

Chapitre 1

Marches aléatoires et filtration

A coté des modèles dynamiques *déterministes*, c'est-à-dire pour lesquels les quantités étudiées ont une évolution gouvernée par une équation différentielle ou une équation récurrente dont la connaissance fournit une prédiction *certaine* de ses valeurs futures, il existe des modèles dynamiques aléatoires, ou *processus stochastiques*, souvent plus pertinents car ils permettent de prendre en compte plusieurs avenir possibles; les plus simples sont les *marches aléatoires*.

1.1 Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein

Le marché financier que nous considérons dans les premières leçons de ce cours est un marché financier très simple qui ne comporte que 2 actifs, un actif risqué (par exemple une action ou un indice), dont la valeur à l'instant t est notée S_t (comme *Stock*), et un actif non risqué (par exemple un dépôt d'argent sur un compte rémunéré ou une obligation), dont la valeur à l'instant t est notée B_t (comme *Bond*). Ces deux actifs nous donnent l'occasion de découvrir un exemple de marche aléatoire (une dynamique stochastique) et un exemple de suite récurrente (une dynamique déterministe). Ils sont définis pour une suite finie de n instants régulièrement répartis entre 0 et T , $\mathbb{T} := \{0, \delta t, 2\delta t, \dots, n\delta t = T\}$, où $\delta t > 0$ est un réel fixé (supposé petit).

La valeur $(S_t)_{t \in \mathbb{T}}$ de l'**actif risqué** est égale à un nombre positif donné S_0 à l'instant $t = 0$, et elle évolue selon la règle suivante : si sa valeur à l'instant $t \in \mathbb{T} \setminus \{n\delta t\}$ est S_t , alors sa valeur à l'instant $t + \delta t$ sera soit $S_t u$ soit $S_t d$, où u et d sont des constantes qu'on supposera telles que $0 < d < 1 < u$. Donc $(S_t)_{t \in \mathbb{T}}$ évolue sur un *arbre binaire* qui, à tout instant $t = i\delta t \in \mathbb{T}$, présente $i + 1$ nœuds ou $i + 1$ valeurs possibles égales à :

$$\{S_0 u^j d^{i-j}, j = 0, \dots, i\}$$

l'indice j représentant le nombre de fois où l'actif a évolué à la hausse entre l'instant $t = 0$ et l'instant $t = i\delta t$ (j est nombre de "up"), l'ordre des "up" et des "down" n'important pas. Ce modèle a été proposé en 1979¹ par J. Cox, S. Ross, et M. Rubinstein pour modéliser l'évolution du prix d'un actif.

L'**actif non risqué** vaut $B_0 = 1$ à l'instant initial, et il évolue selon la récurrence $B_t = B_{t-\delta t} e^{r\delta t}$, soit $B_t = e^{rt}$, où r désigne le taux d'escompte monétaire qu'on suppose constant, pour simplifier, sur toute la période $[0, T]$.

1.2 Définition d'une marche aléatoire finie

L'exemple du modèle CRR est un cas particulier d'une structure mathématique plus générale qu'on appelle une *marche aléatoire*, lorsque l'espace des temps est discret.

Définition : Soient Ω un ensemble fini, \mathcal{F} une sous-tribu de $\mathcal{P}(\Omega)$, (Ω, P, \mathcal{F}) un espace probabilisé fini et soit $\mathbb{T} = \{0, \delta t, \dots, n\delta t = T\}$, où $\delta t > 0$ est un réel fixé (petit). On appelle *marche aléatoire finie* une application Z mesurable

$$Z : \Omega \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad (\omega, t) \mapsto Z_t(\omega).$$

1. Ce modèle fait suite à un modèle d'actifs financiers introduit en 1971 indépendamment par Black et Scholes, et Merton, fondé sur une approche stochastique en temps continu. Le premier modèle de ce type remonte en fait à Louis Bachelier, dans sa thèse (1900), à laquelle Black et Scholes rendent hommage. On peut penser que c'est la sociologie des mathématiques qui explique la pause 1900-1971 de publication sur ce sujet. L'idée de l'approche discrète revient, selon les écrits de Cox et Rubinstein, à W. Sharpe, prix Nobel d'économie et auteur du fameux *Capital Asset Pricing Model* (1964).

Notons que le mesurabilité est triviale dans le cas particulier (que nous adopterons ici) où $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Dans le cas d'une marche aléatoire, l'évolution future d'une quantité observée, le cours d'un titre, un indice, un taux, n'est plus constituée d'une trajectoire unique mais de plusieurs possibles dont une seule se réalisera : précisément, une *trajectoire* de la marche Z est l'ensemble $\{(t, Z_t(\omega)) \mid t \in [0..T]_{\delta t}\}$ pour un $\omega \in \Omega$ quelconque. L'exemple CRR est bien une marche aléatoire. En effet dans l'expression $S_t = S_0 u^j d^{i-j}$, j compte le nombre de mouvements vers le haut de S pour tous les instants s inférieurs ou égaux à $t = i\delta t$. Donc j est un entier dépendant de i et des mouvements du cours jusqu'à $t = i\delta t$ et il est compris entre 0 (que des mouvements vers le bas) et i (que des mouvements vers le haut). Pour prendre en compte ces deux traits essentiels de j , il est dynamique (car il dépend de i) et aléatoire (car il dépend de ce qu'il advient à S), nous le notons J_i (et donc $S_{i\delta t} = S_0 u^{J_i} d^{i-J_i}$ car, pour tout $i \in [0..n]$, $J_i : \Omega \rightarrow [0..i]$ ($\subseteq \mathbb{R}$) est une variable aléatoire. Nous n'avons pas préciser notre choix de Ω : ce peut être simplement $\Omega = \{0, 1\}^n$. Dans ce cas, si $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega = \{0, 1\}^n$, on a la définition explicite suivante de la variable aléatoire $J_i(\omega) = \sum_{k=1}^i \omega_k$. Donc $S := (S_t)_{t \in [0..T]_{\delta t}}$ est bien une marche aléatoire définie pour tout $t \in \mathbb{T} = [0..T]_{\delta t}$ et pour tout $\omega \in \Omega$, par $S_{i\delta t}(\omega) = S_0 u^{J_i(\omega)} d^{i-J_i(\omega)}$. Si l'on note $\delta J_i = J_i - J_{i-1}$ qui est à valeurs dans $\{0, 1\}$, et si nous introduisons la probabilité $p = \mathbb{P}(S_{t+\delta t} = S_t u)$ les $(\delta J_i)_{i=1..n}$ sont des v.a. de Bernoulli *indépendantes*, de loi $\mathcal{B}(1, p)$, avec $p = \mathbb{P}(\delta J_i = 1)$ et, partant, chaque $J_i = \sum_{k=1}^i \delta J_k$ suit une loi binômiale $\mathcal{B}(i, p)$

$$\mathbb{P}(S_t = S_0 u^j d^{i-j}) = \mathbb{P}(\delta J_i = j) = \binom{i}{j} p^j (1-p)^{i-j}.$$

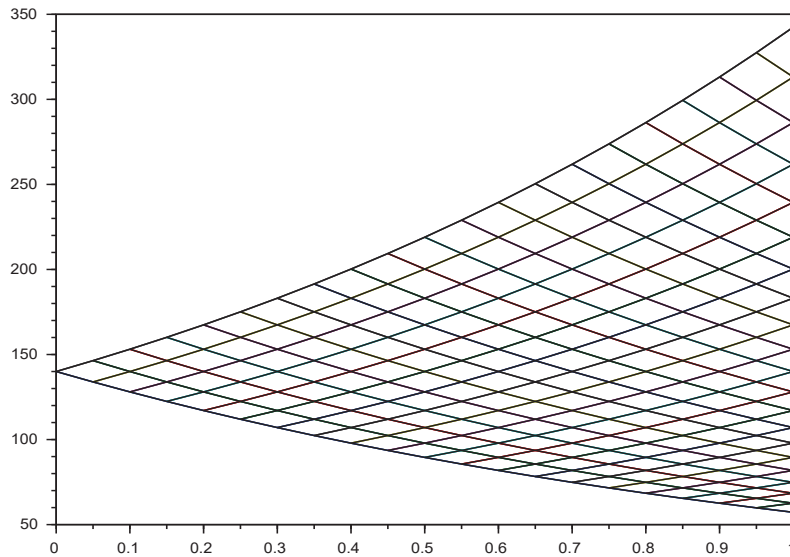


FIGURE 1.1 – Tracé de l'arbre CRR pour $S_0 = 140$, $T = 1$, $n = 20$ (et donc $\delta t = T/n = 0.05$), $up = \exp(0.2\sqrt{T/n})$ et $down = 1/u$. Il y a 2^n trajectoires différentes et 21 valeurs à l'instant T .

Exemple : Dans le modèle CRR à $n = 3$ étapes, l'espace $\Omega = \{0, 1\}^3$ comporte 8 événements élémentaires, $\omega_1 = (1, 1, 1)$, $\omega_2 = (1, 1, 0)$, $\omega_3 = (1, 0, 1)$, $\omega_4 = (1, 0, 0)$, $\omega_5 = (0, 1, 1)$, $\omega_6 = (0, 1, 0)$, $\omega_7 = (0, 0, 1)$, et $\omega_8 = (0, 0, 0)$ et on peut l'interpréter comme l'ensemble des 8 trajectoires possibles $\gamma_1, \dots, \gamma_8$:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= ((S_0, 0) ; (\delta t, S_0 u) ; (2\delta t, S_0 u^2) ; (3\delta t, S_0 u^3)) \\ \gamma_2 &= ((S_0, 0) ; (\delta t, S_0 u) ; (2\delta t, S_0 u^2) ; (3\delta t, S_0 u^2 d)) \\ \gamma_3 &= ((S_0, 0) ; (\delta t, S_0 u) ; (2\delta t, S_0 u d) ; (3\delta t, S_0 u^2 d)) \\ \gamma_4 &= ((S_0, 0) ; (\delta t, S_0 u) ; (2\delta t, S_0 u d) ; (3\delta t, S_0 u d^2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_5 &= ((S_0, 0) ; (\delta t, S_0 d) ; (2\delta t, S_0 u d) ; (3\delta t, S_0 u^2 d)) \\
\gamma_6 &= ((S_0, 0) ; (\delta t, S_0 d) ; (2\delta t, S_0 u d) ; (3\delta t, S_0 u d^2)) \\
\gamma_7 &= ((S_0, 0) ; (\delta t, S_0 d) ; (2\delta t, S_0 d^2) ; (3\delta t, S_0 u d^2)) \\
\gamma_8 &= ((S_0, 0) ; (\delta t, S_0 d) ; (2\delta t, S_0 d^2) ; (3\delta t, S_0 d^3))
\end{aligned}$$

1.3 Caractériser ce qui est connu et ce qui reste aléatoire

1.3.1 La relation $\overset{t}{\sim}$ et la partition \mathfrak{Q}_t de Ω

Considérons un $t \in [0..T]_{\delta t}$ et deux “états possibles du monde” $\omega' \in \Omega$ et $\omega'' \in \Omega$. Nous dirons que ω' et ω'' sont équivalents à l’instant t et écrirons $\omega' \overset{t}{\sim} \omega''$ si et seulement si pour tous $s \in [0..t]_{\delta t}$ on a $S_s(\omega') = S_s(\omega'')$

$$\omega' \overset{t}{\sim} \omega'' \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall s \in [0..t]_{\delta t} S_s(\omega') = S_s(\omega'') \quad (1.1)$$

L’idée est simple : Ω indexe toutes les situations prises en compte par le modèle et les deux situations indexées par ω' et ω'' correspondent à des évolutions du cours qui coïncident jusqu’à l’instant t au moins. Pour chaque t la relation $\overset{t}{\sim}$ est une relation d’équivalence ; la classe d’équivalence $\bar{\omega}$ (ou $\bar{\omega}^t$ si l’on tient à rappeler t) est composée de tous les ω' tels que $\omega' \overset{t}{\sim} \omega$. Deux classes d’équivalences $\bar{\omega}_1^t$ et $\bar{\omega}_2^t$ quelconques sont nécessairement égales ou disjointes et chaque ω appartient à une telle classe (“sa” classe $\bar{\omega}$, tout simplement). A la relation $\overset{t}{\sim}$ correspond donc une *partition* \mathfrak{Q}_t de Ω , ce qui signifie que $\mathfrak{Q}_t \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, $\bigcup_{A \in \mathfrak{Q}_t} A = \Omega$, et si $A_1 \in \mathfrak{Q}_t$ et $A_2 \in \mathfrak{Q}_t$ sont distincts, ils sont nécessairement disjointes. On interprète cette partition comme étant l’information sur le cours de l’actif dont on dispose à l’instant t .

Exemple : Si la marche aléatoire est le modèle CRR à 3 étapes, les partitions \mathfrak{Q}_t sont :

- si $t = 0$, $\mathfrak{Q}_0 = \{\Omega\}$.
- si $t = \delta t$, $\mathfrak{Q}_{\delta t} = \{\Omega^1 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \Omega^2 = \{\omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}\}$.
- si $t = 2\delta t$, $\mathfrak{Q}_{2\delta t} = \{\Omega^{11} = \{\omega_1, \omega_2\}, \Omega^{12} = \{\omega_3, \omega_4\}, \Omega^{21} = \{\omega_5, \omega_6\}, \Omega^{22} = \{\omega_7, \omega_8\}\}$.
- si $t = 3\delta t$, $\mathfrak{Q}_{3\delta t} = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_4\}, \{\omega_5\}, \{\omega_6\}, \{\omega_7\}, \{\omega_8\}\}$.

L’ensemble des trajectoires qui coïncident jusqu’à l’instant t est une classe d’équivalence de la relation (1.1). Nous l’appellerons **le fouet**. Il représente l’ensemble des avenir restant possibles à la date t pour un état du monde ω que l’on a pu observer jusqu’à cette date.

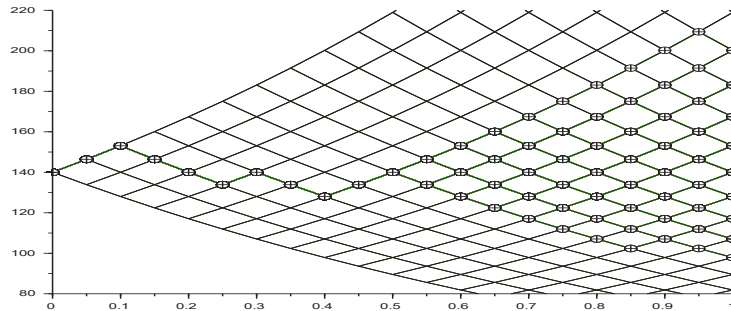


FIGURE 1.2 – Représentation d’un fouet : les 100 trajectoires représentées ici coïncident jusqu’à $t = 0.5$.

1.3.2 Les tribus \mathcal{F}_t^S ou filtration associée à S

Observons que pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $s \leq t$ on a $\bar{\omega}^s \supseteq \bar{\omega}^t$ (voyez-vous pourquoi?). Cependant ceci ne peut pas s’écrire $\mathfrak{Q}_s \supseteq \mathfrak{Q}_t$, ni $\mathfrak{Q}_s \subseteq \mathfrak{Q}_t$ d’ailleurs. Si nous voulons obtenir une inclusion d’une telle nature nous devons, à partir de chaque partition \mathfrak{Q}_t considérer le *plus petit sous ensemble de* $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ tel que, pour tout $A \in \mathcal{Q}$, si $\bar{\omega}^t$ rencontre A , alors il est contenu dans A (ou encore, que ou bien $\bar{\omega}^t \cap A = \emptyset$ ou bien

$\bar{\omega}^t \subseteq A$.) Ce plus petit sous-ensemble \mathcal{Q} de $\mathcal{P}(\Omega)$ est tout simplement constitué des réunions quelconques de classes $\bar{\omega}^t$; on le notera \mathcal{F}_t^S et il s'appelle *la tribu engendrée par la partition* \mathfrak{P}_t . Observez que, comme les “morceaux” dans la partition \mathfrak{P}_s sont réunions de morceaux dans \mathfrak{P}_t , on a $\mathfrak{P}_s \subseteq \mathcal{F}_t^S$, et donc aussi $\mathcal{F}_s^S \subseteq \mathcal{F}_t^S$: on dit que la tribu \mathcal{F}_s^S est plus *grossière* que la tribu \mathcal{F}_t^S , ou encore que la tribu \mathcal{F}_t^S est plus *fine* que la tribu \mathcal{F}_s^S . Notez que si $s \leq t$, on a $\bar{\omega}^s \supseteq \bar{\omega}^t$ mais $\mathcal{F}_s^S \subseteq \mathcal{F}_t^S$.

L'un des intérêts de passer de la partition à la tribu, c'est que dans la tribu on a un calcul: la tribu est une *algèbre*, dans le sens suivant: on dit que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ est une algèbre si $\emptyset \in \mathcal{A}$, et si $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$, alors $A^c \in \mathcal{A}$ et $A \cap B \in \mathcal{A}$.

Nous avons vu comment passer de la partition à l'algèbre. Le passage inverse, de l'algèbre à la partition en prenant pour parties de la partitions les *atomes* de l'algèbre \mathcal{A} , qui sont les plus petits éléments A de \mathcal{A} dans le sens suivant: si $\emptyset \neq B \subseteq A$, si $B \in \mathcal{A}$, alors nécessairement $B = A$.

Exemple : Si la marche aléatoire est le modèle CRR à 3 étapes, on peut associer à chaque partition \mathfrak{P}_t , une tribu, notée \mathcal{F}_t :

- si $t = 0$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.
- si $t = \delta t$, $\mathcal{F}_{\delta t} = \{\emptyset, \Omega^1, \Omega^2, \Omega\}$.
- si $t = 2\delta t$, $\mathcal{F}_{2\delta t} = \{\emptyset, \Omega^{11}, \Omega^{12}, \Omega^{21}, \Omega^{22}, \Omega^1, \Omega^2, \Omega^{11} \cup \Omega^2, \dots, \Omega\}$.
- si $t = 3\delta t$, $\mathcal{F}_{3\delta t} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Et on a évidemment $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_{\delta t} \subset \mathcal{F}_{2\delta t} \subset \mathcal{F}_{3\delta t}$. Cette suite croissante de tribus s'appelle la *filtration associée à la marche aléatoire* S .

1.3.3 Tribu associée à une v.a. et mesurabilité

De façon générale, si $X : \Omega \rightarrow R$ est une variable (ou un vecteur) aléatoire à valeurs dans $R = \mathbb{R}$ ou $R = \mathbb{R}^d$, on peut associer une partition \mathfrak{P}_X de Ω , en définissant, pour tout $\omega \in \Omega$, la partie $\bar{\omega}^X \in \mathfrak{P}_X$ contenant ω par

$$\bar{\omega}^X := \{\omega' \in \Omega \mid X(\omega') = x_\omega\}, \text{ où } x_\omega = X(\omega).$$

En d'autres termes, les éléments de \mathfrak{P}_X sont les $X^{-1}(x)$ pour $x \in X(\Omega)$. Cette partition, elle aussi, engendre une algèbre appelée *la tribu* de X et notée $\sigma(X)$; on a

$$\sigma(X) = \{A \in \mathcal{P}(\Omega) \mid \exists A' \in \mathcal{P}(R), A = X^{-1}(A')\}. \quad (1.2)$$

On retrouve \mathcal{F}_t^S on choisissant pour X le vecteur $X = (S_{\delta t}, S_{2\delta t}, \dots, S_{t-\delta t}, S_t)$, qui est un vecteur aléatoire à valeurs dans $R = \mathbb{R}^i$, où $t = i\delta t$.

On dira qu'une variable aléatoire Y est $\sigma(X)$ -mesurable si et seulement si Y est une fonction déterministe (g) de la grandeur X , avec $Y = g(X)$. Ainsi, dès lors que nous connaissons $X(\omega^*)$ nous connaissons aussi $Y(\omega^*) = g(X(\omega^*))$, où ω^* est l'élément (de Dieu seul connu...) de Ω qui indexe l'histoire que nous vivons (et vivrons) effectivement!

Définition : La variable aléatoire Y est dite *mesurable* par rapport à la tribu σ si elle est constante sur les atomes de σ .

Proposition 1.1 *La variable aléatoire Y est $\sigma(X)$ -mesurable si et seulement si il existe une fonction g définie sur $X(\Omega)$ telle que $Y = g(X)$.*

Preuve : Les atomes de $\sigma(X)$ sont les $X^{-1}(\{x\})$ pour $x \in X(\Omega)$. Supposons que Y est $\sigma(X)$ -mesurable et notons $\bar{\omega}$ l'atome de $\sigma(X)$ contenant ω . Soit $x \in X(\Omega)$ quelconque; donc $x = X(\omega_x)$ pour un $\omega_x \in \Omega$ au moins; Y est constante sur $\bar{\omega}_x$, donc $Y(\bar{\omega}_x) = \{y_x\}$; il suffit de poser $g(x) := y_x$.

Réciproquement, supposons que $Y = g(X)$; soit $\omega \in \Omega$ quelconque et $x_\omega := X(\omega)$. Par définition de $\bar{\omega}$, X est constante sur cet atome de $\sigma(X)$, donc $\forall \omega' \in \bar{\omega}$, $X(\omega') = X(\omega) = x_\omega$, et donc $Y(\omega') = g(X(\omega')) = g(x_\omega) = g(X(\omega)) = Y(\omega)$; donc Y est bien constante sur $\bar{\omega}$ ce qui, par définition, montre que Y est $\sigma(X)$ -mesurable. \square