UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2019/2020**
Faculté des Sciences L3MA
Département de Mathématiques Calcul Différentiel
Examen partiel. Durée 1h30 minutes.

Documents et calculatrices interdits. Toute réponse doit être justifiée.

Exercice 1. *1+2+3+2=8 points.*
Soient $(E, ||\ ||)$ et $(E', ||\ ||')$ deux espaces vectoriels normés, de dimension finie et soit $f : E \to F$ une application linéaire.

1. Donner la définition d'un ensemble ouvert et d'un ensemble fermé dans l'espace vectoriel normé $(E, ||\ ||)$.
2. Montrer que, si l'application f est injective, alors la formule
$$||x||'' = ||f(x)||' \text{ pour tout } x \in E$$
définit une norme sur E et que les normes $||\ ||$ et $||\ ||''$ sur E sont équivalentes.
3. Montrer que si A est un fermé dans E, alors $f(A)$ est un fermé dans F dans le deux cas suivants
— A est borné, ou
— l'application f est injective.
4. Reste la dernière propriété vraie si l'application f n'est pas injective ? Si oui, donner la preuve, si non, donner un exemple avec A fermé et $f(A)$ non fermé.

Exercice 2. *2+2+2=6 points.*
Soient $(E, ||\ ||)$ et $(E', ||\ ||')$ deux espaces vectoriels normés et soient $K \subset E$ et $K' \subset E'$ deux ensembles compacts.

1. Montrer que la formule
$$||(x, x')||'' = ||x|| + ||x'||' \text{ pour tout } (x, x') \in E \times E'$$
définit une norme sur le produit cartésien $E'' = E \times E'$.
2. Montrer que le produit cartésien $K'' = K \times K'$ est un compact dans E''.
3. Si $E = E'$ et $||\ || = ||\ ||'$, montrer qu'il existe $(x_0, x_0') \in K''$ tel que
$$||x_0 - x_0'|| = \inf_{x \in K, x' \in K'} ||x - x'||.$$

Exercice 3. *2+2+2=6 points.*
Soit $p \in \mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f(x, y) = xy(x^2 + y^2)^p$$
si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

1. Montrer que la fonction f est continue en $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si $p > -1$.
2. Montrer que les dérivées partielles de la fonction f existent en $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ pour tout $p \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que la fonction f est différentiable en $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si $p > -\frac{1}{2}$.