Fibrés vectoriels sur les sphères

Exercice 1 - Soient $n \geq 1$ un entier et ξ un fibré vectoriel sur la sphère S^n. Montrer que la restriction de ξ à l'équateur $\mathrm{S}^{n-1} \subset \mathrm{S}^n$ est trivialisable.

Exercice 2 - Soit $d \geq 1$ un entier. Montrer que l'ensemble $\mathrm{Vect}_d(\mathrm{S}^1)$ des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels réels de rang d sur le cercle S^1 a deux éléments, dont on donnera des représentants.

Exercice 3 - Soit $n \geq 2$ un entier. Montrer que tout fibré en droite réel sur la sphère S^n est trivialisable.

Exercice 4 - Etablir une bijection entre l'ensemble $\mathrm{Vect}_1^{\mathbf{C}}(\mathrm{S}^2)$ des classes d'isomorphisme de fibrés en droite complexes au-dessus de S^2 et les entiers relatifs $\mathbf{Z}$.
Quelle est l'application $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ associée à

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Vect}_1^{\mathbf{C}}(\mathrm{S}^2) \times \mathrm{Vect}_1^{\mathbf{C}}(\mathrm{S}^2) & \to & \mathrm{Vect}_1^{\mathbf{C}}(\mathrm{S}^2) \\ (\lambda_1, \lambda_2) & \mapsto & \lambda_1 \otimes \lambda_2 \end{array}$$

Quels sont les entiers associés aux fibrés $\mathcal{O}(i)$ définis précédemment [1] sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \simeq \mathrm{S}^2$.

Exercice 5 - Soit ξ un fibré réel de rang 2 au-dessus d'une base B. On suppose que ξ admet une structure complexe : il existe un fibré en droite *complexe* dont le fibré réel sous-jacent est isomorphe à ξ.
Montrer que ξ est trivial si et seulement s'il admet une section jamais nulle.
Retrouver qu'il n'existe pas de champ de vecteurs jamais nul sur la sphère S^2.

Exercice 6 - Soient ξ_1 et ξ_2 deux fibrés vectoriels sur la sphère S^n ($n \geq 2$) et soient $\varphi_1 : \mathrm{S}^{n-1} \to \mathrm{GL}(d_1)$, $\varphi_2 : \mathrm{S}^{n-1} \to \mathrm{GL}(d_2)$ "les" applications d'attachement associées. Donner des applications d'attachement pour les fibrés $\xi_1 \oplus \xi_2$, $\xi_1 \otimes \xi_2$, ξ_1^*, $\mathcal{H}om(\xi_1, \xi_2)$.
Quels sont les fibrés réels ξ de rang 2 sur S^2 tels que $\xi \oplus \varepsilon \simeq \varepsilon^3$?
[**Indication:** L'espace $\mathrm{SO}(3)$ est homéomorphe à $\mathbf{P}^3(\mathbf{R})$. En particulier, $\pi_1(\mathrm{SO}(3), \mathrm{id}) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.]
Montrer que le fibré $\mathcal{H}om(\tau_{\mathrm{S}^2}, \tau_{\mathrm{S}^2})$ est trivialisable.
[**Indication:** Le morphisme $\pi_1(\mathrm{SO}(3), \mathrm{id}) \to \pi_1(\mathrm{SO}(4), \mathrm{id})$ est surjectif. En particulier, tout élément de $\pi_1(\mathrm{SO}(4), \mathrm{id})$ est de 2-torsion.]

Exercice 7 - Soient k un corps et E et F des k–espaces vectoriels de dimension finie. On note E^* l'espace vectoriel dual. Montrer que l'application canonique

$$\begin{array}{ccc} E^* \otimes F & \to & \mathrm{Hom}(E, F) \\ \varphi \otimes f & \mapsto & (e \mapsto \varphi(e) \cdot f) \end{array}$$

est un isomorphisme de k-espaces vectoriels.
Soit ξ et η deux fibrés vectoriels (réels ou complexes) au-dessus d'un même espace de base B. Montrer que les fibrés $\mathcal{H}om(\xi, \eta)$ et $\xi^* \otimes \eta$ sont isomorphes.

1. *c.f.* feuille 2, exercice 7

Exercice 8 - Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On note $\overline{E}$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel conjugué [2]. Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} E\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C} & \to & E\oplus\overline{E} \\ e\otimes z & \mapsto & (z\cdot e,\overline{z}\cdot e) \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathbf{C}$–espaces vectoriels.
Soit ξ un fibré vectoriel complexe sur une base X. Montrer que l'on a un isomorphisme $\xi\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}\simeq\xi\oplus\overline{\xi}$.

Exercice 9 - [**Fibrés euclidiens/ hermitiens**]
Soit B un espace topologique et ξ un fibré vectoriel réel (resp. complexe) au-dessus de B. Par définition, munir ξ d'une structure euclidienne (resp. hermitienne) c'est se donner une application continue $q : E(\xi)\to\mathbf{R}$ dont la restriction à chaque fibre $E(\xi)_b$ est une forme quadratique définie positive (resp. une forme hermitienne définie positive).

1. On suppose B compact. En utilisant des partitions de l'unité, montrer que tout fibré réel (resp. complexe) ξ admet une structure euclidienne (resp. hermitienne).
2. Soient (ξ,q) un fibré vectoriel euclidien (resp. hermitien). On suppose que ξ est trivialisable (en oubliant q). Montrer que (ξ,q) est aussi trivialisable.
3. Soit μ un sous-fibré vectoriel de ξ au-dessus d'une base B compacte. Montrer que μ est un facteur direct de ξ.
   [**Indication:** Munir ξ d'une strucutre euclidienne ou riemannienne et montrer que $\xi\simeq\mu\oplus\mu^{\perp}$.]
4. Montrer qu'un fibré réel (resp. complexe) au-dessus d'une base compacte B est isomorphe à son dual (resp. au conjugué de son dual).
5. Soit λ un fibré *en droite* réel (resp. complexe) au-dessus d'une base B compacte. Montrer que $\lambda\otimes\lambda$ (resp. $\overline{\lambda}\otimes\lambda$) est trivialisable.
   [**Indication:** Utiliser 4) et l'exercice 7].

Exercice 10 - Soit X un espace topologique compact connexe. Notons Y l'espace topologique quotient :

$$Y := X\times[-1,1]\Big/\begin{pmatrix} (x,1)\sim(x',1) & \forall(x,x')\in X^2 \\ (x,-1)\sim(x',-1) & \forall(x,x')\in X^2 \end{pmatrix}$$

On note $q : X\times[-1,1]\to Y$ l'application canonique de passage au quotient, $Y_+ := q(X\times[0,1])$ et $Y_- := q(X\times[-1,0])$.
Montrer que Y_+ et Y_- sont des espaces compacts contractiles. En déduire une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels complexes de rang d et de base Y et l'esnsemble $[X,\mathrm{GL}_d(\mathbf{C})]$ des classes d'homotopie d'applications de X dans $\mathrm{GL}_d(\mathbf{C})$. Analogue pour les fibrés réels ?

Exercice 11 - Soient G un groupe topologique et X un espace topologique connexe. On note e le neutre de G, x_0 un point de X, $[X,G]$ (resp. $[(X,x_0),(G,e)]_*$) l'ensemble des classes d'homotopie d'applications $X\to G$ (resp. les classes d'homotopie pointée d'applications $X\to G$, $x_0\mapsto e$).
Montrer que l'application d'"oubli" : $[(X,x_0);(G,e)]\to[X,G]$ est une bijection.

2. Par définition, $\forall z\in\mathbf{C}$, $\forall e\in E$, $z\bar{\cdot}e := \overline{z}\cdot e$.