

Feuille de réponses de la séance 4
Calcul du prix d'une option barrière

Pour calculer la valeur d'une option DIC, on va utiliser, comme pour un Call vanille, sa définition $DIC_0 = e^{-rT} \mathbb{E}(\varphi(S_T) \mathbb{I}_{\tau_L \leq T})$ en programmant le calcul de cette espérance par récurrence retrograde. Mais pour prendre en compte l'indicatrice $\mathbb{I}_{\tau_L \leq T}$, on va ajouter aux deux variables i et j usuelles une troisième variable notée k qui vaut 0 ou 1 selon qu'on envisage que $\mathbb{I}_{\tau_L \leq t}$ vaut 0 ou 1. La fonction `sousL(i, j)` sera une fonction qui vaut 1 lorsqu'on est sous la barrière et 0 si l'on est au dessus et on l'utilise de la façon suivante. En $t = T$, l'option vaut $\varphi(S_T)$ lorsque $k = 1$ et elle vaut 0 sinon. Donc on a $DIC(n, j, 1) = \varphi(S(n, j))$ et $DIC(n, j, 0) = 0$. Puis lorsque $t < T$, l'option est égale à l'espérance actualisée de ses deux valeurs suivantes (comme pour un Call vanille) et la troisième variable k est égale à 1 ou 0 selon qu'on suppose la barrière déjà franchie ou non. On a donc :

$$DIC(i, j, k) = e^{-r\delta t} (pDIC(i+1, j+1, k') + (1-p)DIC(i+1, j, k''))$$

où $k' = \max(k, \text{sousL}(i+1, j+1))$ et $k'' = \max(k, \text{sousL}(i+1, j))$.

1. On reprend le modèle d'actif financier CRR avec les constantes suivantes $n = 12$, $T = 1$, $\sigma = 0.2$, $S_0 = 150$ et $r = 0.05$. Sauf mention contraire on suppose les options à la monnaie ($K = S_0$). Créer un nouveau code Scilab en commençant par y recopier les définitions de S , de CC et de PP introduites aux TP précédents. On choisira les constantes $n = 12$, $\sigma = 0.2$, $S_0 = 150$ et $r = 0.05$. Indiquer les valeurs maximales et minimales des trois marches aléatoires S , C et P .
2. Saisir le code indiqué ci dessous. A noter qu'on a utilisé `DDIC(i+1, j+1, k+1)` pour $DIC(i, j, k)$ pour les raisons habituelles. On prendra ici la barrière L égale à $L = 130$. Expliquer pourquoi `DDIC(1, 1, 2)` n'est rien d'autre que la prime d'un Call vanille. Quelle valeur trouvez-vous ?
3. Expliquer pourquoi `DDIC(1, 1, 1)` est la prime de la DIC. Quelle valeur trouvez-vous ?
4. Etudier comment varie le prix de la DIC lorsque L se rapproche de S_0 . Comment pouvez-vous l'expliquer ?

5. Dupliquer puis modifier le code de calcul de DDIC pour calculer la prime DD0C d'une option DOC. Expliquer. Quelle valeur trouvez-vous?

6. Comparer $C = \text{Call}$, et $DIC + DOC$ à divers instants et expliquer.

7. Reprendre les trois questions précédentes pour des options DIP et DOP.

8. Si $L > S_0$ au lieu de $L < S_0$ "Down" devient "Up" et DIC, DOC, DIP, DOP, deviennent UIC, UOC, UIP, UOP. Choisir $L = 170$ et calculer les primes de ces quatre contrats pour cette nouvelle valeur de L .

```

function indi=sousL(i,j) ;//Indicatrice de la région sous la barrière
    if S(i,j)<=L then indi=1 ;
    else indi=0 ;
    end ;
endfunction ;
DDIC=zeros(n+1,n+1,2) ;//Calcul des valeurs de la DIC
for j=0:n // ici i vaut n
    for k=0:1 // k=1 code "on est passé en dessous de L auparavant"
        if k==1 then DDIC(n+1,j+1,k+1)=max(S(n,j)-K,0) ;
        else DDIC(n+1,j+1,k+1)=0 ;
        end ;
    end ;
end ;
for i=n-1:-1:0
    for j=0:i
        for k=0:1
            DDIC(i+1,j+1,k+1)=(p*DDIC(i+1+1, j+1+1, max(k, sousL(i+1,j+1))+1)..
                + (1-p)*DDIC(i+1+1, j+1, max(k, sousL(i+1,j))+1))/R ;
        end ;
    end ;
end ;

```