UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

2019/2020
L3MA
Calcul Différentiel
Feuille d'exercices n^{o}4

Exercice 1. Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x,y) = (x+y)^2 - x - y + 1$. Soit $p = (1,2) \in \mathbb{R}^2$ (regardé comme un point) et $u = (-1,2) \in \mathbb{R}^2$, $v = (1,-1) \in \mathbb{R}^2$ (regardés comme des vecteurs).

1. Calculer les dérivées $\partial_u f(p)$ (resp. $\partial_v f(p)$) de f dans la direction u (resp. v) en p.
2. Soit $w = u + 2v$. Montrer que
$$\partial_w f(p) = \partial_u f(p) + 2\partial_v f(p).$$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xy$. En utilisant la définition, montrer que f est différentiable en $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et que sa différentielle $df(a,b)$ est l'application linéaire $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(u,v) \mapsto bu + av$.

Exercice 3. Soit $p \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y) = xy(x^2+y^2)^p$$
si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

1. Montrer que les dérivées partielles de la fonction f existent en $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ pour tout $p \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction f est différentiable en $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si $p > -\frac{1}{2}$.

Exercice 4. Pour chacune des fonctions suivantes, calculer les dérivées partielles et la différentielle au point $p = (2,-1,1)$.

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \exp(x^2 + y^3 + z^5 + xyz)$.
2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2)$.
3. Calculer la différentielle $D_p(\phi)$, où l'application $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ est donnée par
$$\phi(x,y,z) = (\exp(x^2 + y^3 + z^5 + xyz), \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2))$$
et $p = (2,-1,1)$.
4. Déterminer le noyau $KerD_p(\phi)$ et l'image $ImD_p(\phi)$.
5. Pour quels points $q \in \mathbb{R}^3$ a-t-on $ImD_q(\phi) = \mathbb{R}^2$?