UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2019/2020**
Faculté des Sciences L3MA
Département de Mathématiques Calcul Différentiel
Feuille d'exercices n^{o}6

Exercice 1.

Soit $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par $f(x,y) = x^2 + 2y^3 - y^6$ et $g(x,y) = x^2 + 2y^4 - y^8$.

(i) Trouver les points critiques de f et de g.

(ii) Etudier les extrema locaux de f et de g.

Exercice 2.

(i) Si la fonction $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ est de classe C^1 et $f'(a) \neq 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, alors f est injective.

(ii) Soit l'application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $g(x,y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y))$. Montrer que $D_a g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est un isomorphisme pour tout $a \in \mathbb{R}^2$, mais l'application g n'est pas injective.

Exercice 3.

En utilisant la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{x}{2} + x^2 \sin(\frac{1}{x})$ pour $x \neq 0$, montrer que l'hypothèse sur la classe C^1 de f dans le théorème d'inversion locale est nécessaire.

Exercice 4.
On considère le système de deux équations à trois inconnues

$$x^2 + y^2 - z^2 = x^3 - y^3 + z^3 = 1.$$

(i) Montrer que $(2, -1, -2)$ est une solution.

(ii) Montrer qu'il existe deux solutions u, v de classe C^1, définies dans un voisinage V de -2 et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout $z \in V$

$$u(z)^2 + v(z)^2 - z^2 = u(z)^3 - v(z)^3 + z^3 = 1.$$

(iii) Calculer $u'(-2)$ et $v'(-2)$.

(iv) Calculer $u'(z)$ et $v'(z)$ en fonction de $u(z)$ et $v(z)$.

Exercice 5.

Montrer qu'une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 ne peut pas être injective. Indication : il y au moins deux méthodes :

1. supposer que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \neq 0$ et utiliser le théorème d'inversion locale pour l'application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(x,y) = (f(x,y), y)$.
2. supposer que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \neq 0$ et utiliser le théorème des fonctions implicites.