

Exercice 1. Soit $(E, \| * \|)$ un evn. Montrer que les applications suivantes sont continues.

$$s : E \times E \rightarrow E, \quad s(x, y) = x + y;$$

$$m : K \times E \rightarrow E, \quad m(\lambda, x) = \lambda x;$$

et

$$n : E \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad n(x) = \|x\|.$$

Ici $E \times E$ (resp. $K \times E$) est muni de la norme $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$ (resp. $\|(\lambda, x)\| = |\lambda| + \|x\|$).

Exercice 2. Soit $(E, \| * \|)$ un evn, $\lambda \in K$ et $a \in E$. Montrer que l'application $L(x) = \lambda x + a$ est une application continue, qui est un homéomorphisme si $\lambda \neq 0$. Montre que

$$L(B(x, r)) = B(L(x), |\lambda|r).$$

Exercice 3. Soit $a \in \mathbb{R}^3$ un vecteur fixe et considérer les applications produit scalaire $p_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $p_a(x) = \langle x, a \rangle$ et produit vectoriel $P_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $P_a(x) = x \wedge a = x \times a$. Montrer que p_a et P_a sont des applications linéaires et calculer leurs normes si \mathbb{R}^3 est muni de la norme $\| * \|_2$ et \mathbb{R} de la norme valeur absolue.

Exercice 4. On munit $K[X]$ de la norme

$$\left\| \sum_{k=0}^d a_k X^k \right\| = \max_{1 \leq k \leq d} |a_k|.$$

1. Vérifier que cette formule définit vraiment une norme sur $E = K[X]$.
2. Soit $b \in K$ un nombre tel que $|b| < 1$. Montrer que l'application $E \rightarrow K$, $P \mapsto P(b)$ est linéaire et continue. Que se passe-t-il si $|b| \geq 1$?
3. L'application linéaire $D : E \rightarrow E$, $P \mapsto P'$ est-elle continue ?

Exercice 5. Montrer que si $u \in E = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et \mathbb{R}^n est munie de la norme $\| * \|_2$ au départ et à l'arrivée, alors

$$\|u\| = \max\{|\lambda|^{\frac{1}{2}} : \lambda \text{ est une valeur propre de } {}^t u \cdot u\}.$$

Exercice 6. Soit $u \in E = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, où \mathbb{R}^n est munie de la norme $\| * \|_1$ (resp. $\| * \|_\infty$ au départ et à l'arrivée. Déterminer $\|u\|$.