Documents et calculatrices interdits. Toute réponse doit être justifiée.

Exercice 1. *2+2+2=6 points.*

1. Donner la définition d'un difféomorphisme local de classe C^1.
2. Enoncer le théorème d'inversion locale.
3. Considérons une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f'(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $I = f(\mathbb{R})$ est un intervalle ouvert et que f induit un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur I.

Exercice 2. *2+2=4 points.*

1. Enoncer le théorème des fonctions implicites.
2. En utilisant le théorème des fonctions implicites, montrer qu'une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 ne peut pas être injective.

Exercice 3. *2+2+3+1+2=10 points.*

Considérons la courbe C dans le plan $\mathbb{R}^2$ défini par l'équation $f = 0$, où

$$f(x, y) = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - 1.$$

1. Montrer que C est une courbe lisse compacte.
2. On considère les fonctions $g_i : C \to \mathbb{R}$ pour $i = 1, 2$ définies par

   $$g_1(x, y) = (x - 3)^2 + y^2 \text{ et } g_2(x, y) = (x + 3)^2 + y^2.$$

   Montrer que

   $$\sqrt{g_1(x, y)} + \sqrt{g_2(x, y)} = 10$$

   pour tout point $(x, y) \in C$.
3. En utilisant les multiplicateurs de Lagrange, déterminer les extrema $m_1 = \inf_{(x,y)\in C} g_1(x, y)$ et $M_1 = \sup_{(x,y)\in C} g_1(x, y)$.
4. En utilisant les résultats précédents, déterminer les extrema $m_2 = \inf_{(x,y)\in C} g_2(x, y)$ et $M_2 = \sup_{(x,y)\in C} g_2(x, y)$.
5. Dessiner la courbe C et donner l'interprétation géométrique.