UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2019/2020**
Faculté des Sciences L3MA
Département de Mathématiques Calcul Différentiel
Feuille d'exercices n^o 7

Exercice 1.

Déterminer les points singuliers des surfaces suivantes. Écrire l'équation du plan tangent (resp. du plan tangent affine) au point p indiqué dans chaque cas.

(i) $S_1 : x^3 + y^3 - 3xyz = 1$, $p = (2, 2, \frac{5}{4})$.

(ii) $S_2 : x^3 + y^3 - 3xyz = 0$, $p = (2, 2, \frac{4}{3})$.

(iii) $S_3 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$, $p = (2, 4, 6)$.

Exercice 2.

Trouver les points critiques et les extrema globaux de la fonction $f(x, y, z) = x + y + z$ sur la sphère $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 3\}$.
Même question pour la fonction $f(x, y, z) = y^2(x^2 - z^2 - 1)$.

Exercice 3.
Trouver le volume maximum d'une boîte parallélépipédique rectangle dont les sommets se trouvent sur la sphère $S^2_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R\}$.

Exercice 4. (diagonalisation des matrices symétriques réelles)
Soit A une matrice symétrique réelle de taille $n \times n$. Soit

$$S^{n-1} = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1\}.$$

(i) Montrer que la sphère S^{n-1} est un compact et que la fonction $f(x) =< Ax, x >$ y admet un maximum.

(ii) Montrer que x est un point critique de f restreinte à la sphère S^{n-1} si et seulement si x est un vecteur propre de A. Que vaut le multiplicateur de Lagrange en ce point critique ?

(iii) En déduire que A admet un vecteur propre u_1.

(iv) En utilisant l'espace $E = u_1^\perp$ orthogonal au vecteur u_1, montrer que la matrice A est diagonalisable par rapport à une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 5.
Les réels positifs $a_1, ..., a_n$ vérifient la relation $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Déterminer le maximum de la fonction $f(x) = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$ sur l'ensemble

$$K = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 \text{ pour tout } i = 1, ..., n \text{ et } \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 1\}.$$

En déduire que si $x_i \geq 0$ pour tout $i = 1, ..., n$, alors on a

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$