UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS — **2019/2020**
Faculté des Sciences — L3MA
Département de Mathématiques — Calcul Différentiel
Feuille d'exercices n^{o}5

Exercice 1. On considère $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $||*||_2$. Soit $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = x/||x||_2$.

1. Justifier que f est différentiable et calculer la matrice jacobienne de f.
2. Montrer que $D_x f(x) = 0$ pour tout x. Peut-on trouver ce résultat sans calcul ?
3. Calculer le déterminant jacobien de f (si possible sans calcul).

Exercice 2. Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur U. Montrer que pour $a, b \in U$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(b) - f(a) = D_c f(b - a)$.

Exercice 3. (i) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Montrer que f est une fonction constante.

(ii) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Montrer que f est une fonction indépendante de x : pour $(x_1, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x_2, y) \in \mathbb{R}^2$ on a $f(x_1, y) = f(x_2, y)$.

(iii) Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times [0, +\infty[)$. Montrer qu'il existe une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ et f n'est pas une fonction indépendante de x.

Exercice 4. Calculer la matrice hessienne de la fonction

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x-y}$$

en $(0, 0)$ et en $(1, -1)$. Ecrire la formule de Taylor-Young pour la fonction f en $(0, 0)$ et puis en $(1, -1)$.

Exercice 5. Soit $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \int_0^x g_1(t, 0)dt + \int_0^y g_2(x, s)ds.$$

(i) Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = g_2(x, y)$.

(ii) Dans quelles conditions on a aussi $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g_1(x, y)$?

(iii) Trouver une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 - y^2 \ \text{ et } \ \frac{\partial f}{\partial y} = -2xy.$$

Exercice 6.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^3 - 3x(1 + y^2)$.

(i) Trouver les points critiques de f.

(ii) Etudier les extrema locaux de f.

(iii) Soit D le disque fermé de rayon $\frac{1}{2}$ centré à l'origine. Montrer que D est compact. Soit M le maximum global et m le minimum global de f sur D. Montrer que ces extrema globaux sont réalisés sur le bord de D. En étudiant la fonction $t \mapsto f(\frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\sin t)$, déduire les valeurs de m et M.