi(0)$; qui se généralise en $x.\delta^{(q)} = -q\delta^{(q-1)}$ (exercice : simplifier $x^p.\delta^{(q)}$, ...)

Les définitions précédentes rendent clair que si T est une distribution d'ordre p ; et P un o.d.l. d'ordre q, PT est d'ordre $p+q$ (au plus). La continuité faible de P implique de plus aussitôt que, si $T_p \to T$ faiblement, $PT_p \to PT$ faiblement. Par exemple $P\rho_p \to P\delta$ $(p\to\infty)$.

> Formule des sauts : Soit $f \in \mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$, C^∞ sauf en un nombre fini de points $x_1, \dots, x_q$, où f a des limites à droite et à gauche $f(x_j)^{\pm}$, et supposons $f' \in \mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$. Alors : $(T_f)' = T_{f'} + \sum_{j=1}^{q}[f(x_j)^+ - f(x_j)^-]\delta_{x_j}$.

Preuve : par intégration par parties. ■

Remarques : Les formules $(xH)' = H$ et $H' = \delta$ n'en sont que des exemples. La différence $f(x_j)^+ - f(x_j)^- = \sigma_f(x_j)$ s'appelle le saut de f en x_j. Il existe de nombreuses "formules des sauts" à plusieurs variables, indispensables en physique : les "sauts" sont alors des distributions portées par des hypersurfaces ; on les laisse ici en exercice : ce ne sont en fait que des formulations "faibles" de la formule de Stokes, (c'est-à-dire qu'on les obtient par des intégrations par parties).

---

§5 LE "FAISCEAU" $\mathcal{D}'$

Les distributions se laissent "localiser" ; il suffit, pour en définir une, de la donner "localement, au voisinage de chaque point". En effet :

D'abord si $V \subset U$, $\mathcal{D}(V) \hookrightarrow \mathcal{D}(U)$ est injective et continue ; la composée $\mathcal{D}(V) \hookrightarrow \mathcal{D}(U) \xrightarrow{T} \mathbb{C}$ définit la restriction $T|_V$ à V de toute distribution $T \in \mathcal{D}'(U)$.

Par exemple $H|_{]0,+\infty[} = 1$, $H|_{]-\infty,0[} = 0$, $\delta|_{\mathbb{R}^*} = 0$, $vp\frac{1}{x}\big|_{\mathbb{R}^*} = \frac{1}{x}$

et plus généralement, si $f \in \mathbb{L}^1_{loc}(U)$, $T_f|_V = T_{f|_V}$

Mais inversement des données locales compatibles se recollent :

> Proposition : Soient $(U_i)_{i\in I}$ des ouverts recouvrant U, et pour $i \in I$, $j \in I$ $T_i \in \mathcal{D}'(U_i)$, telles que $T_i|_{U_i\cap U_j} = T_j|_{U_i\cap U_j}$. Alors il existe une et une seule distribution $T \in \mathcal{D}'(U)$ telle que $T|_{U_i} = T_i$ $(i \in I)$.

Preuve : Soit $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, et $(\alpha_i)_{i\in I}$ une partition de l'unité : $\Sigma\alpha_i = 1$ au voisinage de $\operatorname{supp}\varphi$, et $\alpha_i \in \mathcal{D}(U_i)$. Comme $\varphi = \Sigma \alpha_i\varphi$, nécessairement $<T,\varphi> = \sum <T,\alpha_i\varphi> = \sum <T_i,\alpha_i\varphi>$, et cette formule définit un élément de $\mathcal{D}'(U)$ car $|<T,\varphi>| \leq \sum |<T_i,\alpha_i\varphi>| \leq \sum_i C_i \sum_{|\alpha|\leq m_i} \sup_K |\partial^\alpha(\alpha_i\varphi)| \cdots$

Enfin si $\varphi \in \mathcal{D}(U_i)$, $<T,\varphi> = \sum_j <T_j,\alpha_j\varphi>$, avec $\alpha_j\varphi \in \mathcal{D}(U_i\cap U_j)$ d'où $<T,\varphi> = \sum_j <T_i,\alpha_j\varphi> = <T_i,\varphi>$ (et donc T ne dépend pas du choix des α_i). ■

On définit alors le support de $T \in \mathcal{D}'(U)$ comme le fermé de U $\operatorname{supp} T$, complémentaire du plus grand ouvert de U où la restriction de T est nulle (c'est la réunion de tous, par la proposition précédente). Clairement $\operatorname{supp} T_f = \operatorname{supp} f$ pour $f \in L^1_{loc}$.

Proposition : Une distribution à support compact est d'ordre fini

Preuve : Soit $T \in \mathcal{D}'(U)$, $\operatorname{supp} T = F \Subset U$, et $\alpha \in \mathcal{D}(U)$, $\alpha \equiv 1$ au voisinage de F ("partition" associée au recouvrement de F par le seul ouvert U)

Si $K = \operatorname{supp}\alpha$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, on a $(1-\alpha)\varphi \in \mathcal{D}(U-F)$, donc $<T,(1-\alpha)\varphi> = 0$, d'où $|<T,\varphi>| = |<T,\alpha\varphi>| \leq C \sum_{|\beta|\leq m} \sup_K |\partial^\beta(\alpha\varphi)| \cdots$, où C et m ne dépendent pas de φ, mais seulement de α. ■

Proposition : Une distribution à support ponctuel est une combinaison linéaire (finie) de dérivées de la mesure de Dirac au point support.

Preuve : On peut supposer $\operatorname{supp} T \subset \{0\} \subset U$, choisir $\alpha \in \mathcal{D}(U)$ valant 1 au voisinage de 0, poser $\alpha_p(x) = \alpha(px)$ pour $p \in \mathbb{N}$, et constater que $\alpha_p T = T$, puisque $\operatorname{supp}(1-\alpha_p)T = \emptyset$. Par la proposition précédente, il existe $m \in \mathbb{N}$ indépendant de $K \Subset U$, et $C > 0$ tels que

$$\forall \psi \in \mathcal{D}_K(U) \qquad |<T,\psi>| \leq C \sum_{|\beta|\leq m} \sup |\partial^\beta\psi|$$

Pour $\varphi \in \mathcal{D}_K(U)$, $|<T,\varphi>| = |<T,\alpha_p\varphi>| \leq C \sum_{|\beta|\leq m} \sup |\partial^\beta(\alpha_p\varphi)|$

et chaque terme à droite tend vers zéro quand $p \to \infty$, si $\varphi^{(\beta)}(0) = 0$ pour $|\beta| \leq m+1$, car $\sup|\partial^\beta(\alpha_p\varphi)| \leq \sum_{0\leq\gamma\leq\beta} C_\beta^\gamma \sup|\partial^{\beta-\gamma}\alpha_p\, \partial^\gamma\varphi| \leq C^{ste} p^{|\beta-\gamma|} \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^{m-|\gamma|+1}$

Pour tout $\chi \in \mathcal{D}(U)$, on peut écrire $\chi(x) = \sum_{|\beta|\leq m+1} \frac{\chi^{(\beta)}(0)}{\beta!} x^\beta + \eta(x)$, avec $\eta \in C^\infty$ et $\eta^{(\beta)}(0) = 0$ pour $|\beta| \leq m+1$, d'où

$$<T,\chi> = <T,\alpha\chi> = \underbrace{<T,\alpha\eta>}_{=0} + \sum_{|\beta|\leq m+1} \frac{\chi^{(\beta)}(0)}{\beta!} <T, x^\beta\alpha(x)>$$

$$= \sum_{|\beta|\leq m+1} c_\beta\, \chi^{(\beta)}(0) = <\sum_{|\beta|\leq m+1} c_\beta (-1)^{|\beta|}\delta^{(\beta)}, \chi> \ ■$$

Remarquons que les deux preuves précédentes utilisent déjà implicitement la

Proposition : Si $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, $T \in \mathcal{D}'(U)$ et $\operatorname{supp} T \cap \operatorname{supp}\varphi = \emptyset$, alors $<T,\varphi> = 0$

Preuve : en effet $\varphi \in \mathcal{D}(U - \operatorname{supp} T)$. ■

§6 PARTIES FINIES

A chaque fonction $\mathcal{L}^1_{loc}$ est attachée de façon naturelle, et non ambiguë, une distribution. Mais il est utile de définir des distributions attachées à certaines fonctions non localement intégrables, mais "usuelles", des distributions qui les "prolongent" faiblement. $vp\frac{1}{x}$, définie au §3, en est un exemple; donnons-en un autre: $Pf\frac{1}{x^2}$:

Si $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)=x^2\psi(x)$, avec $\psi\in C^\infty(\mathbb{R})$

Si $\operatorname{supp}\varphi\subset[-A,A]$, $\displaystyle\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx=\frac{2}{\varepsilon}\varphi(0)+\left[\int_{-A}^{A}\psi(x)dx-\frac{2}{A}\varphi(0)\right]+\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\psi(x)dx.$

Le crochet, qui est la "partie finie" du développement limité en ε de $\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx$ est une distribution, notée $<Pf\frac{1}{x^2},\varphi>$, puisque

$\sup_{[-A,A]}|\psi(x)|\leq\sup|\varphi''|$, d'où $|<Pf\frac{1}{x^2},\varphi>|\leq\sup\left(\frac{2}{A},2A\right)\sum_{\alpha\leq 2}\sup|\partial^\alpha\varphi|$

On peut définir de la même façon la "partie finie de $R(x)$" dès que R est une fraction rationnelle, ou plus généralement une fonction $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ régulière sauf en une suite (x_n) de "pôles", c'est-à-dire de points isolés où $|R(x)|$ ne croît pas plus vite qu'une puissance de $(x-x_n)^{-1}$: pour $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ on définit alors $<Pf\,R(x),\varphi(x)>$ comme le terme constant du développement limité (généralisé) en puissances de ε et $\log\varepsilon$, de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}-F_\varepsilon}R(x)\varphi(x)dx$, avec $F_\varepsilon=\bigcup_n[x_n-\varepsilon,x_n+\varepsilon]$.

Des développements de Taylor aux points x_n montrent que $Pf\,R$ est bien une distribution, d'ordre au plus le sup des ordres des pôles de R.

Ces distributions interviennent de façon naturelle en physique; mais leur définition (surtout à plusieurs variables) est assez arbitraire: il existe d'autres distributions dont la restriction à $\mathbb{R}-F_0$ vaut $R(x)$. Par exemple, si $R(z)$ est une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$, ses pôles réels sont isolés et, pour ε assez petit non nul, $R(x\pm i\varepsilon)\in C^\infty(\mathbb{R})$; on peut donc définir $<R(x\pm i0),\varphi(x)>$, pour $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ comme le terme constant d'un développement limité en ε de $\int_{\mathbb{R}}R(x\pm i\varepsilon)\varphi(x)dx$, et vérifier que c'est bien une autre "partie finie" de R; elle ne diffère de la précédente que d'une distribution portée par l'ensemble F (fini) des pôles de R (puisque les deux valent R sur $\mathbb{R}-F$), donc une combinaison de dérivées de mesures de Dirac aux points de F. On peut même démontrer (calcul des résidus), que lorsque R est une fraction rationnelle: $Pf\,R(x)=\frac{1}{2}\left(R(x+i0)+R(x-i0)\right)$

Nous n'étudierons ici que l'exemple-type de $vp\frac{1}{x}$:

Pour $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\operatorname{supp}\varphi\subset[-A,A]$, $\varphi(x)=\varphi(0)+x\psi(x)$ avec $\psi\in C^\infty(\mathbb{R})$,

et $$\int_{\mathbb{R}}\frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}dx=\varphi(0)\int_{-A}^{A}\frac{dx}{x+i\varepsilon}+\int_{-A}^{A}\frac{x\psi(x)dx}{x+i\varepsilon}\xrightarrow[\varepsilon\to0^\pm]{}\int_{-A}^{A}\psi(x)dx=\langle vp\tfrac{1}{x},\varphi\rangle$$

$$\int_{-A}^{A}\frac{x\,dx}{x^2+\varepsilon^2}-i\varepsilon\cdot\frac{2}{\varepsilon}\operatorname{ArcTg}\frac{A}{\varepsilon}\xrightarrow[\varepsilon\to0^\pm]{}\mp i\pi$$

Autrement dit: $\langle\frac{1}{x\pm i0},\varphi\rangle=\langle vp\frac{1}{x},\varphi\rangle\mp i\pi\varphi(0)$, soit

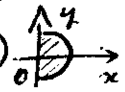
$\boxed{\frac{1}{x\pm i0}=vp\frac{1}{x}\mp i\pi\delta}$, d'où la formule annoncée : $vp\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+i0}+\frac{1}{x-i0}\right)$,

et en prime le "développement de la mesure de Dirac en ondes planes"* (sic):

$$\delta=\frac{-1}{2i\pi}\left(\frac{1}{x+i0}-\frac{1}{x-i0}\right)$$

(§7) THÈMES D'EXERCICES SUR LE CHAPITRE I

1) Calculer, en passant "en polaires", le carré de $I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}dx$, d'où I.

2) 

L'abscisse du centre de gravité du demi-cercle solide homogène ci-contre de rayon R est $\frac{2R}{\pi}$; celle du demi-disque est $\frac{4R}{3\pi}$.

3) Pour P polynôme, $f,g\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $P(\partial)(fg)=\sum_{\alpha}\frac{1}{\alpha!}P^{(\alpha)}(\partial)f\cdot\partial^\alpha g$ (formule de "Leibniz-Hörmander"). On peut se ramener à la formule de Taylor en posant $f(x)=e^{i\langle a,x\rangle}$, $g(x)=e^{i\langle b,x\rangle}$. Et si f ou $g\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$?

4) Formule de Taylor "avec reste intégral": $f\in C^{n+1}$

$$f(a+x)=f(a)+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n+\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1(1-u)^n f^{(n+1)}(a+ux)du$$

En déduire que si $f\in C^\infty$ $\quad\left(=\frac{1}{n!}\int_0^x(x-t)^n f^{(n+1)}(a+t)dt\right)$

$f(a)=\dots=f^{(p-1)}(a)=0$,

$g(x)=\frac{f(x)}{(x-a)^p}$ est C^∞ est $\sup|g|\le c^{te}\cdot\sup|f^{(n+1)}|$ sur tout intervalle

5) $\varphi\mapsto f\varphi$, avec $f\in C^\infty$, est un isomorphisme de $\mathcal{D}(U)$ et de $\mathcal{E}(U)$ si et seulement si $f\neq0$ dans U.

6) Si $\ell:\mathcal{D}(U)\to\mathbb{C}$ est une forme linéaire positive ($\forall\varphi\geq0$, $\ell(\varphi)\geq0$), alors c'est une distribution d'ordre zéro.

7) Équivalence des familles $\left(\sup_K|\partial^\alpha f|\right)$, $\left(\int_K|\partial^\alpha f|dx\right)$ et $\left(\left(\int_K|\partial^\alpha f|^2dx\right)^{1/2}\right)$ pour définir la topologie de $\mathcal{E}(U)$

a) Si $f\in C^\infty(I)$, $[a,b]\subset I\subset\mathbb{R}$, montrer que $\sup_{[a,b]}|f|\le\frac{1}{b-a}\int_a^b|f(x)|dx+\int_a^b|f'(x)|dx$

($\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ est de la forme $f(c)$, et $\sup|f|$ de la forme $f(d)$, avec $c,d\in[a,b]$)

Montrer que les deux termes à droite sont nécessaires.

b) Si $f\in C^\infty(U)$, et P est un pavé $P\subset U\subset\mathbb{R}^n$, montrer de même que

$\sup_P|f|\le\sum_{0\le\alpha\le\varepsilon}\frac{1}{(b-a)^{\varepsilon-\alpha}}\int_P|\partial^\alpha f|dx$, avec $\varepsilon=(1,1,\dots,1)$. Conclure à l'équivalence.

8) Théorème de Borel : $\boxed{\forall (a_n)\in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}\ \forall \varepsilon>0\ \exists f\in \mathcal{D}_{\bar{B}(0,\varepsilon)}(\mathbb{R}),\ \forall n\in\mathbb{N}\ f^{(n)}(0)=a_n}$

a) Se ramener à $(a_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $a_n\geq 1$, $a_n\nearrow$, $a_n\to+\infty$.

b) Montrer que $f(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{n!}x^n\varphi(a_n x)$, avec $\varphi\in\mathcal{D}$, $\varphi\equiv 1$ au voisinage de zéro, est C^∞ (convergence uniforme) et conclure. Cas de plusieurs variables ?

9) $\mathcal{D}$ n'est pas métrisable : $\nexists$ distance d sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $(\varphi_n \xrightarrow[\mathcal{D}]{} \varphi) \Leftrightarrow d(\varphi_n,\varphi)\to 0$

a) Sinon et si (φ_q^p), (φ_q) et $\varphi\in\mathcal{D}$ et $d(\varphi_q^p,\varphi_q)\xrightarrow[p\to\infty]{}0$ et $d(\varphi_q,\varphi)\xrightarrow[q\to\infty]{}0$, alors il existe une application $q\mapsto p(q)$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $d(\varphi_q^{p(q)},\varphi)\xrightarrow[q\to\infty]{}0$

b) Conclure avec $\varphi_q^p(x)=\frac{1}{p}\exp\left(\frac{q^2}{x^2-q^2}\right)\chi_{B(0,q)}$

10) On note $C^+(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ de support borné à gauche. Pour $f,g\in C^+$, on pose $f*g(x)=\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$

a) Montrer que C^+ est un anneau commutatif (pour + et $*$) intègre et non unitaire.

b) Si (ρ_p) est la suite régularisante du §1 (sur $\mathbb{R}$), on pose $h_p(x)=\int_{-\infty}^{x}\rho_p(t)dt$. Montrer que $h_p\in C^+$, et que pour $f\in C^+$, h_p*f tend, uniformément sur tout compact vers la primitive de f qui est dans C^+.

c) Calculer $H=\lim_{p\to\infty}h_p$. Montrer, pour $f\in C^+$, que $H*f$ est bien définie, et que c'est la primitive de f dans C^+. Que vaut $H*\rho_p'$?

d) Trouver, pour $q\in\mathbb{N}-\{0,1\}$, $u_q\in C^+$ telle que $\forall f\in C^+$, $(u_q*f)^{(q)}=f$. Montrer $u_q*u_{q'}=u_{q+q'}$ $(q,q'\in\mathbb{N}-\{0,1\})$ Et pour $q=1,0$?

11) Sur les équations différentielles linéaires dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

A) à coefficients constants

a) Pour $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$: $(\exists\psi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \psi'=\varphi)\Leftrightarrow\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)dx=0$

b) Soit $\alpha\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}}\alpha(x)dx=1$, et $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $T'=0$. Montrer que, $\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\langle T,\varphi\rangle=\langle T,\alpha\rangle\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)dx$. En déduire $T=T_{cte}$.

c) $\forall\varphi\in\mathcal{D}\ \exists!\ \psi\in\mathcal{D}$, $\varphi=\langle 1,\varphi\rangle\alpha+\psi'$ et si $S\in\mathcal{D}'$, $\varphi\mapsto-\langle S,\psi\rangle$ est une distribution sur $\mathbb{R}$. Résoudre l'équation $T'=S$ à l'inconnue $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

d) Pour $\psi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$: $(\exists\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \psi=\varphi+\varphi')\Leftrightarrow\int_{\mathbb{R}}e^{x}\psi(x)dx=0$ Pour $T\in\mathcal{D}'$, si $T'=T$, que vaut $\langle T,\psi\rangle$? Résoudre $T'=T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

e) Résoudre $T''+T=0$ (par $T'=S$ et $S'=-T$), puis tenter de généraliser.

B) à coefficients variables

a) Résoudre $x^pT^{(q)}=0$. Solutions à support dans $[0,+\infty[$?

b) Si $T\in\mathcal{D}'$ et $x^3T'+2T=0$, $T/_{\mathbb{R}^*}$ est C^∞. Calculer $T/_{\mathbb{R}^*}$

Soit T_0 la distribution à $\exp(\frac{1}{x^2})$ sur $\mathbb{R}^+$, et $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $T/_{\mathbb{R}^+}=T_0$. Calculer $\langle T,\varphi_p\rangle$ où $\varphi_p(x)=\varphi(px)$, $\varphi\in\mathcal{D}(]0,1[)$ valant 1 sur $[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$ et ≥ 0. En déduire que T n'existe pas, puis que l'équation ci-dessus n'a pas de solution $\neq 0$.

12) a) Soit $(T_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions sur $U\subset\mathbb{R}^n$ telle que :
$$\forall \alpha\in\mathcal{D}(U)\ \exists p_0\in\mathbb{N}\ \forall p>p_0\ \ \alpha.T_p=0$$
Montrer que $\varphi\mapsto\sum_{p=1}^{\infty}\langle T_p,\varphi\rangle$ définit une distribution sur U, notée $\sum_{p=1}^{\infty}T_p$, et limite faible des sommes partielles $\sum_{p=1}^{N}T_p$.

b) Exemples sur $\mathbb{R}$: $\sum\delta_p^{(p)}$, $\sum\chi_{[p,+\infty[}$. Calculer $\left(\sum T_p\right)'$ sur ces exemples, puis en général.

13) Théorème : $\forall T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})\ \forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}) : \{\forall x\in\text{supp}\,T,\ p\in\mathbb{N},\ \varphi^{(p)}(x)=0\}\Rightarrow\langle T,\varphi\rangle=0$

a) Pour $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ trouver une suite (I_n) d'intervalles ouverts bornés deux à deux disjoints, suite finie ou dénombrable, telle que : $(\exists p\ \varphi^{(p)}(x)\neq0)\Leftrightarrow x\in\bigcup I_n$.
Montrer : $\forall p\in\mathbb{N},\ \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n\geq n_0\ \sup_{I_n}|\varphi^{(p)}|<\varepsilon$

b) On pose $\psi_n(x)=\begin{cases}\varphi(x) \text{ si } x\in I_n\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$ et $\varphi_n(x)=\psi_1+\dots+\psi_n$
Montrer que $\psi_n,\varphi_n\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, et $\varphi_n\to\varphi$ dans $\mathcal{D}$.

c) Montrer que $\tau_{\frac{1}{n}}\varphi\to\varphi$ dans $\mathcal{D}$. Déduire de (b) et (c) le résultat.

14) Montrer que la série $\sum_{n\geq1}\frac{e^{inx}}{n^2}$ est faiblement convergente dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers une distribution T. Que vaut $\tau_{2\pi}T$?
Montrer que $\sum e^{inx}$ l'est aussi, puis toute série $\sum f(n)e^{inx}$, où $f(n)$ est une fonction à croissance lente (majorée par $C(1+|n|^{\alpha})$ pour certains C,α)

15) Montrer que $\dfrac{p^3x}{(1+p^2x^2)^2}\xrightarrow[\mathcal{D}'(\mathbb{R})]{}-\dfrac{\pi}{2}\delta'$ quand $p\to\infty$

16) On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\pi$ (convergence simple)

Si α est une régularisée de $\chi_{[-1,1]}$, montrer que $\left\langle\frac{\sin\lambda x}{x},\alpha\right\rangle\xrightarrow[\lambda\to\infty]{}\pi$, et que $x.\frac{\sin\lambda x}{x}\xrightarrow[\mathcal{D}']{}0$. En déduire $\frac{\sin\lambda x}{x}\xrightarrow[\mathcal{D}']{}\pi\delta$ $(\lambda\to\infty)$

17) On pose $g_n(x)=\begin{cases}(1-x^2)^n \text{ pour } |x|<1\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$, et $h_n=\frac{1}{a_n}g_n$ avec $a_n=\int_{-1}^{1}g_n(t)dt$

Pour f continue, $\text{supp} f\subset[-\frac12,\frac12]$, montrer que $f*h_n\xrightarrow[n\to\infty]{}f$ uniformément sur tout $\mathbb{R}$ (on peut minorer a_n en utilisant $1-x^2\geq1-|x|$ pour $|x|<1$), et que $f_n|_{[-\frac12,\frac12]}$ est un polynôme. En déduire le théorème de Weierstrass (bien connu)

18) $\varphi\mapsto\chi_K*\varphi$ est continue dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, dès que $K\Subset\mathbb{R}^n$

19) Soient f,g continues sur $\mathbb{R}$. Si $(T_f)'=T_g$, f est dérivable et $f'=g$.

20) Calculer toutes les dérivées (au sens des distributions) de $e^{-a|x|}$ $(a>0)$
Calculer celles de $\varphi\overset{T}{\longmapsto}\int_0^{+\infty}\sin x\,\varphi(x)dx-\int_{-\infty}^{0}\sin x\,\varphi(x)dx$
Calculer celles de $H(x)e^{\lambda x}$ $(\lambda\in\mathbb{C})$

21) Donner une formule explicite pour $\langle Pf \frac{1}{x^n}, \varphi \rangle$ $(\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}))$
Résoudre, à l'inconnue $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, l'équation $x.T = vp\frac{1}{x}$. Généraliser.

22) Montrer que les formules $\varphi \xmapsto{T_1} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\varphi(x,y)}{x+iy}\,dxdy$, $\varphi \xmapsto{T_2} \iint_{D_v} \varphi(x,y)\,dxdy$ (où $v>0$ et $D_v = \{(x,y) \mid v^2y^2 - x^2 \geq 0$ et $y \geq 0\}$), et $\varphi \xmapsto{T_3} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x+iy| \geq \varepsilon} \varphi(x,y) \log\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ définissent trois distributions sur $\mathbb{R}^2$.
Comparer $P_j(\partial)T_j$ à $\delta_{(0,0)}$ pour $j=1,2,3$, et pour
$P_1(\partial) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $P_2(\partial) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $P_3(\partial) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

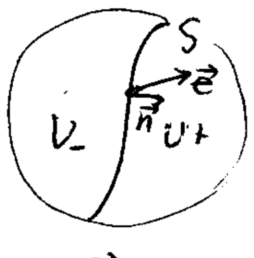
23) Qu'est-ce qu'une distribution paire, impaire? Définir ses parties paire et impaire. Idem pour les parties réelle et imaginaire.
Expliciter ces décompositions pour $\frac{1}{x+i0}$ et $Pf\, R(x)$.

24) Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que : $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\langle T, \varphi\psi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \langle T, \psi \rangle$
Montrer que $T=0$ ou $T=\delta_a$ avec $a \in \mathbb{R}$.

25) Montrer que $\varphi \longmapsto \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} \varphi\left(\frac{1}{N}\right) - \varphi'(0)\log N - \varphi(0)N\right)$ définit une distribution sur $\mathbb{R}$. Quel est son support.

(Z Montrer que $\forall F$ fermé de $U \subset \mathbb{R}^n$ $\exists T \in \mathcal{D}'(U)$, $\operatorname{supp} T = F$.)

26) <u>La "formule des sauts à plusieurs variables"</u>



S est l'hypersurface de U d'équation $x_1 = s(x_2, \ldots, x_n)$,
$U_\pm = \{x \in U \mid x_1 > s$ resp. $x_1 < s\}$
$f_\pm$ C^∞ dans $U_\pm$ continue sur $\overline{U_\pm}$; $\sigma_f = f_+|_S - f_-|_S$
$\delta_S : \varphi \longmapsto \int_S \varphi|_S\, dS$, avec $dS = \sqrt{1 + \sum_{j=2}^{n}\left(\frac{\partial s}{\partial x_j}\right)^2}\, dx_2 \ldots dx_n$
$\vec{e}$ champ de vecteurs dans U ("mesure de surface")
$\partial_{\vec{e}}$ l'opérateur différentiel associé : $\partial_{\vec{e}} f(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(x+t\vec{e})$
$\vec{n}$ vecteur normal à S, unitaire, orienté vers U_+.
Alors.
$$\boxed{\partial_{\vec{e}} T_f = T_{\partial_{\vec{e}} f} + \sigma_f \langle \vec{n}.\vec{e} \rangle \delta_S}$$

Démontrer cette formule quand S est un hyperplan et $\vec{e}$ constant, normal à S.
Remarquer que $\mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{D}'$ sont des notions invariantes par difféomorphisme ---- (cf. chap III, §2 pour $\mathcal{D}'$)
Calculer ce que donne cette formule sur des exemples où f est la fonction caractéristique d'un disque, d'un rectangle, ...