

L'intégrale impropre $\int_0^\infty \cos(x^3) dx$ est elle convergente ?

   < 2/2 >

Pour déterminer si l'intégrale impropre $\int_0^\infty \cos(x^3) dx$ converge, analysons-la en deux étapes :

1. Définir l'intégrale impropre

L'intégrale $\int_0^\infty \cos(x^3) dx$ est impropre car la borne supérieure est infinie. On l'écrit comme une limite :

$$\int_0^\infty \cos(x^3) dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \cos(x^3) dx.$$

2. Examiner la convergence

La fonction $\cos(x^3)$ est oscillante et ne tend pas vers 0 lorsque $x \rightarrow \infty$. Toutefois, il est possible que les oscillations s'annulent suffisamment pour permettre une convergence. Une méthode classique consiste à examiner si $\int \cos(x^3) dx$ a une limite finie.

Utilisons l'intégrale de comparaison avec une approche qualitative. Si $\cos(x^3)$ oscillait lentement ou se comportait comme une fonction décroissante enveloppée d'oscillations, il serait possible d'obtenir une convergence. Cependant, l'analyse plus rigoureuse montre que les oscillations de $\cos(x^3)$ ne décroissent pas suffisamment vite pour annuler l'effet des oscillations.

3. Test par une transformation

Une transformation par $u = x^3$ donne :

$$\int_0^\infty \cos(x^3) dx = \frac{1}{3} \int_0^\infty u^{-2/3} \cos(u) du.$$

L'intégrale $\int_0^\infty u^{-2/3} \cos(u) du$ est également impropre. Elle diverge parce que la décroissance en $u^{-2/3}$ n'est pas suffisante pour compenser les oscillations de $\cos(u)$.

Conclusion

L'intégrale $\int_0^\infty \cos(x^3) dx$ **diverge**.

     ...

Peux tu donner un équivalent simple de $\int_0^t \cos(x^3) dx$ lorsque t tend vers $+\infty$?

Pour trouver un équivalent simple de $\int_0^t \cos(x^3) dx$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, analysons la croissance de cette intégrale en utilisant des outils asymptotiques.

Étapes de l'analyse

1. Structure de l'intégrale

L'intégrale $\int_0^t \cos(x^3) dx$ est oscillante, mais ses oscillations s'amortissent en moyenne sur de longues périodes. Ces oscillations sont principalement dictées par le terme $\cos(x^3)$.

2. Transformation de phase rapide

Étudions le comportement en grandes valeurs de t . En posant $F(t) = \int_0^t \cos(x^3) dx$, nous savons que :

$$F'(t) = \cos(t^3).$$

Les oscillations de $\cos(t^3)$ rendent $F(t)$ dépendant de la vitesse d'annulation des contributions positives et négatives.

3. Approche par la méthode de la phase stationnaire

Le comportement asymptotique des intégrales oscillantes comme celle-ci est souvent gouverné par les propriétés de la fonction de phase x^3 . Un outil utile est d'étudier le lien entre la dérivée de la phase rapide et l'accumulation de ses oscillations :

$$F(t) \sim \frac{\sin(t^3)}{t^3}.$$

Cela s'explique par le fait que l'enveloppe de l'intégrale est dominée par les termes oscillants lents au voisinage de grandes valeurs de t .

Résultat final

Un équivalent simple pour $\int_0^t \cos(x^3) dx$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ est donné par :

$$\int_0^t \cos(x^3) dx \sim \frac{\sin(t^3)}{3t^2}.$$

Cela montre que $F(t)$ oscille avec une amplitude décroissante en t^{-2} .



Cela n'implique-t-il pas que l'intégrale impropre converge ?

C'est une excellente question ! Revenons sur les détails pour clarifier pourquoi l'intégrale impropre $\int_0^\infty \cos(x^3) dx$ **ne converge pas**, malgré le fait que son intégrale partielle $\int_0^t \cos(x^3) dx$ décroît asymptotiquement comme $\frac{\sin(t^3)}{3t^2}$.

Différence entre intégrales impropres et comportement asymptotique

1. Convergence d'une intégrale impropre

Pour qu'une intégrale impropre converge, il faut que la limite de l'intégrale partielle existe lorsque $t \rightarrow \infty$, c'est-à-dire que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \cos(x^3) dx$$

soit finie. Cela implique que les oscillations doivent "s'annuler complètement" à l'infini.

2. Asymptotique $\sim \frac{\sin(t^3)}{3t^2}$

L'équivalent asymptotique $\int_0^t \cos(x^3) dx \sim \frac{\sin(t^3)}{3t^2}$ montre que l'intégrale partielle oscille indéfiniment, avec une amplitude décroissante comme $\frac{1}{t^2}$. Cependant :

- Bien que l'amplitude diminue avec t , la présence d'oscillations persistantes ($\sin(t^3)$) signifie que l'intégrale **ne tend pas vers une limite finie**.
- Ainsi, l'intégrale impropre diverge.

Résumé

- **L'équivalent asymptotique** $\int_0^t \cos(x^3) dx \sim \frac{\sin(t^3)}{3t^2}$ montre que l'intégrale partielle oscille avec une amplitude décroissante.
- **L'intégrale impropre** $\int_0^\infty \cos(x^3) dx$ diverge, car les oscillations ne s'annulent pas complètement et n'ont pas de limite finie.

La décroissance de l'amplitude n'est pas suffisante pour garantir la convergence de l'intégrale impropre.



Que penses tu aujourd'hui de ta réponse ci-dessus à la question tout en haut sur la convergence de $\int_0^\infty \cos(x^3) dx$?

Réflexion durant 23s >

Bonne question — merci de l'avoir posée. En y regardant **aujourd'hui** ma réponse initiale (où j'affirmais que $\int_0^\infty \cos(x^3) dx$ diverge) était **incorrecte**. Je corrige et explique ci-dessous.

Correction — convergence

Posons $u = x^3$. Alors $x = u^{1/3}$, $dx = \frac{1}{3}u^{-2/3} du$ et

$$\int_0^\infty \cos(x^3) dx = \frac{1}{3} \int_0^\infty u^{-2/3} \cos u du.$$

La fonction $u \mapsto u^{-2/3}$ est monotone décroissante et tend vers 0 quand $u \rightarrow \infty$. Par le **test de Dirichlet** pour les intégrales impropres oscillantes (ou simplement par intégration par parties adaptée), l'intégrale $\int_1^\infty u^{-2/3} \cos u du$ converge. Le

comportement au voisinage de 0 est aussi intégrable (exposant $-2/3 > -1$). Donc l'intégrale impropre converge (de manière conditionnelle).

Valeur explicite

On peut utiliser la formule de la transformée de Mellin :

$$\int_0^{\infty} u^{s-1} \cos u \, du = \Gamma(s) \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \quad (0 < s < 1).$$

Ici $u^{-2/3} = u^{s-1}$ avec $s = 1/3$. Donc

$$\int_0^{\infty} \cos(x^3) \, dx = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right).$$

Remarque sur l'asymptotique des intégrales partielles

Si $F(t) = \int_0^t \cos(x^3) \, dx$, on a $F'(t) = \cos(t^3)$. Une expansion par parties montre que pour $t \rightarrow \infty$

$$F(t) = L + \frac{\sin(t^3)}{3t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

où $L = \int_0^{\infty} \cos(x^3) \, dx = \frac{\sqrt{3}}{6} \Gamma(1/3)$.

Ainsi les parties oscillantes décroissent comme t^{-2} autour de la limite L . Cela explique l'erreur précédente : l'existence d'un terme en $\sin(t^3)/(3t^2)$ **n'empêche pas** l'existence d'une limite finie — en fait $F(t)$ tend vers L et les oscillations s'amortissent autour de cette limite.

Encore désolé pour l'erreur initiale — la bonne conclusion : **l'intégrale converge** et vaut $\frac{\sqrt{3}}{6} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$. Si tu veux, je peux fournir une démonstration détaillée par parties qui donne l'asymptotique $F(t) = L + \frac{\sin(t^3)}{3t^2} + o(1/t^2)$.

