UNIVERSITE DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS

Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné
UMR C.N.R.S 6621

P U B L I C A T I O N S

P E D A G O G I Q U E S

MATHEMATIQUES

Maîtrise de Mathématiques

DISTRIBUTIONS ET EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

UNE INTRODUCTION

par

A. Cérezo

Pupé N° 34
Février 1999

Atelier Maths

Adresse : Parc Valrose - F-06108 NICE CEDEX 2 - Fax : 04 93 51 79 74
Tél. Standard Faculté des Sciences : 04 92 07 69 96

DISTRIBUTIONS ET EQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

INTRODUCTION

Les équations fondamentales de la physique sont des équations aux dérivées partielles linéaires. Mais leur forme "différentielle" pratique ne doit pas cacher que ce sont en fait des équations "intégrales", les grandeurs physiques mesurables n'étant que des moyennes macroscopiques de signaux microscopiques hors de portée.

Par exemple, considérons l'équation différentielle $xy'=0$, à l'inconnue la fonction $y(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si l'on cherche les solutions partout dérivables, on ne trouve que les constantes. Sur $\mathbb{R}^*$, l'équation équivaut à $y'=0$ et pour tout couple de constantes A, B, la fonction y qui vaut A sur $\mathbb{R}^-$ et $A+B$ sur $\mathbb{R}^+$ est solution. Pour $B \neq 0$, cette fonction n'est pas dérivable à l'origine, et n'est donc pas solution de l'équation sur tout $\mathbb{R}$ (d'ailleurs, que vaut-elle en 0 ?)

Pourtant c'est une "solution faible" de l'équation, qui peut avoir un "sens" physique : sa "valeur en un point" n'ayant guère de sens, le "point" étant une abstraction mathématique, attachons-nous plutôt aux valeurs de ses "moyennes" dans de petites régions, c'est-à-dire aux intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} y(x)\varphi(x)dx$, où φ est une densité assez régulière, et de support borné (c'est-à-dire nulle en dehors d'un intervalle $[-\ ,\ ]$). En intégrant par parties sur $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (xy')\varphi(x)dx = xy\varphi\Big|_{-\infty}^{0} + xy\varphi\Big|_{0}^{+\infty} - A\int_{-\infty}^{+\infty}(x\varphi)'dx - B\int_{0}^{+\infty}(x\varphi)'dx = 0.$$

Autrement dit, les moyennes de xy' sont bien nulles, et ce pour toute "mesure" $\varphi(x)dx$ régulière et de support borné.

C'est en ce sens qu'il y a lieu de chercher à résoudre les équations "différentielles" de la physique. La notion de solution "faible" remonte au début du XXe siècle, mais sa première formalisation mathématique cohérente fut mise au point par L. Schwartz vers 1950 sous le nom de "théorie des distributions"

Outre la résolution complète (c'est-à-dire "faible") des équations aux dérivées partielles linéaires, d'origine physique ou non, cette théorie permet un éclairage complet d'un autre vieil outil de la pensée mathématique et physique, la transformation de Fourier, et ce seront les deux applications principalement développées ici.

Plutôt que la fonction y, c'est la "forme linéaire" $T_y : \varphi \mapsto \int y\varphi\,dx$ qui nous intéresse, définie a priori sur l'espace $\mathcal{D}$ des "fonctions-tests" φ de classe C^∞ et à support compact; celle-ci est un élément du "dual" $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$; comme $\mathcal{D}$ est de dimension infinie, on doit se restreindre aux formes linéaires continues, pour une certaine topologie définie sur $\mathcal{D}$; une façon usuelle de le faire, est d'en faire un espace vectoriel normé (un Banach par exemple), et si possible avec une norme dérivant d'un produit scalaire (un Hilbert étant son propre dual). Mais les topologies les plus utiles sur les espaces de fonctions (par exemple la convergence uniforme sur tout compact des fonctions continues) ne sont pas en général celles d'espaces normés, d'où l'utilité des notions qui suivent:

<u>Préliminaire: Espaces vectoriels topologiques</u>

1) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Une <u>semi-norme</u> sur E est une application $p : E \to \mathbb{R}^+$ telle que $p(f+g) \leq p(f)+p(g)$, et $p(\lambda f) = |\lambda| p(f)$ $(\forall \ldots)$
À une famille $(p_\alpha)_{\alpha\in A}$ de semi-normes sur E correspond la topologie engendrée par les "<u>boules-ouvertes</u>" $B(p_\alpha, r) = \{f \in E \mid p_\alpha(f) < r\}$.
E est <u>séparé</u> si et seulement si : $\{\forall \alpha \in A,\ p_\alpha(f) = 0\} \Rightarrow f = 0$.

<u>Exemple</u>: Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $E = C^\infty(U)$. Soit $(K_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une famille exhaustive de compacts de U ($K_p \subset \mathring{K}_{p+1}$ et $\forall K \subset\subset U$, $K \subset K_p$ pour p assez grand), par exemple $K_p = \{x \in U \mid \|x\| \leq p$ et $d(x, \complement U) \geq \frac{1}{p}\}$.
Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $p \in \mathbb{N}$ et $f \in E$, posons $p_{\alpha,p}(f) = \sup_{K_p} |\partial^\alpha f|$.
La topologie définie par ces semi-normes est celle de la convergence uniforme sur tout compact de la fonction et de ses dérivées, et ne dépend pas du choix des $(K_p)_{p\in\mathbb{N}}$; <u>muni</u> de cette topologie, E se note $\mathcal{E}(U)$.

2) Soient $(p_\alpha)_{\alpha\in A}$ et $(q_\beta)_{\beta\in B}$ deux familles de semi-normes sur le même espace E, telles que : $\forall \beta\ \exists \alpha, C>0, \forall f, q_\beta(f) \leq C p_\alpha(f)$; alors l'application linéaire $(E,(p_\alpha)) \xrightarrow{id} (E,(q_\beta))$ est <u>continue</u> : la topologie associée aux (p_α) est <u>plus fine</u> que l'autre. Si c'est vrai dans les deux sens, les deux familles définissent la même topologie : on les dit <u>équivalentes</u>.

<u>Exemple</u>: Sur $C^\infty(U)$, si l'on pose $p_{\alpha,p}(f) = \sup_{K_p} |\partial^\alpha f|$, $p'_{\alpha,p}(f) = \int_{K_p} |\partial^\alpha f|\,dx$ et $p''_{\alpha,p}(f) = \left(\int_{K_p} |\partial^\alpha f|^2 dx\right)^{1/2}$, il est clair que les $(E,p) \xrightarrow{id} (E,p^*) \xrightarrow{id} (E,p)$ sont continues; en fait on peut montrer que ces trois familles sont équivalentes (cf. §7, exercice 7).

3) En particulier s'il existe $A' \subset A$ tel que : $\forall \alpha \in A\ \exists \alpha' \in A', C > 0 : p_\alpha \leq C p_{\alpha'}$, la sous-famille $(p_{\alpha'})_{\alpha' \in A'}$ définit la même topologie que la famille complète $(p_\alpha)_{\alpha \in A}$ - On utilise cette remarque pour se borner dès qu'on le peut à une famille dénombrable de semi-normes.

Exemple : C'est ce qu'on a déjà fait dans le cas de $\mathcal{E}(U)$, dont la topologie serait "naturellement" définie par les $\sup_K |\partial^\alpha f|$ pour tout compact K de U.

4) Si A est indicié par $\mathbb{N}$, et que E séparé, poser, pour $f, g \in E$,
$$d(f,g) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \frac{p_{\alpha_n}(f-g)}{1 + p_{\alpha_n}(f-g)}$$ définit une distance sur E, qui donne la même topologie : E est donc un espace "métrisable" (on pourrait modifier d, sans changer la topologie ...)

Exemple : $\mathcal{E}(U)$ est un espace métrique complet (espace "de Fréchet"). En particulier, on peut lui appliquer le théorème de Baire et ses conséquences ! Pourtant la topologie de $\mathcal{E}(U)$ ne peut pas être définie par une norme.

5) Pour en savoir (beaucoup) plus sur les e.v.t., on peut consulter par exemple : F. Trèves, "Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels". (Academic Press)

Certains e.v.t. utiles ne sont même pas métrisables : c'est justement le cas de l'espace $\mathcal{D}$, à la base de la théorie des distributions. (cf §7, exercice 9)