


Ex.7.7 Voici l'énoncé : Soit f une fonction d'un espace mesuré (X, μ) dans \mathbb{R} , positive et intégrable. Montrer l'inégalité $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(f \geq n) \leq \int_X f$ où " $f \geq n$ " désigne l'ensemble $\{x \in X, f(x) \geq n\}$.

Voici scannée la réponse d'un étudiant. Est elle correcte ?
Manque t-il des précisions ?

Réflexion durant 1m 26s >

Je n'ai pas pu lire le scan (le PDF envoyé est une image scannée — je ne peux pas faire d'OCR dans cet environnement). Je vois bien le fichier que vous avez téléchargé  ex7-7, mais pas son contenu textuel. Pouvez-vous soit copier/coller la réponse de l'étudiant ici, soit envoyer un PDF texte (non scanné) ?

En attendant, voici la solution correcte et les points précis que l'on attend d'une bonne réponse — vous pouvez comparer cela avec la copie de l'étudiant.

Preuve courte et rigoureuse

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable, $f \geq 0$ et intégrable. Pour $x \in X$ on a pour tout entier $n \geq 1$ l'indicatrice

$$\mathbf{1}_{\{f(x) \geq n\}} = \begin{cases} 1 & \text{si } f(x) \geq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La somme $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{f(x) \geq n\}}$ est égale à l'entier $\lfloor f(x) \rfloor$ (la partie entière de $f(x)$) et donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{f(x) \geq n\}} = \lfloor f(x) \rfloor \leq f(x).$$

Les fonctions $\mathbf{1}_{\{f \geq n\}}$ sont mesurables et les sommes partielles $s_k(x) = \sum_{n=1}^k \mathbf{1}_{\{f(x) \geq n\}}$ forment une suite croissante de fonctions mesurables non négatives qui converge ponctuellement vers $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{f(x) \geq n\}}$. Par le théorème de convergence monotone (MCT) on peut échanger somme et intégrale :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{f \geq n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \mathbf{1}_{\{f \geq n\}} d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{f \geq n\}} d\mu \leq \int_X f d\mu.$$

C'est exactement l'inégalité cherchée.

Précisions attendues dans une copie correcte

- Mesurabilité** des ensembles $\{f \geq n\}$ (ou des indicatrices) doit être mentionnée ou utilisée implicitement puisque f est mesurable.
- Justification de l'échange somme \leftrightarrow intégrale** : citer le **théorème de convergence monotone** (ou au moins expliquer que les sommes partielles forment une suite croissante de fonctions non négatives).

3. **Identification de la somme pointwise** : préciser que $\sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{f(x) \geq n\}} = \lfloor f(x) \rfloor \leq f(x)$. (On peut aussi faire une preuve par cases: si $f(x) \in [k, k+1)$ alors la somme vaut k .)
4. **Hypothèse d'intégrabilité** sert à garantir que $\int_X f d\mu$ est finie (et que l'inégalité a un sens fini) — la preuve fonctionne localement même sans cette hypothèse, mais on la rappelle pour la pertinence de l'assertion.

Remarques additionnelles (optionnelles)

- On peut aussi donner la preuve via la représentation en « layer cake » : $\int_0^\infty \mu(\{f > t\}) dt = \int_X f d\mu$ et en remarquant que $\sum_{n=1}^\infty \mu(\{f \geq n\}) \leq \int_0^\infty \mu(\{f > t\}) dt$ (l'intégrale sur $[0, \infty)$ domine la somme par comparaison sur chaque intervalle $[n, n+1)$). Mais la preuve par indicatrices + MCT est la plus directe ici.

Si vous collez la réponse exacte de l'étudiant (ou m'envoyez un scan OCR-able), je la lirai et je dirai point par point si elle est correcte et ce qui manque.

Sources



Toujours avec l'hypothèse f intégrable, la suite $(\mu(\{f \geq n\}))_{n \geq 1}$ est bornée d'après l'inégalité de Markov. Tend-elle vers 0 ?

Réflexion durant 33s >

Bonne question — réponse en deux parties.

1. Bornitude (Markov).

Pour tout $n \geq 1$ l'inégalité de Markov donne

$$\mu(\{f \geq n\}) \leq \frac{1}{n} \int_X f d\mu,$$

donc

$$n \mu(\{f \geq n\}) \leq \int_X f d\mu.$$

Ainsi la suite $(n \mu(\{f \geq n\}))_{n \geq 1}$ est bien **bornée** par $\int_X f$.

2. Convergence vers 0 ? — pas en général.

La borne ci-dessus n'implique pas que $n \mu(\{f \geq n\}) \rightarrow 0$. Voici une construction explicite d'un contre-exemple (sur un espace discret) montrant que la suite peut avoir un **sous-suite** qui reste bornée en dessous par une constante $c > 0$.

Considérons $X = \mathbb{N}$ avec la mesure $\mu(\{k\}) = a_k$ et la fonction $f(k) = k$. Si l'on pose

$$S_n := \mu(\{f \geq n\}) = \sum_{k \geq n} a_k,$$

alors $\int_X f d\mu = \sum_{k \geq 1} k a_k = \sum_{n \geq 1} S_n$ (identité classique des séries). On peut donc choisir une suite décroissante $S_n \searrow 0$ telle que $\sum_n S_n < \infty$ (donc f est intégrable) mais pour laquelle $n S_n$ **ne tend pas vers 0** — par exemple en imposant, pour une suite d'indices $n_k \rightarrow \infty$,

$$S_n = \frac{c}{n_k} \quad \text{pour } n_k \leq n < n_{k+1},$$

avec les n_k choisis de sorte que $\sum_k (n_{k+1} - n_k) \frac{1}{n_k} < \infty$ (cela est possible en espaçant suffisamment rapidement les n_k). Alors $S_{n_k} = c/n_k$ et $n_k S_{n_k} = c$ pour tout k , donc la suite $n S_n$ n'a pas de limite 0 (elle a au moins $\limsup \geq c$). En posant $a_n = S_n - S_{n+1} \geq 0$ on obtient les masses atomiques souhaitées et la fonction $f(k) = k$ sur $(\mathbb{N}, (a_k))$ fournit un contre-exemple concret.

Donc, **en général non** : $n \mu(f \geq n)$ ne converge pas nécessairement vers 0.

3. Remarques suffisantes pour que ça tende vers 0.

Si on impose un moment d'ordre strictement supérieur à 1, alors la limite est 0. Par exemple si $f \in L^{1+\delta}$ pour un $\delta > 0$, alors par Markov appliqué à $f^{1+\delta}$

$$\mu(f \geq n) = \mu(f^{1+\delta} \geq n^{1+\delta}) \leq \frac{\int f^{1+\delta}}{n^{1+\delta}},$$

d'où

$$n \mu(f \geq n) \leq \frac{\int f^{1+\delta}}{n^\delta} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Autre remarque : on a déjà montré plus haut que $\sum_{n \geq 1} \mu(f \geq n) \leq \int f < \infty$. Cela force $\mu(f \geq n) = o(1)$ mais **n'est pas suffisant** pour forcer $n \mu(f \geq n) \rightarrow 0$ (voir le contre-exemple).

Si vous voulez, je peux écrire un exemple numérique complet et explicite (valeurs n_k , définition de S_n , calcul des a_n) pour rendre le contre-exemple complètement concret. Voulez-vous que je le fasse ?

