

Pincement sur le spectre et le volume en courbure de Ricci positive

ERWANN AUBRY¹

Institut de mathématiques
Université de Neuchâtel,
erwann.aubry@unine.ch

Abstract

We shall show that a complete manifold of dimension n with $\text{Ric} \geq n-1$ and its n -st eigenvalue close to n is both Gromov-Hausdorff close and diffeomorphic to the sphere. This extends, in an optimal way, a result of P. Petersen [13] (as a by-product, we fill a gap stated in the erratum [14]). We shall also show that a manifold with $\text{Ric} \geq n-1$ and volume close to $\frac{\text{Vol } \mathbb{S}^n}{\#\pi_1(M)}$ is both Gromov-Hausdorff close and diffeomorphic to the (lens) space $\frac{\mathbb{S}^n}{\pi_1(M)}$. This extends results of T. Colding [8] and T. Yamaguchi [17].

Nous montrons qu'une variété complète de dimension n , de courbure $\text{Ric} \geq n-1$ et dont la n -ième valeur propre est proche de n est Gromov-Hausdorff proche de $(\mathbb{S}^n, \text{can})$ et diffeomorphe à \mathbb{S}^n . Ce résultat étend de manière optimale un résultat de P. Petersen [13] (au passage nous comblons le trou annoncé par l'auteur dans l'erratum [14]). Nous montrons également qu'une variété vérifiant $\text{Ric} \geq n-1$ et de volume proche de $\frac{\text{Vol } \mathbb{S}^n}{\#\pi_1(M)}$ est diffeomorphe à l'espace (lenticulaire) $\frac{\mathbb{S}^n}{\pi_1(M)}$ et Gromov-Hausdorff proche de la métrique canonique. Ceci améliore des résultats de T. Colding [8] et T. Yamaguchi [17].

1 Introduction

Dans cet l'article, M désigne par défaut une variété riemannienne complète de dimension n et de courbure de Ricci

¹Travaux en partie financés par la bourse FNRS Suisse n°20-101469

$\text{Ric} \geq (n-1)$. Dans cet ensemble de variétés, la sphère \mathbb{S}^n (munie de sa métrique canonique) est un point extrémal pour de nombreux invariants riemanniens. Des théorèmes de comparaison classiques dûs à S. Myers, R. Bishop, A. Lichnerowicz, S. Cheng et M. Obata astreignent les variétés de cet ensemble à vérifier $\text{Diam } M \leq \text{Diam } \mathbb{S}^n = \pi$ (et donc M est compacte et $\pi_1(M)$ est fini), $\text{Vol } M \leq \text{Vol } \mathbb{S}^n$, $\text{Rad } M \leq \text{Rad } \mathbb{S}^n = \pi$ (où Rad désigne le radius, i.e. le rayon de la plus petite boule géodésique qui recouvre toute la variété), $\lambda_1(M) \geq \lambda_1(\mathbb{S}^n) = n$ (où $0 = \lambda_0(M) < \lambda_1(M) \leq \lambda_2(M) \leq \dots$ désigne le spectre du laplacien sur la variété, compté avec multiplicité). De plus, si l'égalité est réalisée dans une de ces inégalités, alors la variété M est isométrique à la sphère canonique \mathbb{S}^n (auquel cas, n est une valeur propre de M de multiplicité $n+1$).

Au vu de ces faits, il est naturel de chercher les propriétés (topologiques, différentiables ou métriques) de \mathbb{S}^n qui sont conservées par les variétés riemanniennes de courbure $\text{Ric} \geq n-1$ pour lesquelles l'un des invariants riemanniens considérés plus haut prend une valeur suffisamment proche de sa valeur extrémale.

Dans [8] et [9], T. Colding montre que les trois conditions suivantes sont équivalentes (toujours sous l'hypothèse $\text{Ric} \geq n-1$):

- (1) $\text{Vol } M$ est proche de $\text{Vol } \mathbb{S}^n$,
- (2) $\text{Rad } M$ est proche de π ,
- (3) M est Gromov-Hausdorff proche de \mathbb{S}^n .

P. Petersen a par la suite prouvé que la condition (2) est équivalente à ce que les $n+1$ premières valeurs propres (non nulles) du laplacien de M soient proches de n (voir [13]). De plus, ces 4 conditions impliquent que M est difféomorphe à \mathbb{S}^n , d'après le:

Théorème 1 (J. Cheeger-T. Colding, [7]) *Soient K un réel fixé et $(M_p^n, g_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de variétés riemanniennes complètes vérifiant $\text{Ric}_{g_p} \geq K$ et qui converge au sens de Gromov-Hausdorff vers une variété riemannienne (M_∞^n, g) compacte (de même dimension). Alors M_p est difféomorphe à M_∞ pour p assez grand.*

Le but de cet article est de démontrer trois résultats de stabilité nouveaux. Le premier est une version optimisée (et quantitative) du résultat de P. Petersen [13]:

Théorème 2 *Il existe des constantes $\epsilon(n) > 0$, $\beta(n) > 0$ et $C(n) > 0$ telles que si les n premières valeurs propres non nulles du laplacien de M sont inférieures à $n + \epsilon(n)$ alors la distance de Gromov-Hausdorff entre \mathbb{S}^n et M est majorée par $C(n)(\lambda_n - n)^{\beta(n)}$ et M est donc difféomorphe à \mathbb{S}^n .*

Notons que dans notre schéma de preuve, une approximation de Hausdorff à valeur dans \mathbb{S}^n est explicitement construite, ce qui rend

calculable la valeur $\epsilon(n)$ à partir de laquelle elle existe.

Remarque. Le théorème A est optimal en ce qui concerne la première conclusion, puisqu'on construit dans cet article une suite de métriques g_k sur \mathbb{S}^n telle que $\text{Ric}(g_k) \geq n-1$, $\lambda_i(g_k) \rightarrow n$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et telle que la suite (\mathbb{S}^n, g_k) tende (en distance de Gromov-Hausdorff) vers la demi-sphère de dimension $n-1$ munie de sa métrique canonique. En revanche, le problème de savoir à partir de quelle valeur k , l'hypothèse $\lambda_k(M) \leq n(1 + \epsilon(n))$ implique que la variété M^n est difféomorphe à \mathbb{S}^n est encore un problème ouvert (il résulte du théorème A et de contre-exemples dûs à M. Anderson [1] et Y. Otsu [12] que cette valeur est comprise entre 2 et n).

Notons qu'il est démontré dans [5] que M possède k petites valeurs propres proches de n si et seulement s'il existe une partie de M Hausdorff proche de \mathbb{S}^{k-1} . De ceci et du théorème A découle le:

Corollaire 3 *Il existe des constantes $\epsilon(n) > 0$, $\beta(n) > 0$ et $C(n) > 0$ telles que, si M contient une partie A qui, munie de la distance induite, est à distance de Gromov-Hausdorff de $(\mathbb{S}^{n-1}, \text{can})$ inférieure à $\epsilon \leq \epsilon(n)$, alors M est difféomorphe à \mathbb{S}^n et M est à distance de Gromov-Hausdorff de \mathbb{S}^n inférieure à $C(n)\epsilon^{\beta(n)}$.*

Remarque. Ce corollaire est encore valable s'il existe seulement une partie A de M qui est Gromov-Hausdorff proche du sous ensemble $\{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$ de \mathbb{S}^n (où (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée de \mathbb{S}^n).

Avant d'énoncer les autres résultats principaux de cet article, rappelons le volume d'une variété M de courbure $\text{Ric} \geq n-1$ est majoré par $\text{Vol } \mathbb{S}^n / \#\pi_1(M)$, l'égalité étant atteinte si et seulement si $\pi_1(M)$ est un sous-groupe (fini) de $O(n+1)$ agissant librement sur \mathbb{S}^n et si la variété riemannienne M est l'espace lenticulaire $\mathbb{S}^n / \pi_1(M)$. De même, si M est non orientable, alors son volume est majoré par $\text{Vol}(\mathbb{S}^n, \text{can})/2$, l'égalité étant atteinte si et seulement si la dimension n est paire et $M = \mathbb{P}^n \mathbb{R}$.

Dans le cas où M est de volume presque maximal, nous prouvons les deux résultats suivants (qui améliorent à la fois un résultat de T. Colding, qui ne traite que le cas où le volume de M est proche de celui de \mathbb{S}^n dans [8], et un résultat de T. Yamaguchi qui suppose de plus que la courbure sectionnelle de M est minorée par une constante $-K^2$ dans [17]):

Théorème 4 *Il existe des constantes $\epsilon(n) > 0$, $\beta(n) > 0$ et $C(n) > 0$ telles que, si M est non simplement-connexe et vérifie $\text{Vol } M \geq \frac{\text{Vol } \mathbb{S}^n}{2}(1 - \epsilon(n))$, alors la distance de Gromov-Hausdorff entre M et $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est majorée par $C(n) \left(\frac{\text{Vol } \mathbb{S}^n}{2} - \text{Vol } M \right)^{\beta(n)}$ et M est difféomorphe à $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.*

On remarquera que ce résultat s'applique au cas non-orientable et que, dans ce cas, la conclusion est que n est pair, M est diffeomorphe à $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ et Gromov-Hausdorff proche de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Dans le cas où le groupe fondamental est de cardinal quelconque, on a le:

Théorème 5 *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Il existe des constantes $\epsilon(n, k) > 0$, $\beta(n) > 0$ et $C(n) > 0$ telles que si M vérifie:*

$$\text{Vol } M \geq \frac{\text{Vol } \mathbb{S}^n}{k} (1 - \epsilon(n, k)) \quad \text{et} \quad \#\pi_1(M) \geq k,$$

alors $\pi_1(M)$ est un sous-groupe (de cardinal k) de $O(n+1)$ agissant librement sur \mathbb{S}^n , la distance de Gromov-Hausdorff entre M et $\mathbb{S}^n/\pi_1(M)$ est majorée par $C(n) \left[\frac{\text{Vol } \mathbb{S}^n}{k} - \text{Vol } M \right]^{\beta(n)}$ et M est diffeomorphe à l'espace lenticulaire $\mathbb{S}^n/\pi_1(M)$.

En remarquant que tout espace lenticulaire non simplement connexe est de diamètre majoré par $\frac{\pi}{2}$, on obtient, en courbure de Ricci minorée par $n-1$, le:

Corollaire 6 *Il existe des constantes $\epsilon(n) > 0$ et $\delta(n) > 0$ telles que si M vérifie les deux inégalités:*

$$\text{Vol } M \geq \frac{\text{Vol } \mathbb{S}^n}{2} (1 - \delta(n)) \quad \text{et} \quad \text{Diam } M \geq \frac{\pi}{2} + \epsilon(n),$$

alors M est simplement connexe.

D'après l'amélioration de l'inégalité de Lichnerowicz sur le λ_1 donnée par [4], on a un énoncé équivalent où l'hypothèse sur le diamètre est remplacée par l'hypothèse $\lambda_1 \leq n + \delta(n)$ (où $\delta(n)$ est une constante strictement positive dont un minorant est donné dans [4]).

On obtient aussi l'amélioration suivante des théorèmes de Lichnerowicz et de Myers:

Corollaire 7 *Il existe des constantes $\alpha(n) > 0$ et $\delta(n) > 0$ telles que si M est non simplement connexe alors:*

$$\lambda_1(M) \geq n \left(\frac{\#\pi_1(M) \text{Vol } M}{\text{Vol } \mathbb{S}^n} + \delta(n) \right),$$

$$\text{Diam } M \leq \left(\frac{\pi}{2} + \delta(n) \right) \left[1 + \frac{1 - \frac{\#\pi_1(M) \text{Vol } M}{\text{Vol } \mathbb{S}^n}}{\alpha(n)} \right].$$

PLAN DE L'ARTICLE: Dans la section 2 nous établissons les estimées analytiques sur les fonctions propres de M nécessaires à nos démonstrations, dans la section 3 nous nous plaçons dans le cas où M admet $n+1$ valeurs propres proches de n et, en suivant [10] et [13], nous

construisons à l'aide de ces fonctions propres une approximation de Hausdorff Φ de M dans \mathbb{S}^n de degré ± 1 (nous prouvons ce dernier fait, qui manquait dans [13]; voir l'erratum [14]). Cependant, notre méthode de preuve s'appuiera sur des arguments différents de ceux proposés dans [10] et [13]. Dans la section 4, nous montrons qu'un sous-groupe fini d'isométries de M admet une action isométrique sur \mathbb{S}^n qui rend Φ équivariante et que, si la première action est libre, alors la seconde l'est aussi. Dans la section 5, nous donnons la preuve des théorèmes B et C. Pour cela, montrons que nos variétés sont Hausdorff proches d'un quotient de la sphère par un groupe fini d'isométries, mais pour pouvoir conclure, il faut toutefois montrer que ce quotient est une variété non singulière. Pour ce point délicat, T. Yamaguchi utilise dans [17] une hypothèse supplémentaire de minoration de la courbure sectionnelle, qui implique une minoration de la systole de M . Nous nous passons de cette hypothèse grâce au résultat de la section 4 (quant à la technique de T. Colding pour traiter le cas $k=0$ du théorème 5, elle utilise de manière essentielle le fait que l'espace modèle est dans ce cas de Radius π ; cette ne peut pas s'adapter trivialement pour démontrer le théorème 5). En section 6 nous prouvons le théorème A et décrivons en section 7 la famille de contre-exemples qui prouve l'optimalité du théorème A.

Remerciements. Je remercie S. Gallot pour ses nombreux encouragements et U. Suter pour les nombreuses conversations concernant le lemme 17.

2 Valeurs propres proches de n et fonctions propres associées

Fibré augmenté de E. Ruh [16]:

Notons $E \rightarrow M$ le fibré vectoriel obtenu comme somme de Whitney de TM et d'un fibré trivial en droite (on notera $E = TM \oplus \mathbb{R}e$). Le produit scalaire et la connection linéaire suivants munissent E d'une structure de fibré riemannien:

$$\begin{aligned} \langle X + fe, Y + he \rangle_E &= g(X, Y) + fh \\ D_Z^E(X + fe) &= D_Z^M X + fZ + (df(Z) - g(Z, X)).e \end{aligned}$$

où on a noté g la métrique de M et D^M sa connection de Levi-Civita. **Remarque.** Le fibré normal de \mathbb{S}^n dans \mathbb{R}^{n+1} est un fibré trivial en droite dont la somme de Whitney avec $T\mathbb{S}^n$, munie de la métrique décrite plus haut n'est autre que le fibré trivial $E = \mathbb{S}^n \times (\mathbb{R}^{n+1}, can)$. Rappelons que les fonctions propres de \mathbb{S}^n associées à la valeur propre n sont de la forme $f(x) = \langle u, x \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}$, où u est un vecteur quelconque de \mathbb{R}^{n+1} . Notons $e(x) = x$, alors la correspondance $f \mapsto \nabla f + f.e = u$

donne une identification naturelle entre l'espace des fonctions propres associées à la valeur propre n de \mathbb{S}^n et les sections parallèles du fibré E . On va montrer dans la suite que cette correspondance se généralise à toutes les variétés de courbure de Ricci presque minorée par $n - 1$: le laplacien de M sur les fonctions aura autant de valeurs propres proches de n que le laplacien brut $\overline{\Delta}^E$ sur E aura de valeurs propres proches de 0 (proposition 10) et les sections de E de la forme $\nabla f + f.e$, où f est une fonction propre associée à une valeur propre proche de n , seront presque "parallèles" (lemme 11). Inversement les fonctions de la forme $\langle S, e \rangle_E$, où S sont des sections propres associées à de petites valeurs propres seront presque des fonctions propres associées à des valeurs propres proches de n .

Opérateur Δ_{sph} :

Dans la suite, on note π la projection orthogonale de E sur son sous-fibré TM et A la symétrie orthogonale d'hyperplan TM . On définit un champ d'endomorphismes symétriques sur E en posant $\text{Ric}'(S) = \text{Ric}_M(\pi(S)) - (n - 1)\pi(S)$. On notera par la suite Δ_{sph} l'opérateur $\overline{\Delta}^E + \text{Ric}'$.

Sections $S_f = \nabla f + f.e$:

Le lemme suivant sera fondamental pour relier les fonctions propres de M aux sections propres de $\overline{\Delta}^E$:

Lemme 8 Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\Delta f = \lambda f$. On pose $S_f = \nabla f + f.e$, on a alors la relation $\Delta_{sph}(S_f) = (\lambda - n)A(S_f)$.

Preuve. Un calcul direct donne:

$$\overline{\Delta}^E(S_f)(x) = \overline{\Delta}_M \nabla f - \nabla f + n.f.e - \Delta f.e,$$

où $\overline{\Delta}_M$ est le laplacien brut de TM . Enfin, l'opérateur $\overline{\Delta}_M + \text{Ric}_M$ n'est autre que l'opérateur de Hodge Δ_H sur les champs de vecteurs, qui commute avec ∇ , d'où la relation annoncée.

Correspondance fonctions/sections propres

Nous aurons besoin d'une minoration de la première valeur propre λ_1^1 du laplacien de Hodge sur les 1-formes de M . L'inégalité suivante découle d'une variante de la méthode de Lichnerowicz. Nous en donnons une preuve succincte:

Lemme 9 Soit M vérifiant $\text{Ric} \geq n - 1$, alors $\lambda_1^1(M) \geq n$ (resp. la première valeur propre du laplacien de Hodge, restreint aux 1-formes co-fermées est minorée par $2(n - 1)$).

Preuve. Soit $\alpha \in \Lambda^1(M)$. En décomposant orthogonalement $D\alpha$ en partie antisymétrique $\frac{d\alpha}{2}$, partie symétrique sans trace et partie scalaire

$-\frac{\delta\alpha}{n}g$, on obtient $|D\alpha|^2 \geq \frac{|d\alpha|^2}{2} + \frac{(\delta\alpha)^2}{n}$. En intégrant la formule de Bochner on obtient:

$$(\Delta\alpha, \alpha) = \|D\alpha\|_2^2 + \int_M \text{Ric}(\alpha, \alpha) \geq \frac{\|d\alpha\|_2^2}{2} + \frac{\|\delta\alpha\|_2^2}{n} + (n-1)\|\alpha\|_2^2$$

Si $d\alpha = 0$, alors $\|\delta\alpha\|_2^2 = (\Delta\alpha, \alpha)$ et donc $(\Delta\alpha, \alpha) \geq n\|\alpha\|_2^2$. Si $\delta\alpha = 0$, alors $\|d\alpha\|_2^2 = (\Delta\alpha, \alpha)$ et donc $(\Delta\alpha, \alpha) \geq 2(n-1)\|\alpha\|_2^2$.

Nous en déduisons que Δ , $\overline{\Delta}^E$ et Δ_{sph} ont le même nombre de petites valeurs propres, c'est la:

Proposition 10 *Il existe des constantes $\alpha'(n) > \alpha(n) > 0$ (explicitement calculables) telles que, si M est une variété complète vérifiant $\text{Ric} \geq n-1$, alors:*

(i) $\lambda_{n+2}(M) \geq n + \alpha'(n)$ et $\lambda_{n+2}(\Delta_{sph}) \geq \lambda_{n+2}(\overline{\Delta}^E) \geq \alpha'(n)$.

(ii) Pour tout entier k , $0 \leq \lambda_k(\overline{\Delta}^E) \leq \lambda_k(\Delta_{sph}) \leq (\lambda_k(M) - n)$.

Réciproquement, si $\lambda_k(\overline{\Delta}^E) \leq \alpha(n)$ alors

$$\lambda_k(M) \leq n + 200n^2 \sqrt{\lambda_k(\overline{\Delta}^E)}.$$

Preuve. La première série d'inégalités annoncée en (ii) découle directement de la positivité du potentiel Ric' , du lemme 8 et du principe du min-max.

Pour finir de démontrer (ii), notons $(S_i)_{1 \leq i \leq k}$ une famille L^2 -orthonormée de sections propres (associées aux k premières valeurs propres) de $\overline{\Delta}^E$. Notons \mathcal{E} l'espace vectoriel engendré par les sections $(S_i)_{1 \leq i \leq k}$, muni du produit scalaire L^2 de E , et $\mathcal{F} = \Psi(\mathcal{E})$, où $\Psi(S) = \langle S, e \rangle_E$ (notons que \mathcal{F} est engendré par les fonctions $f_i = \langle S_i, e \rangle_E$). Nous allons conclure en appliquant le principe du min-max à \mathcal{F} :

- Les fonctions de \mathcal{F} sont d'intégrale nulle car $\overline{\Delta}^E$ est auto-adjoint, $\overline{\Delta}^E e = n.e$ (lemme 8, avec $f = 1$), $\overline{\Delta}^E(S_i) = \lambda_i S_i$ et $\lambda_i \neq n$, d'où $\frac{1}{\text{Vol}M} \int_M f_i = \frac{1}{\text{Vol}M} \int_M \langle S_i, e \rangle_E = 0$.

- Ψ est une application injective, et donc \mathcal{F} est un espace de fonctions de dimension k : si $S \in \text{Ker}\Psi \cap \mathcal{E}$, alors $S = X \in \Gamma(M)$ et $\|D^E S\|_2^2 \leq \alpha(n)\|S\|_2^2 < \|S\|_2^2$. Or $D_Y^E X = D_Y^M X - g(X, Y)e$, et donc $\|D^E S\|_2^2 = \|D^M X\|_2^2 + \|X\|_2^2 \geq \|X\|_2^2 = \|S\|_2^2$. On en déduit que $S = 0$.

- Il ne reste plus qu'à montrer que le quotient de Rayleigh des fonctions de \mathcal{F} est presque plus petit que n . Soit donc $f \in \mathcal{F} \setminus \{0\}$. Il existe donc $\alpha \in \Lambda^1(M)$ tel que $S = \alpha^\# + f.e \in \mathcal{E}$, ce qui donne:

$$\begin{aligned} \|D^M \alpha^\# + f Id_{TM} - (df - \alpha).e\|_2^2 &= \|D^E S\|_2^2 \\ &\leq \lambda_k(\overline{\Delta}^E) \|S\|_2^2 = \lambda_k(\overline{\Delta}^E) (\|\alpha\|_2^2 + \|f\|_2^2), \end{aligned}$$

Dont on déduit les deux inégalités suivantes:

$$\|D^M \alpha + fg\|_2^2 \leq \lambda_k(\overline{\Delta}^E)(\|\alpha\|_2^2 + \|f\|_2^2)$$

$$\|df - \alpha\|_2^2 \leq \lambda_k(\overline{\Delta}^E)(\|\alpha\|_2^2 + \|f\|_2^2)$$

La deuxième de ces inégalités donne l'inégalité:

$$\left| \frac{\|df\|_2}{\|f\|_2} - \frac{\|\alpha\|_2}{\|f\|_2} \right| \leq \sqrt{\lambda_k(\overline{\Delta}^E)} \left(1 + \frac{\|\alpha\|_2}{\|f\|_2} \right).$$

On est donc ramené à montrer que le rapport $\frac{\|\alpha\|_2^2}{\|f\|_2^2}$ est presque majoré par n . Or, en procédant comme dans la démonstration du lemme 9:

$$\frac{\|d\alpha\|_2^2}{2} + \|f - \frac{\delta\alpha}{n}\|_2^2 \leq \|D^M \alpha + fg\|_2^2 \leq \lambda_k(\overline{\Delta}^E)(\|\alpha\|_2^2 + \|f\|_2^2).$$

On en déduit:

$$\begin{aligned} (\Delta\alpha, \alpha) &= \|d\alpha\|_2^2 + \|\delta\alpha\|_2^2 \\ &\leq 5n^2 \sqrt{\lambda_k(\overline{\Delta}^E)} (\|\alpha\|_2^2 + \|f\|_2^2) + \left(1 + \sqrt{\lambda_k(\overline{\Delta}^E)}\right) n^2 \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

Enfin, d'après le lemme 9, on a $(\Delta\alpha, \alpha) \geq n\|\alpha\|_2^2$. En combinant les deux dernières inégalités, on obtient $\|\alpha\|_2^2 \leq \left(1 + 12n\sqrt{\lambda_k(\overline{\Delta}^E)}\right) n\|f\|_2^2$, dès que $\alpha(n) \leq \frac{1}{36n^4}$, ce qui permet de conclure.

(i) sera démontré pour l'opérateur $\overline{\Delta}^E$ dans la section suivante. Pour les autres opérateurs, cela découle alors de (ii).

Remarque. On pourrait renforcer l'analogie avec le cas de \mathbb{S}^n décrit précédemment en montrant que, si f est une combinaison linéaire des fonctions propres de M associées à des valeurs propres proches de n , alors S_f est L^2 -proche d'une combinaison linéaire des sections propres de $\overline{\Delta}^E$ associées à de petites valeurs propres (la réciproque est aussi vraie en remplaçant $f \mapsto S_f$ par $S \mapsto \langle S, e \rangle_E$).

Estimées sur les fonctions propres

Soit $(\sqrt{n+1}f_i)_{1 \leq i \leq k}$ une famille L^2 -orthonormée de fonctions propres de M associées à des valeurs propres $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k \leq n + \epsilon$. On lui associe la famille L^2 -orthogonale $(S_i)_{1 \leq i \leq k}$ de sections du fibré E définies par $S_i = \nabla f_i + f_i e$. On obtient alors les estimées analytiques et géométriques suivantes :

Lemme 11 *Il existe des constantes $\alpha(n) > 0$ et $C(n) > 0$ (explicitement calculables) telles que si M vérifie $\lambda_k \leq n + \epsilon$ (avec $\epsilon \leq \alpha(n)$), alors :*

$$(i) \quad \left\| \sum_{i=1}^k \alpha_i S_i \right\|_\infty \leq \left(1 + C(n)\sqrt{\epsilon} \right) \left\| \sum_{i=1}^k \alpha_i S_i \right\|_2,$$

pour tout $(\alpha_i) \in \mathbb{R}^k$.

(ii) Il existe un sous-ensemble M_ϵ de M tel que :

$$\text{Vol } M_\epsilon \geq (1 - C(n)\epsilon^{\frac{1}{4}}) \text{Vol } M$$

$|\langle S_i(x), S_j(x) \rangle_E - \delta_{ij}| \leq C(n)\epsilon^{\frac{1}{4}}$ pour tout $x \in M_\epsilon$ et tout couple (i, j) .

Remarque. Si la famille $(S_i)_{1 \leq i \leq k}$ est une famille L^2 -orthonormée de sections propres d'un opérateur $\overline{\Delta}^E + V$ à potentiel V positif associées à des valeurs propres $\lambda_1(\overline{\Delta}^E + V) \leq \dots \leq \lambda_k(\overline{\Delta}^E + V) \leq \epsilon$ (avec $\epsilon \leq \alpha(n)$), alors les propriétés (i) et (ii) sont encore valables (la preuve qui suit s'adapte facilement).

Preuve. D'après le lemme 8, la famille de sections $(\sqrt{\frac{n+1}{\lambda_i+1}} S_i)$ est L^2 -orthonormée et vérifie $\Delta_{sph} S_i = (\lambda_i - n)A(S_i)$ pour tout indice $i \leq k$. Soient E_k l'espace vectoriel engendré par $(S_i)_{1 \leq i \leq k}$ et $A_p =$

$$\sup_{S \in E_k \setminus \{0\}} \frac{\|S\|_p}{\|S\|_2}, \text{ où } p \in]1, +\infty].$$

Soit $S \in E_k \setminus \{0\}$ et posons $u = \sqrt{|S|^2 + \epsilon^2}$ pour $\epsilon > 0$. D'après l'inégalité de Kato, on a $u\Delta u \leq \overline{\Delta}^E S, S \rangle_E \leq |\Delta_{sph} S|u$. On en déduit que, pour tout réel $p > 1/2$:

$$\|d(u^p)\|_2^2 = \frac{p^2}{2p-1} \int_M (u\Delta u) u^{2p-2} \leq \frac{p^2}{2p-1} [\|\Delta_{sph} S\|_{2p} \|u\|_{2p}^{2p-1}]$$

En appliquant l'inégalité de Sobolev $\|f\|_{\frac{2n}{n-2}}^2 \leq C(n)\|df\|_2^2 + \|f\|_2^2$ donnée par [11] à la fonction u^p et en faisant tendre ϵ vers 0, on obtient :

$$\|S\|_{\frac{2pn}{n-2}}^p \leq \frac{C(n)p}{\sqrt{2p-1}} \sqrt{\|\Delta_{sph} S\|_{2p} \|S\|_{2p}^{2p-1}} + \|S\|_{2p}^p$$

(cette inégalité reste valable en dimension 2 en remplaçant n par 4). Or E_k est un espace stable par $A\Delta_{sph}$ et A est une isométrie, on a donc :

$$\|\Delta_{sph} S\|_{2p} = \|A\Delta_{sph} S\|_{2p} \leq A_{2p} \|A\Delta_{sph} S\|_2 \leq A_{2p} (\lambda_k - n) \|S\|_2.$$

On en déduit l'inégalité $A_{\frac{2pn}{n-2}} \leq \left(1 + \frac{C(n)p}{\sqrt{2p-1}} (\lambda_k - n)^{\frac{1}{2}}\right)^{1/p} A_{2p}$, et donc $A_\infty \leq \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 + \frac{C(n)\nu^j}{\sqrt{2\nu^j-1}} (\lambda_k - n)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{\nu^j}}$ en posant $\nu = \frac{n}{(n-2)}$. Enfin, en utilisant la concavité de la fonction \log , on obtient $A_\infty \leq (1 + C(n)\sqrt{\epsilon})$.

Nous allons maintenant prouver que l'inégalité (i) implique la propriété (ii). Posons M_ϵ l'ensemble des points $x \in M$ où :

$$|S_i(x) + S_j(x)|_E^2 \geq 2(1 - \epsilon^{\frac{1}{4}}), \quad |S_i(x) - S_j(x)|_E^2 \geq 2(1 - \epsilon^{\frac{1}{4}}),$$

$$|S_i(x)|_E^2 \geq 1 - \epsilon^{\frac{1}{4}} \quad \forall i < j$$

D'après (i) (et en posant $h = \sum_{i < j} |S_i + S_j|_E^2 + |S_i - S_j|_E^2 + \sum_i 2|S_i|_E^2$) :

$$\begin{aligned} 2k^2 &= \frac{1}{\text{Vol } M} \int_M h = \frac{1}{\text{Vol } M} \int_{M_\epsilon} h + \frac{1}{\text{Vol } M} \int_{M \setminus M_\epsilon} h \\ &\leq \frac{\text{Vol } M_\epsilon}{\text{Vol } M} \left(\sum_{i < j} \|S_i + S_j\|_\infty^2 + \|S_i - S_j\|_\infty^2 + \sum_i 2\|S_i\|_\infty^2 \right) \\ &\quad + (k^2 - 1) \left(1 - \frac{\text{Vol } M_\epsilon}{\text{Vol } M} \right) \max_{1 \leq i < j \leq k} \left[\|S_i + S_j\|_\infty^2, \|S_i - S_j\|_\infty^2, 2\|S_i\|_\infty^2 \right] \\ &\quad + 2 \left(1 - \frac{\text{Vol } M_\epsilon}{\text{Vol } M} \right) (1 - \epsilon^{\frac{1}{4}}) \\ &\leq 2k^2 (1 + C(n)\sqrt{\epsilon}) \frac{\text{Vol } M_\epsilon}{\text{Vol } M} \\ &\quad + \left[2(k^2 - 1)(1 + C(n)\sqrt{\epsilon}) + 2(1 - \epsilon^{\frac{1}{4}}) \right] \left(1 - \frac{\text{Vol } M_\epsilon}{\text{Vol } M} \right) \end{aligned}$$

On en déduit $\frac{\text{Vol } M_\epsilon}{\text{Vol } M} \geq 1 - \frac{k^2 C(n) \epsilon^{\frac{1}{4}}}{1 + C(n) \epsilon^{\frac{1}{4}}} \geq 1 - k^2 C(n) \epsilon^{\frac{1}{4}}$, pour $\epsilon \leq \alpha(k, n)$ assez petit. D'après (i), on a pour tout $x \in M_\epsilon$ et tout $i \neq j$:

$$\begin{aligned} |\langle S_i(x), S_j(x) \rangle_E| &= \left| \frac{|S_i(x) + S_j(x)|^2 - |S_i(x) - S_j(x)|^2}{4} \right| \\ &\leq \frac{2(1 + C(n)\sqrt{\epsilon}) - 2(1 - \epsilon^{\frac{1}{4}})}{4} \leq C'(n) \epsilon^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

De même, $|\|S_i(x)\|_E^2 - 1| \leq C'(n) \epsilon^{\frac{1}{4}}$. Supposons $k > n + 1$: en appliquant ce qui précède à la famille $(S_i)_{1 \leq i \leq n+2}$, on obtient que $|\langle S_i, S_j \rangle - \delta_{ij}| \leq C(n) \epsilon^{\frac{1}{4}}$ sur M_ϵ . Mais alors, il existe au moins un point x de M où la famille $(S_i(x))_{1 \leq i \leq n+2}$ est de rang $n + 2$, ce qui est impossible car E est de rang $n + 1$. On en déduit d'abord que $k \leq n + 1$ (et donc le (i) de la proposition 10), puis la propriété (ii) annoncée.

3 Variétés admettant $n + 1$ petites valeurs propres

Dans cette section nous étudions les variétés complètes vérifiant $\text{Ric} \geq (n-1)$ et $\lambda_{n+1} \leq n + \alpha(n)$. Fixons une famille $(\sqrt{n+1} \cdot f_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ L^2 -orthonormée de fonctions propres associées aux valeurs propres $n \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n+1} \leq n + \epsilon$ et considérons l'application :

$$\begin{aligned} \Phi : M &\rightarrow \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ x &\mapsto \frac{1}{(\sum_j f_j(x)^2)^{1/2}} \cdot (f_1(x), \dots, f_{n+1}(x)) \end{aligned} \quad (1)$$

Nous démontrons dans cette section la:

Proposition 12 *Il existe des constantes $\alpha(n) > 0$ et $C(n) > 0$ (explicitement calculables) telles que si M est une variété complète qui vérifie $\text{Ric} \geq (n-1)$ et $\lambda_{n+1} \leq n + \epsilon$ (pour $\epsilon \leq \alpha(n)$), alors :*

$$\text{Vol } M \geq \left(1 - C(n)\epsilon^{\frac{1}{2(n+1)}}\right) \text{Vol } \mathbb{S}^n.$$

et l'application Φ est une approximation de Hausdorff à valeur dans \mathbb{S}^n de degré ± 1 . Plus précisément, pour tout couple de points (x, y) de M , on a:

$$|d_{\mathbb{S}^n}(\Phi(x), \Phi(y)) - d_M(x, y)| \leq C(n)\epsilon^{\frac{1}{384(n+1)^3}}.$$

Remarque. Notre schéma de preuve est une adaptation de celui de P. Petersen dans [13] (voir aussi [2]). Toutefois, nous corrigeons l'erreur faite par P. Petersen sur le calcul du degré de Φ (voir l'erratum [14]) ce qui est indispensable pour notre démonstration des résultats annoncés en introduction. Pour la démonstration du fait que Φ est une approximation de Hausdorff, nous renvoyons à l'article [13] de P. Petersen (noter que d'après ce qui suit, Φ est surjective). On pourra regarder aussi [3], où la même propriété est démontrée sous des hypothèses de pincement intégral de la courbure de Ricci passant sous $n-1$ et la forme du majorant de la distance de Gromov-Hausdorff est explicitement calculée.

Φ est bien définie sous nos hypothèses :

Cela découle du:

Lemme 13 *Il existe des constantes $\alpha(n) > 0$ et $C(n) > 0$ (explicitement calculables) telles que si $\lambda_{n+1} \leq n + \epsilon$ (avec $\epsilon \leq \alpha(n)$), on a :*
 $\left\| \sum_{i=1}^{n+1} f_i^2 - 1 \right\|_{\infty} \leq C(n)\epsilon^{\frac{1}{2(n+1)}}.$

Preuve. Soit x_0 un point quelconque de M . En appliquant le lemme 11 avec $\alpha_i = f_i(x_0)$, on obtient:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n+1} f_i(x_0) f_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n+1} f_i(x_0) \nabla f_i \right)^2 &\leq (1 + C(n)\sqrt{\epsilon})^2 \left\| \sum_{i=1}^{n+1} f_i(x_0) S_i \right\|_2^2 \\ &\leq (1 + C(n)\sqrt{\epsilon}) \sum_{i=1}^{n+1} f_i(x_0)^2. \end{aligned}$$

On en déduit que la fonction $h = \sum_{i=1}^{n+1} f_i^2$ vérifie les inégalités $\|h\|_1 = 1$, $\|h\|_{\infty} \leq (1 + C'(n)\sqrt{\epsilon})$ et $\|dh\|_{\infty} \leq C'(n)$. Le résultat annoncé découle alors du lemme suivant :

Lemme 14 Soient (M^n, g) compacte et vérifiant $\text{Ric} \geq 0$ et $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne, alors:

$$|h| \geq \|h\|_\infty - 2(\text{Diam } M \|dh\|_\infty)^{\frac{n}{n+1}} (\|h\|_\infty - \|h\|_1)^{\frac{1}{n+1}}.$$

Preuve. On peut supposer $\|h\|_1 > 0$. Soit $x \in M$:

$$\begin{aligned} \|h\|_1 &= \frac{1}{\text{Vol } M} \int_{B(x, \eta)} |h| + \frac{1}{\text{Vol } M} \int_{M \setminus B(x, \eta)} |h| \\ &\leq \frac{\text{Vol } B(x, \eta)}{\text{Vol } M} (|h(x)| + \|df\|_\infty \eta) + \left(1 - \frac{\text{Vol } B(x, \eta)}{\text{Vol } M}\right) \|h\|_\infty. \end{aligned}$$

On en déduit que $\|h\|_\infty - \|h\|_1 \geq \frac{\text{Vol } B(x, \eta)}{\text{Vol } M} (\|h\|_\infty - |h(x)| - \|df\|_\infty \eta)$. Posons $\eta = \frac{\|h\|_\infty - |h(x)|}{2\|df\|_\infty} > 0$. Le théorème de Bishop-Gromov, donne alors:

$$\|h\|_\infty - \|h\|_1 \geq \frac{(\|h\|_\infty - |h(x)|)^{n+1}}{2^{n+1} \|df\|_\infty^n (\text{Diam } M)^n}.$$

Calcul de $d\Phi$:

Soit x un point de M , alors $d_x \Phi$ est une application de $T_x M$ dans $T_{\Phi(x)} \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. On note ${}^t d_x \Phi$ l'application transposée de $d_x \Phi$ vu comme une application de $(T_x M, g_x)$ dans \mathbb{R}^{n+1} muni de son produit scalaire canonique, qu'on notera $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}$. Si $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ est la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} alors ${}^t d_x \Phi(\varepsilon_i) = \frac{\nabla f_i - \Phi_i \sum_{k=1}^{n+1} \Phi_k \cdot \nabla f_k}{(\sum_j f_j^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{S_i - \Phi_i \sum_{j=1}^{n+1} \Phi_j S_j}{(\sum_j f_j^2)^{\frac{1}{2}}}$, où on a posé $\Phi_i = \frac{f_i}{(\sum_j f_j^2)^{\frac{1}{2}}}$ (où TM est vu comme un sous-fibré de E). En particulier, pour tout vecteur v de $T_{\Phi(x)} \mathbb{S}^n (= \Phi(x)^\perp)$, on a ${}^t d_x \Phi(v) = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} v_i S_i}{(\sum_j f_j^2)^{\frac{1}{2}}}$.

Φ est presque contractante:

Les lemmes 11 et 13 nous donnent alors le:

Lemme 15 Si M vérifie $\text{Ric} \geq n - 1$ et si $\lambda_{n+1} \leq n + \epsilon$ (avec $\epsilon \leq \alpha(n)$), alors $\|d\Phi\|_\infty \leq 1 + C(n)\epsilon^{\frac{1}{2(n+1)}}$.

Si M est orientable, alors $\text{deg } \Phi = \pm 1$

Soit x un point de M et (X_i) une base orthonormée directe de $T_x M$. Pour tout $x \in M$, on munit E_x de l'orientation induite par TM (i.e. telle que $(\tilde{X}_i)_{1 \leq i \leq n+1} = (X_1, \dots, X_n, e)$ soit une base directe de E_x). On note $\tilde{L}_x : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow E_x$ l'application définie par $\tilde{L}_x(v) = \sum_{i=1}^{n+1} v_i S_i(x)$ et $h(x) = \det \tilde{L}_x$ (le déterminant étant calculé relativement à des bases orthonormées directes des espaces de départ

et d'arrivée). En calculant h dans une base orthonormée directe de \mathbb{R}^{n+1} de la forme $(e_1, \dots, e_n, \Phi(x))$, on obtient:

$$h(x) = \left(\sum_j f_j^2(x) \right)^{\frac{n+1}{2}} \det d_x \Phi.$$

Commençons par estimer $\|h\|_2$. On a $\|h\|_\infty^2 \leq (1 + C(n)\sqrt{\epsilon})$ car $h^2(x) \leq |L_x|^{2n}$ et d'après le lemme 11 (i), on a:

$$|L_x(v)|_E^2 \leq (1 + C(n)\sqrt{\epsilon}) \left\| \sum_{i=1}^{n+1} v_i S_i \right\|_2^2 \leq (1 + C(n)\sqrt{\epsilon}) \|v\|_{\mathbb{R}^{n+1}}^2,$$

pour tout $v \in \mathbb{R}^{n+1}$. Par ailleurs, pour tout couple (u, v) de vecteurs de \mathbb{R}^{n+1} , on a :

$$\begin{aligned} \left| \langle {}^t L_x \circ L_x(u), v \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} - \langle u, v \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} \right| &= \left| \sum_{ij} u_i v_j (\langle S_i, S_j \rangle_E - \delta_{ij}) \right| \\ &\leq \max_{ij} |\langle S_i, S_j \rangle_E - \delta_{ij}| \|u\|_{\mathbb{R}^{n+1}} \|v\|_{\mathbb{R}^{n+1}} \end{aligned}$$

et donc, d'après le lemme 11 (ii), $\|{}^t L_x \circ L_x - Id_{T_{\Phi(x)} S^n}\| \leq C(n)\epsilon^{\frac{1}{4}}$, pour tout point x du sous-ensemble M_ϵ , i.e. $|h^2(x) - 1| \leq C(p, n)\epsilon^{\frac{1}{4}}$ sur M_ϵ . On obtient alors l'estimée :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\text{Vol } M} \int_M h^2 - 1 \right| &\leq \left| \frac{1}{\text{Vol } M} \int_{M_\epsilon} (h^2 - 1) \right| \\ &\quad + \left(1 - \frac{\text{Vol } M_\epsilon}{\text{Vol } M} \right) \max(1, \|h^2\|_\infty - 1) \\ &\leq C(n)\epsilon^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

Pour obtenir le degré de Φ , c'est l'intégrale $\frac{1}{\text{Vol } M} \int_M h$ que l'on doit estimer. Nous allons utiliser l'inégalité de Poincaré pour montrer que la moyenne de h est proche de sa norme L^2 . Pour cela, il faut montrer que la norme L^2 de dh est petite:

En prenant la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} comme base orthonormée au départ, et une base orthonormée directe quelconque $(\tilde{X}_i(x))$ de E_x à l'arrivée, on obtient $h(x) = \det(\langle \tilde{X}_i, S_j \rangle_E)$. Soit x un point donné de M , $X \in T_x M$ et γ_X la géodésique passant par x avec le vecteur vitesse X . On note (\tilde{X}_i) le repère transporté parallèlement le long de γ_X de $(\tilde{X}_i(x))$. Alors $d_x h(X) = X \cdot \left(\det(\langle \tilde{X}_i, S_j \rangle_E)_{ij} \right)$ est égal à:

$$\sum_{j=1}^{n+1} \det \begin{pmatrix} \langle \tilde{X}_1, S_1 \rangle & \dots & \langle \tilde{X}_1, D_X^E S_j \rangle & \dots & \langle \tilde{X}_1, S_{n+1} \rangle \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle \tilde{X}_{n+1}, S_1 \rangle & \dots & \langle \tilde{X}_{n+1}, D_X^E S_j \rangle & \dots & \langle \tilde{X}_{n+1}, S_{n+1} \rangle \end{pmatrix}$$

D'où $|d_x h(X)| \leq C(n) \max_i \|S_i\|_\infty^n \max_i |D_X^E S_i(x)|_E$. Le lemme 11 (i), donne donc :

$$\|dh\|_2^2 = \frac{1}{\text{Vol } M} \int_M |dh|^2 \leq C(n) \max_i \frac{1}{\text{Vol } M} \int |D^E S_i|^2(x) \leq C(n)\epsilon,$$

la dernière inégalité découle de la preuve du lemme 10 (ii).

Or $\lambda_1 \geq n$ et donc $0 \leq \|h\|_2^2 - \left(\frac{1}{\text{Vol } M} \int_M h\right)^2 \leq C(n)\epsilon$. On déduit donc de l'estimée précédente sur $\|h\|_2^2$ que :

$$1 - C(n)\epsilon^{\frac{1}{4}} \leq \left(\frac{1}{\text{Vol } M} \int_M h\right)^2 \leq 1 + C(n)\epsilon^{\frac{1}{4}}$$

Pour conclure, on a $\deg \Phi \text{Vol } \mathbb{S}^n = \int_M \det d\Phi = \int_M (\sum_k f_k^2)^{-\frac{n+1}{2}} h$. Le lemme 13 et la majoration de $\|h\|_\infty$ donnent alors $\left| \deg \Phi \left| \frac{\text{Vol } \mathbb{S}^n}{\text{Vol } M} - 1 \right| \leq C(n)\epsilon^{\frac{1}{2(n+1)}}\right.$. Comme $\deg \Phi$ est un entier et que $\text{Vol } M \leq \text{Vol } \mathbb{S}^n$, on obtient $\deg \Phi = \pm 1$ et $\text{Vol } M \geq \text{Vol } \mathbb{S}^n (1 - C(n)\epsilon^{\frac{1}{2(n+1)}})$.

Si $\lambda_{n+1}(M) \leq n + \epsilon(n)$ alors M est orientable :

Si M^n est non-orientable, on construit l'application Φ à partir des fonctions propres $(f_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ et on note $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ le revêtement riemannien orientable de M . Soit $\tilde{\Phi} = \Phi \circ \pi : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{S}^n$. On a $\deg_2 \tilde{\Phi} = \deg_2 \Phi \deg_2 \pi = 0$ (où \deg_2 désigne le degré modulo 2), et donc $\tilde{\Phi}$ est de degré orientable pair. Cependant, $(\widetilde{M}^n, \tilde{g})$ vérifie aussi $\text{Ric} \geq (n-1)$ et les fonctions $\tilde{f}_i = f_i \circ \pi$ sont des fonctions propres de $(\widetilde{M}^n, \tilde{g})$ associées aux mêmes valeurs propres λ_i . On en déduit que l'application $\tilde{\Phi}$ n'est autre que celle étudiée en **e**) associée à la variété $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ et aux fonctions propres \tilde{f}_i . $\tilde{\Phi}$ doit donc être de degré ± 1 , ce qui est contradictoire.

4 Équivariance de Φ

Nous allons exhiber, sous les hypothèses de la section 3, un morphisme du groupe $\text{Isom } M$ des isométries de M dans le groupe $O_{n+1}(\mathbb{R})$ des isométries de \mathbb{S}^n pour lequel l'application Φ est équivariante :

Soit f une fonction propre ($\Delta f = \lambda f$) et σ une isométrie de la variété M . Alors $\Delta(f \circ \sigma) = \lambda(f \circ \sigma)$. En particulier, si on suppose que $(\sqrt{n+1}.f_i)_{1 \leq i \leq k}$ est une base de l'espace de toutes les fonctions propres associées aux valeurs propres de M inférieures à un réel α donné, alors il existe une matrice A^σ de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ telle que pour tout indice i , on ait $f_i \circ \sigma = \sum_j A_{ij}^\sigma f_j$. De plus, comme σ préserve le volume riemannien, on a $\frac{\delta_{ij}}{n+1} = \frac{1}{\text{Vol } M} \int_M f_i \circ \sigma . f_j \circ \sigma dv_g = \sum_{kl} A_{ik}^\sigma A_{jl}^\sigma \frac{\delta_{kl}}{n+1}$. On en déduit que $\sigma \mapsto A^\sigma$ est un morphisme de groupe de $\text{Isom } M$ à valeur dans $O_k(\mathbb{R})$.

Dans le cas particulier où M vérifie $\text{Ric} \geq (n-1)$ et $\lambda_{n+1} \leq n + \epsilon$, le choix d'une famille $(\sqrt{n+1}.f_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ L^2 -orthonormée de fonctions propres associées aux $n+1$ premières valeurs propres non nulles de M induit un morphisme de $\text{Isom}M$ à valeurs dans $O(n+1)$ (d'après le lemme 10 (i)) tel que $\Phi(\sigma(x)) = A^\sigma(\Phi(x))$ pour toute isométrie σ . L'outil central de la démonstration des théorèmes B et C est le lemme suivant:

Lemme 16 *Soient M une variété complète vérifiant $\text{Ric} \geq n-1$ et $\lambda_{n+1} \leq n + \epsilon$ (pour $\epsilon \leq \alpha(n)$), et $\Phi : M \rightarrow \mathbb{S}^n$ l'application définie dans la section 3. On se donne de plus G un groupe fini d'isométries agissant librement sur M . Le morphisme $\sigma \mapsto A^\sigma$ est alors injectif sur G et $A(G)$ est un sous groupe de $O_{n+1}(\mathbb{R})$ agissant librement sur \mathbb{S}^n . Enfin, Φ passe au quotient en une $C(n)\epsilon^{\frac{1}{384(n+1)^3}}$ -approximation de Hausdorff de M/G sur $\mathbb{S}^n/A(G)$.*

Preuve. Si $\sigma \in \text{Ker}A$ alors la variété quotient de M par le groupe $\langle \sigma \rangle$ vérifie aussi $\text{Ric} \geq n-1$ et $\lambda_{n+1} \leq n + \epsilon$. Mais alors M et $M/\langle \sigma \rangle$ ont des volumes presque égaux à celui de $(\mathbb{S}^n, \text{can})$ (d'après 12). Or le cardinal de $\langle \sigma \rangle$ est égal au rapport de ces volumes (car $\langle \sigma \rangle$ agit librement), et donc $\text{Ker}A = \{id_G\}$.

G est un groupe agissant par isométrie sur M et \mathbb{S}^n , et Φ est une application équivariante pour ces deux actions. Φ passe donc au quotient en une application de la variété riemannienne M/G sur (l'orbifold) \mathbb{S}^n/G . Il est facile de montrer que Φ étant une $C(n)\epsilon^{\frac{1}{384(n+1)^3}}$ -approximation de Hausdorff de M sur \mathbb{S}^n (proposition 12), son quotient est aussi une $C(n)\epsilon^{\frac{1}{384(n+1)^3}}$ -approximation.

Pour montrer que G agit librement sur \mathbb{S}^n , commençons par remarquer que d'après le théorème 1, on peut supposer que sous les hypothèses du lemme, $M^n = \mathbb{S}^n$ (remarquez que dans la suite on a juste besoin que M soit homéomorphe à \mathbb{S}^n , et donc [15] suffit). On utilise alors le:

Lemme 17 *Soit G un groupe fini, soient $\alpha_i : G \times \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$, $i = 1, 2$ deux actions sur la sphère \mathbb{S}^n et $\Phi : (\mathbb{S}^n, \alpha_1) \rightarrow (\mathbb{S}^n, \alpha_2)$ une application équivariante qui est de degré ± 1 . Si α_1 est libre alors α_2 est aussi libre.*

Si α_2 n'est pas libre, alors G admet un élément non trivial σ tel que $\alpha_2(\sigma)$ fixe un point de \mathbb{S}^n . Quitte à remplacer G par $\langle \sigma^l \rangle$ (pour l bien choisi), on peut se ramener au cas où G est un groupe de cardinal p premier fixant un point de \mathbb{S}^n par l'action α_2 . Notons M_Φ le cylindre de l'application Φ . Au couple (M_Φ, \mathbb{S}^n) est alors associé la suite longue exacte en cohomologie relative (à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$) suivante:

$$0 \rightarrow H^0(M_\Phi, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \xrightarrow{\Phi^*} H^0(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rightarrow H^1(M_\Phi, \mathbb{S}^n; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow H^n(M_\Phi, \mathbb{S}^n; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rightarrow H^n(M_\Phi, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \xrightarrow{\Phi^*} H^n(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

Or, pour tout $1 \leq i < n$, on a $H^i(M_\Phi, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = H^i(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \{0\}$ et donc $H^i(M_\Phi, \mathbb{S}^n; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \{0\}$. Enfin, puisque Φ est de degré ± 1 , on en déduit que Φ^* est un isomorphisme entre $H^n(M_\Phi, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ et $H^n(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ et donc :

$$H^i(M_\Phi, \mathbb{S}^n; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \{0\}$$

pour tout entier $i \geq 0$.

Comme Φ est équivariante, les actions α_1 et α_2 induisent une action α_Φ sur M_Φ dont les points fixes $Fix(\alpha_\Phi)$ s'identifient aux points fixes de α_2 (car α_1 est sans point fixe). D'après un théorème dû à E. Floyd (théorème 7.9, chap.III, page 144 de [6]), on a :

$$\sum_{k \geq 0} \dim H^k(\underbrace{Fix(\alpha_\Phi)}_{Fix(\alpha_2)}, \underbrace{Fix(\alpha_1)}_{\emptyset}; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \leq \sum_{k \geq 0} \dim H^k(M_\Phi, \mathbb{S}^n; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$$

et donc $H^k(Fix(\alpha_2), \emptyset; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = H^k(Fix(\alpha_2); \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \{0\}$ pour tout entier k , ce qui implique $Fix(\alpha_2) = \emptyset$. D'où une contradiction (remarquez que dans le cas qui nous intéresse dans la suite, α_2 agit par isométrie, est donc $Fix(\alpha_2)$ ne pouvait être a priori que vide ou une sous-sphère).

5 Démonstration des théorèmes B et C

Sous les hypothèses des théorèmes B et C, le revêtement riemannien universel (resp. orientable) $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ de la variété M vérifie $\text{Ric} \geq n - 1$ et est de volume presque égal à $\text{Vol } \mathbb{S}^n$. On en déduit que $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ vérifie $\lambda_{n+1}(\widetilde{M}, \widetilde{g}) \leq n + C(n) \left(\frac{\text{Vol } \mathbb{S}^n}{2} - \text{Vol } M \right)^{\beta(n)}$ (ce résultat découle qualitativement de [13]; voir [3] pour une autre preuve et le calcul de la forme du majorant). Le lemme 16 implique alors que $\pi_1(M)$ (resp. le groupe du revêtement orientable) agit librement sur \mathbb{S}^n par isométrie et que le quotient de $\widetilde{\Phi}$ réalise une approximation de Hausdorff de M (car le revêtement est normal) sur $\mathbb{S}^n/\pi_1(M)$ (resp. $\mathbb{S}^n/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$). Pour la démonstration du théorème B, remarquons que le seul groupe d'isométries de cardinal 2 agissant librement sur \mathbb{S}^n est $\{\pm Id\}$, et donc nos variétés sont proches de $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$ en distance de Gromov-Hausdorff. Pour le théorème C, remarquons que le cardinal de $\pi_1(M)$ est exactement k et que les groupes d'isométries de \mathbb{S}^n de cardinal k sont en nombre finis (quand ils existent). On en déduit que sous les hypothèses des théorèmes B et C, les variétés sont proches d'un nombre finis de variétés riemanniennes compactes possibles de même dimension. D'après le théorème 1, on en déduit l'existence d'une constante $\alpha(n, k) > 0$ telle que nos variétés soient difféomorphes aux espaces lenticulaires annoncés.

6 Démonstration du théorème A

Nous allons en fait montrer que sur une variété vérifiant $\text{Ric} \geq n - 1$, l'existence de n valeurs propres proches de n implique l'existence d'une $n+1$ -ième valeur propre proche de n .

Nous commençons par supposer que M est orientable. On munit E (comme dans la section 3) de l'orientation compatible avec celle de TM . Si (S_1, \dots, S_n) est une famille de sections de E , on note $S = S_1 \wedge \dots \wedge S_n$ la section duale de la 1-forme $S \mapsto \det(S_1, \dots, S_n, S)$. $S_1 \wedge \dots \wedge S_n$ est bien évidemment L^2 -orthogonale aux sections S_i pour tout i . On a de plus les relations $D_X^E(S_1 \wedge \dots \wedge S_n) = \sum_{i=1}^n S_1 \wedge \dots \wedge D_X^E S_i \wedge \dots \wedge S_n$ pour tout $X \in TM$ et $|S_1 \wedge \dots \wedge S_n|_E \leq |S_1|_E \dots |S_n|_E$. On peut alors démontrer un premier résultat :

Lemme 18 *Il existe des fonctions $\alpha(n) > 0$ et $C(n) > 0$ (explicitement calculables) telles que si M est orientable et vérifie $\lambda_n(\overline{\Delta}^E) \leq \epsilon$ (avec $\epsilon \leq \alpha(n)$) alors $\lambda_{n+1}(\overline{\Delta}^E) \leq C(n)\epsilon$.*

Preuve. Soit (S_1, \dots, S_n) une famille L^2 -orthonormée de sections propres de $\overline{\Delta}^E$ associées aux n premières valeurs propres et $S_{n+1} = S_1 \wedge \dots \wedge S_n$. Le lemme 11 (iii) nous donne:

$$\|D^E S_{n+1}\|_2^2 \leq n^2 (\max_{i \leq n} \|S_i\|_\infty)^{2n-2} \max_{i \leq n} \|D^E S_i\|_2^2 \leq C(n)\epsilon.$$

Montrons que la norme L^2 de S_{n+1} est proche de 1: d'après la remarque qui suit le lemme 11, on a $\|S_{n+1}\|_\infty \leq \prod_{i \leq n} \|S_i\|_\infty \leq 1 + C(n)\sqrt{\epsilon}$, et il existe un sous-ensemble M_ϵ de M tel que :

$$|\langle S_i, S_j \rangle_E - \delta_{ij}| \leq C(n)\epsilon^{\frac{1}{4}} \quad \text{Vol } M_\epsilon \geq (1 - C(n)\epsilon^{\frac{1}{4}}) \text{Vol } M$$

Fixons un point x de M et (X_1, \dots, X_{n+1}) un repère orthonormé direct de E_x tel que $\text{Vect}(X_1, \dots, X_n)$ et $\text{Vect}(S_1(x), \dots, S_n(x))$ coïncident, on a alors $S_1 \wedge \dots \wedge S_n = cX_{n+1}$, où c^2 vaut:

$$\det \begin{pmatrix} \langle S_1, S_1 \rangle_E & \dots & \langle S_n, S_1 \rangle_E \\ \vdots & & \vdots \\ \langle S_1, S_n \rangle_E & \dots & \langle S_n, S_n \rangle_E \end{pmatrix}$$

On en déduit que:

$$|\|S_{n+1}(x)\|^2 - 1| = |c^2 - 1| = |\det(\langle S_i, S_j \rangle_E)_{ij} - \det I_n| \leq C(n)\epsilon^{\frac{1}{4}},$$

en tout point x de M_ϵ . On obtient donc :

$$\begin{aligned} \left| \|S_{n+1}\|_2^2 - 1 \right| &\leq \left| \frac{1}{\text{Vol } M} \int_{M_\epsilon} (|S_{n+1}|^2 - 1) \right| \\ &\quad + \left| \frac{1}{\text{Vol } M} \int_{M \setminus M_\epsilon} (|S_{n+1}|^2 - 1) \right| \\ &\leq C(n)\epsilon^{\frac{1}{4}} + \left(1 - \frac{\text{Vol } M_\epsilon}{\text{Vol } M}\right) 2C(n) \leq C(n)\epsilon^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

$(S_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ est donc L^2 presque orthonormée et que $\|D^E S_i\|_2^2 \leq C(n)\epsilon$ pour tout $1 \leq i \leq n+1$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient que pour toute combinaison linéaire S des sections S_1, \dots, S_n et S_{n+1} on a $\|D^E S\|_2^2 \leq C(n)\epsilon \|S\|_2^2$. Le principe du min-max conclut.

On peut alors en déduire la proposition suivante (remarquer qu'on ne suppose plus que M est orientable) qui combinée à la proposition 12 et au théorème 1 démontre le théorème A :

Proposition 19 *Il existe des constantes $\alpha(n) > 0$ et $C(n) > 0$ (universellement calculables) telles que si M vérifie $\lambda_n(M) \leq n + \epsilon$ (avec $\epsilon \leq \alpha(n)$), alors $\lambda_{n+1}(M) \leq n + C(n)\epsilon^{\frac{1}{2}}$.*

Remarque. Bien évidemment, on peut décliner cette proposition en remplaçant la conclusion par l'une des inégalités :

$$\begin{aligned} \text{Rad } M &\geq (1 - C(n)\epsilon^{\beta(n)})\pi, & \text{Vol } M &\geq (1 - C(n)\epsilon^{\beta(n)}) \text{Vol } \mathbb{S}^n \\ &\text{ou } d_{GH}(M, \mathbb{S}^n) &\leq C(n)\epsilon^{\beta(n)} \end{aligned}$$

où $C(n)$ et $\beta(n)$ sont des constantes explicitement calculables.

Preuve. Si M est orientable, la proposition découle directement des propositions 10 (i) et (ii) et du lemme 18. Supposons donc que M n'est pas orientable. Soit $(\sqrt{n+1}.f_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille L^2 -orthonormée de fonctions propres associées aux n premières valeurs propres non nulles de M , soit $\pi : (\widetilde{M}^n, \widetilde{g}) \rightarrow M$ le revêtement riemannien orientable de M et notons $\widetilde{f}_i = f_i \circ \pi$. Sur $(\widetilde{M}^n, \widetilde{g})$ on obtient une fonction \widetilde{f}_{n+1} telle que $(\sqrt{n+1}.f_i)_{i \leq n+1}$ soit une famille de fonctions propres de $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ associées à des valeurs propres proche de n . Le morphisme de groupe A de $\text{Gr}(\widetilde{M}, M)$ dans $O_{n+1}(\mathbb{R})$ construit à partir de la famille $(\widetilde{f}_i)_{i \leq n+1}$ (voir le lemme 16) est injectif et $A(\text{Gr}(\widetilde{M}, M))$ agit librement sur \mathbb{R}^{n+1} . Or, l'hyperplan engendré par $(\widetilde{f}_i)_{1 \leq i \leq n}$ est évidemment fixé par $\text{Gr}(\widetilde{M}, M)$, ce qui est contradictoire.

Remarque. La preuve de la proposition 19 peut se faire sans théorie de Flyod: on sait que l'élément non trivial de $\text{Gr}(\widetilde{M}, M)$ est d'ordre 2, fixe l'hyperplan engendré par les fonctions $(f_i \circ \pi)$ et donc agit par symétrie orthogonale hyperplane sur \mathbb{S}^n . On en déduit que l'application

$\tilde{\Phi}$ de degré ± 1 construite à partir des fonctions propres $(\tilde{f}_i)_{i \leq n+1}$ passe au quotient en une application Φ de M sur la demi-sphère $\frac{1}{2}\mathbb{S}^n$ dont le degré modulo 2 est égal à 1. Or M est une variété sans bord et $\frac{1}{2}\mathbb{S}^n$ est une variété à bord (et même contractile), le degré modulo 2 de Φ ne peut donc être que nul, d'où une contradiction.

7 Optimalité du théorème A

Pour clore cet article, nous allons montrer que pour tout entier $p \in \{1, \dots, n-1\}$, il existe une suite $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de métriques sur \mathbb{S}^n qui vérifie $\text{Ric} \geq (n-1)$, $\lambda_p(g_k) \rightarrow n$, $\lambda_{p+1}(g_k) \rightarrow \beta(n) > n$, $\text{Vol}(g_k) \rightarrow 0$, (\mathbb{S}^n, g_k) tend en distance de Gromov-Hausdorff vers la demi-sphère canonique de dimension p et par conséquent, la suite des Radius tend vers $\frac{\pi}{2}$ (ce qui montre qu'aucun des résultats de stabilité obtenu dans la proposition 19 et dans la remarque qui la suit ne se généralise sous l'hypothèse $\lambda_{n-1} \leq n + \epsilon$). En revanche, nous n'avons pas encore réussi à construire une suite de variétés non difféomorphes à \mathbb{S}^n de courbure de Ricci supérieure à $(n-1)$ et telle que la suite des λ_{n-1} tende vers n (voir [1] ou [12] pour des variétés non homotopes à \mathbb{S}^n admettant des métriques de courbure de Ricci supérieure à $(n-1)$ et admettant une seule valeur propre arbitrairement proche de n).

Exemple. — La métrique g_k est une généralisation des fuseaux en codimension quelconque. En fait, on construit g_k en écrasant la métrique canonique de \mathbb{S}^n dans le fibré normal à une sous sphère \mathbb{S}^{p-1} . La difficulté étant de régulariser la métrique sur \mathbb{S}^{p-1} et sur son cut-locus \mathbb{S}^{n-p} tout en préservant le minorant sur la courbure de Ricci. Nous décrivons la suite g_k dans le cas particulier $p = n - 1$, la généralisation aux autres valeurs de p ne pose aucun problème (notons que dans le cas $p = n$, il n'est pas possible d'écraser la métrique dans le facteur normal). Soit k un entier non nul. Nous commençons par fixer les notations suivantes:

$$\eta_k = \sqrt{\sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \frac{1}{k^2} \cos^2\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)}, \quad \epsilon_k = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{k}}}{k},$$

$$\theta_k = \arctan\left(\frac{1}{k \tan \frac{1}{\sqrt{k}}}\right) - \frac{\pi}{2k} + \frac{1}{k\sqrt{k}}$$

On note I_k l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2} - \theta_k[$. Sur la variété $M = I_k \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-2}$, on considère la métrique $g_k = dr^2 + a_k(r)^2 g_{\mathbb{S}^1} + b_k(r)^2 g_{\mathbb{S}^{n-2}}$, où $g_{\mathbb{S}^1}$ et $g_{\mathbb{S}^{n-2}}$ sont les métriques canoniques des sphères \mathbb{S}^1 et \mathbb{S}^{n-2} , et où a_k

et b_k sont des fonctions définies sur I_k par les formules :

$$a_k(r) = \begin{cases} \frac{1}{k} \sin(kr) & \text{sur }]0, \epsilon_k], \\ \eta_k \sin(r + \theta_k) & \text{sur } [\epsilon_k, \frac{\pi}{2} - \theta_k[, \end{cases}$$

et

$$b_k(r) = \begin{cases} \frac{\epsilon_k}{\epsilon_k + \theta_k} \cos\left(\frac{\epsilon_k + \theta_k}{\epsilon_k} r\right) + \frac{\theta_k}{\epsilon_k + \theta_k} \cos(\theta_k + \epsilon_k) & \text{sur }]0, \epsilon_k], \\ \cos(r + \theta_k) & \text{sur } [\epsilon_k, \frac{\pi}{2} - \theta_k[. \end{cases}$$

Remarquons que la fonction a_k (resp. b_k) est C^1 sur I_k , C^2 en dehors de ϵ_k et tend vers 0 en 0 (resp. tend vers 0 en $\frac{\pi}{2} - \theta_k$). La métrique g_k se prolonge en une métrique C^1 sur \mathbb{S}^n pour laquelle le cercle \mathbb{S}^1 est le cut-locus de la sous sphère \mathbb{S}^{n-2} .

Pour minorer la courbure de Ricci, on applique les formules de calcul de la courbure de Ricci des doubles-produits tordus (voir par exemple [12]). En un point x fixé de M on note $\frac{\partial}{\partial r}$ un vecteur tangent au facteur I_k , u un élément de $T_x \mathbb{S}^1$, v un élément de $T_x \mathbb{S}^{n-2}$. Alors, la courbure de Ricci Ric_k de (\mathbb{S}^n, g_k) vérifie les propriétés suivantes:

$$\text{Ric}_k\left(\frac{\partial}{\partial r}, u\right) = \text{Ric}_k\left(\frac{\partial}{\partial r}, v\right) = \text{Ric}_k(u, v) = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{Ric}_k\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) &= -\frac{a''}{a} - (n-2)\frac{b''}{b} \\ &= \begin{cases} k^2 + (n-2)\left(\frac{\epsilon_k + \theta_k}{\epsilon_k}\right)^2 \frac{\cos\left(\frac{\epsilon_k + \theta_k}{\epsilon_k} r\right)}{\cos\left(\frac{\epsilon_k + \theta_k}{\epsilon_k} r\right) + \frac{\theta_k}{\epsilon_k} \cos(\theta_k + \epsilon_k)} \geq k^2 & \text{sur }]0, \epsilon_k] \\ n-1 & \text{sur } [\epsilon_k, \frac{\pi}{2} - \theta_k[\end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\text{Ric}_k(u, u)}{g_k(u, u)} &= -\frac{a''}{a} - (n-2)\frac{a'b'}{ab} \\ &= \begin{cases} k^2 + (n-2)\frac{k \cos(kr)}{\sin(kr)} \left(\frac{\epsilon_k + \theta_k}{\epsilon_k}\right) \frac{\sin\left(\frac{\epsilon_k + \theta_k}{\epsilon_k} r\right)}{\cos\left(\frac{\epsilon_k + \theta_k}{\epsilon_k} r\right) + \frac{\theta_k}{\epsilon_k} \cos(\theta_k + \epsilon_k)} \geq k^2 & \text{sur }]0, \epsilon_k] \\ n-1 & \text{sur } [\epsilon_k, \frac{\pi}{2} - \theta_k[\end{cases} \end{aligned}$$

et

$$\frac{\text{Ric}_k(v, v)}{g_k(v, v)} = -\frac{b''}{b} - \frac{a'b'}{ab} + (n-3)\left(\frac{1-b'^2}{b^2}\right)$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\text{Ric}_k(v, v)}{g_k(v, v)} &\geq \left(\frac{\epsilon_k + \theta_k}{\epsilon_k}\right)^2 \frac{\cos\left(\frac{\epsilon_k + \theta_k}{\epsilon_k} r\right)}{\cos\left(\frac{\epsilon_k + \theta_k}{\epsilon_k} r\right) + \frac{\theta_k}{\epsilon_k} \cos(\theta_k + \epsilon_k)} \\ &\geq \frac{\epsilon_k + \theta_k}{\epsilon_k} \sim \frac{2}{\pi} \sqrt{k} \text{ sur }]0, \epsilon_k] \end{aligned}$$

(car $\theta_k + \epsilon_k \geq (\frac{\epsilon_k + \theta_k}{\epsilon_k})r$) et

$$\frac{\text{Ric}_k(v, v)}{g_k(v, v)} = 2 + (n-3) \frac{1 - \sin^2(r + \theta_k)}{\cos^2(r + \theta_k)} = n-1 \text{ sur } [\epsilon_k, \frac{\pi}{2} - \theta_k].$$

On déduit des calculs précédents que (\mathbb{S}^n, g_k) est de courbure de Ricci supérieure à $(n-1)$ pour k assez grand.

Il est évident que le volumes des métriques g_k tend vers 0. De plus, la suite de variétés ainsi obtenue tend (en distance de Gromov-Hausdorff) vers une des hémisphères de dimension $n-1$ que borde la sphère \mathbb{S}^{n-2} : notons (N_k, h_k) la variété $]\epsilon_k, \frac{\pi}{2} - \theta_k[\times \mathbb{S}^{n-2}$, munie de la métrique $h_k = (dr)^2 + \cos^2(r + \theta_k) g_{\mathbb{S}^{n-2}}$; elle est isométrique à une boule géodésique de \mathbb{S}^{n-1} de rayon $\frac{\pi}{2} - (\epsilon_k + \theta_k)$ (privée de son centre), donc elle converge vers la demi-sphère $\frac{1}{2}\mathbb{S}^{n-1}$, munie de sa métrique canonique. Par ailleurs, (N_k, h_k) se plonge dans (M, g_k) de manière isométrique, via l'application $(r, v) \mapsto (r, u_0, v)$, où u_0 est un point fixé de \mathbb{S}^1 . De plus, la distance dans M entre deux points $p = (r, u_0, v)$ et $q = (r', u_0, v')$ coïncide avec la distance dans N_k entre (r, v) et (r', v') . Comme $d_{g_k}[(r, u, v); (r, u_0, v)] \leq \pi \eta_k$, on obtient que (M, g_k) converge vers l'hémisphère de \mathbb{S}^{n-1} au sens de Gromov-Hausdorff. Il nous reste à montrer que le laplacien de ces variétés admet au moins $n-1$ valeurs propres proches de n . Pour cela, nous pouvons soit appliquer [5], soit choisir des points x_0, \dots, x_{n-2} sur \mathbb{S}^{n-2} de sorte que $d_{\mathbb{S}^{n-2}}(x_i, x_j) = \frac{\pi}{2}$ si $i \neq j$ et noter encore x_i le point $(0, u_0, x_i)$ de M ; en appliquant le principe du min-max aux $(n-1)$ fonctions $f_i(x) = \cos(d_k(x_i, x))$ (la forme des métriques g_k fait que les intégrales à calculer convergent vers les intégrales correspondantes calculées sur $(\frac{1}{2}\mathbb{S}^{n-1}, \text{can})$; voir [3] pour les détails). Enfin, les métriques g_k n'ont pas plus de $n-1$ valeurs propres proches de n car sinon, d'après [5], les variétés (\mathbb{S}^n, g_k) contiendraient une sous partie Gromov-Hausdorff proche de $(\mathbb{S}^{n-1}, \text{can})$; or une demi-sphère de dimension $n-1$ ne peut contenir une partie Gromov-Hausdorff proche de la sphère $(\mathbb{S}^{n-1}, \text{can})$. On remarquera toutefois que la p -ième valeur propre λ_p^k de la variété (M, g_k) reste bornée par une fonction de p (pour p quelconque) lorsque k tend vers l'infini car les fonctions propres radiales pour le problème de Neuman de la demi-sphère de dimension $n-1$ permettent de construire, comme précédemment, une famille presque L^2 -orthonormée de fonctions tests sur M dont les quotients de Rayleigh pour la métrique g_k tendent vers le spectre pour le problème de Neuman de la demi-sphère de dimension $n-1$. On conclut alors par le principe du min-max.

References

- [1] M. ANDERSON, *Metrics of positive Ricci curvature with large diameter*, Manuscripta Math. **68** (1990), p. 405–415.

- [2] E. AUBRY, *Théorème de la Sphère*, Séminaire de théorie spectrale et géométrie, Grenoble Volume **18** (2000), p. 125–155.
- [3] E. AUBRY, *Variétés de courbure de Ricci presque minorée : inégalités géométriques optimales et stabilité des variétés extrémales*, Thèse, Institut Fourier, Grenoble (2003).
- [4] P. BÉRARD, G. BESSON, S. GALLOT, *Sur une inégalité isopérimétrique qui généralise celle de Paul Lévy-Gromov*, Invent. Math. **80** (1985), p. 295–308.
- [5] J. BERTRAND, Preprint, Université Paris-Sud, Orsay (2004).
- [6] G. BREDON, *Introduction to compact transformation groups*, Pure and Applied Mathematics, Vol **46** Academic Press New-york–London (1972).
- [7] J. CHEEGER, T. COLDING, *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. I* J. Differential Geom. **46** (1997), p. 406–480.
- [8] T. COLDING, *Shape of manifolds with positive Ricci curvature*, Invent. Math. **124** (1996), p. 175–191.
- [9] T. COLDING, *Large manifolds with positive Ricci curvature*, Invent. Math. **124** (1996), p. 193–214.
- [10] S. GALLOT, *Volume, courbure de Ricci et convergence des variétés (d’après T. H. Colding et Cheeger-Colding)*, séminaire Bourbaki Nov 1997 (exposé n°835), Astérisque **252** (1998), p. 7–32.
- [11] S. ILIAS, *Constantes explicites pour les inégalités de Sobolev sur les variétés riemanniennes compactes*, Ann. Inst. Fourier **33** (1983), p.151-165.
- [12] Y. OTSU, *On manifolds of positive Ricci curvature with large diameter*, Math. Z. **206** (1991), p. 252–264.
- [13] P. PETERSEN, *On eigenvalue pinching in positive Ricci curvature*, Invent. Math. **138** (1999), p. 1–21.
- [14] P. PETERSEN, *On eigenvalue pinching in positive Ricci curvature, Erratum*, Invent. Math. **155** (2004), p. 223.
- [15] G. PERELMAN, *Manifold of positive Ricci curvature with almost maximal volume* JAMS **7** (1994), p. 299–305.
- [16] E. RUH, *Curvature and differentiable structure on spheres*, Bull. Amer. Math. Soc. **77** (1971), p. 148–150.
- [17] T. YAMAGUCHI, *Lipschitz convergence of manifolds of positive Ricci curvature with large volume*, Math. Ann. **284** (1989), p. 423–436.