UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2019/2020**
Faculté des Sciences L3MA
Département de Mathématiques Calcul Différentiel
Feuille d'exercices n^{o}1

Exercice 1. Soit $f : X \to Y$ une application de l'ensemble X dans l'ensemble Y. Soit A, A' parties de X et B, B' parties de Y.

1. Montrer que $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$ et $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$. Donnez un exemple montrant que l'inclusion peut être stricte.
2. Montrer que $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$ et $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.
3. Montrer qu'il n'y a aucune relation d'inclusion entre $f(X \setminus A)$ et $Y \setminus f(A)$ en général.

Exercice 2. Soit X un ensemble et A, B, C trois parties de X. Montrer que si $A \cup B = A \cup C$ and $A \cap B = A \cap C$, alors $B = C$.

Dans la suite, soit E un K-espace vectoriel, où $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$.

Exercice 3. (Quelques normes classiques)

1. Montrer que les applications suivantes
$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad ||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}, \quad ||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$
définissent des normes sur $\mathbb{R}^n$ et sur $\mathbb{C}^n$ et qu'on a
$$||x||_\infty \leq ||x||_1 \leq \sqrt{n}||x||_2 \leq n||x||_\infty.$$
Indication : utiliser l'inégalité de Cauchy-Bunyakovski-Schwarz.
2. Montrer que les applications suivantes
$$||f||_1 = \int_a^b |f(t)|dt, \quad ||f||_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}, \quad ||f||_\infty = \sup_{t \in I} |f(t)|$$
sont trois normes sur $C^0(I, K)$, où $I = [a, b]$. Montrer aussi que les normes $|| * ||_1$ et $|| * ||_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 4. Dessiner dans $\mathbb{R}^2$ les boules de centre $(1, -1)$ et de rayon 2 pour les normes $||x||_1, ||x||_2, ||x||_\infty$.

Exercice 5. Soit E un evn, $a, b \in E$ et $r, r' > 0$. Montrer que
$$r + r' \leq ||a - b|| \text{ si et seulement si } B_a(r) \cap B_b(r') = \emptyset.$$
Qu'en est-il pour les boules fermées ?

Exercice 6. Soit E un K-ev et $|| * ||$ et $|| * ||'$ deux normes sur E. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes.

1. Il existe une constante $C > 0$ telle que $||x|| \leq C||x||'$ pour tout $x \in E$.
2. Toute boule de $|| * ||$ contient une boule de $|| * ||'$ de même centre.
3. Tout ouvert de $|| * ||$ est un ouvert de $|| * ||'$.
4. Il existe une boule de $|| * ||$ qui contient une boule de $|| * ||'$.

Exercice 7. Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $||f||_\infty$.

1. L'ensemble $A = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$ est-il ouvert ? fermé ? Déterminer l'adhérence $\overline{A}$.
2. L'ensemble $B = \{f \in E \mid f(0) > 0\}$ est-il ouvert ? fermé ? Déterminer l'adhérence $\overline{B}$.
3. L'ensemble $C = \{f \in E \mid \int_0^1 f(x)dx = 0\}$ est-il ouvert ? fermé ? Déterminer l'adhérence $\overline{C}$.