M2 Math – Fibrés topologiques & algébriques – 2011-12

Feuille d'exercices 4 : Modules projectifs, compléments sur les modules de présentation finie.

Dans toute la suite A est un anneau commutatif.

1. Soit P un A-module. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe un module libre L et un idempotent $p : L \to L$ tel que M soit isomorphe à $\mathrm{Im}(p)$.

(ii) Pour tout morphisme surjectif de A-modules $M \to N$ l'application $\mathrm{Hom}_A(P, M) \to \mathrm{Hom}_A(P, N)$ est surjective.

(iii) Tout morphisme surjectif $M \to P$ admet une section.

2. Soit S un ensemble infini et prenons pour A l'anneau des applications de S dans $\mathbb{F}_2$. Montrer que si $\mathfrak{m}$ est un idéal premier de A alors $A/\mathfrak{m}$ est le corps $\mathbb{F}_2$ puis $A_\mathfrak{m} = \mathbb{F}_2$. (Indication : il existe un unique homomorphisme d'anneaux $A_\mathfrak{m} \to \mathbb{F}_2$. Soit $x \in A_\mathfrak{m}$; on a $x^2 = x$ d'où un isomorphisme d'anneaux $A_\mathfrak{m} \to xA_\mathfrak{m} \times (1-x)A_\mathfrak{m}$. Si x et $1-x$ sont distincts de 0 on obtiendrait l'existence d'au moins deux homomorphismes $A_\mathfrak{m} \to \mathbb{F}_2$.)

En déduire que tout A-module est localement libre.

Notons I l'idéal formé des applications $S \to \mathbb{F}_2$ à support fini. Montrer que le quotient A/I n'est pas un A-module de présenation finie (bien qu'il soit localement libre de type fini). En particulier A/I n'est pas un A-module projectif.

Le A-module I est il projectif ?

3. Soit M un groupe abélien vérifiant $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \otimes_\mathbb{Z} M$, resp. $\mathbb{Z}[\frac{1}{3}] \otimes_\mathbb{Z} M$, est un $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$-module, resp. $\mathbb{Z}[\frac{1}{3}]$-module, de type fini. Montrer que M est de type fini.

Plus généralement soient A un anneau, $f_1, \ldots, f_n$ des éléments de A engendrant l'idéal A et M un A-module. On suppose que pour tout i le $A[\frac{1}{f_i}]$-module $A[\frac{1}{f_i}] \otimes_A M$ est de type fini. Montrer que M est un A-module de type fini.

On suppose maintenant que pour tout i le $A[\frac{1}{f_i}]$-module $A[\frac{1}{f_i}] \otimes_A M$ est de présentation finie. Montrer que M est un A-module de présentation finie.

4. Soit M un A-module et $p : M \to M$ un idempotent. Vérifier qu'on a $\mathrm{im}(p) = \ker(\mathrm{id} - p)$ et que $(p, \mathrm{id} - p) : M \to \mathrm{im}(p) \times \ker(p)$ est un isomorphisme. *Généralisation à une catégorie additive (telle que la catégorie des fibrés vectoriels au dessus d'un espace topologique X fixé) ?

5. Soient M et M' deux A-modules, p et q des idempotents de M et M' respectivement. Montrer que le A-module $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{im}(p), \mathrm{im}(q))$ s'identifie à l'image d'un idempotent défini sur le A-module $\mathrm{Hom}_A(M, M')$ en termes de p et q.

*Généralisation à une catégorie additive ?

6. Montrer que toute famille de $n+1$-vecteurs de A^n est liée. Plus généralement montrer que si $P \in \mathrm{M}_n(A)$ est une matrice vérifiant $\det(P) = 0$ alors $\ker(P)$ est non trivial.

7. On suppose l'anneau A principal. Soient n un entier et M un sous-module de A^n. Montrer que si $M \neq 0$ il existe une forme linéaire $M \to A$ non nulle. Montrer que si $M \neq 0$ il existe $m \in M$ et $\varphi \in M^*$ tels que $\varphi(m) = 1$. On définit le rang de M comme la dimension de $K \otimes_A M$ où K est le corps de fraction de A (A est intègre). Montrer par récurrence sur le rang de M que M est un A-module libre.

En déduire que si $P \in \mathrm{M}_n(A)$ est une matrice vérifiant $P^2 = P$ alors P est diagonalisable. Peut on digonaliser P de façon algorithmique ?

8. On suppose l'anneau A factoriel (en particulier intègre) et on note K son corps de fraction. Soit $P \in \mathrm{M}_n(A)$ une matrice vérifiant P est de rang 1 comme matrice de $\mathrm{M}_n(K)$ et $P^2 = P$. Montrer qu'il existe des familles $(a_i), (b_i) \in A^n$ et un élément $d \in A$ tels que P vu dans $\mathrm{M}_n(K)$ soit la matrice $(\frac{a_i b_j}{d})_{i,j}$, puis, en utilisant la factorialité de A, qu'on peut supposer $d = 1$. Montrer que la somme des colonnes de P engendre l'image de P de sorte que l'image de P est un A-module libre.

En déduire que si M est un A-module projectif de type fini tel que $K \otimes_A M$ est de dimension 1 alors M est un A module libre de dimension 1. Peut on supprimer l'hypothèse M de type fini ?

9. Soit M un A-module. On suppose qu'il existe un entier n tel que $M \oplus A^n \simeq A^{n+1}$. Montrer qu'on a $M \simeq A$.

Indication : soit p le projecteur de A^{n+1} d'image isomorphe à M ; observer que la somme des images par p des vecteurs de la base canonique de A^{n+1} engendre $\mathrm{im}(p)$ localement.

Plus généralement soit M un A-module vérifiant les deux conditions :
– $\exists n \in \mathbb{N}, M \oplus A^n$ est libre,
– $\forall \mathfrak{m}$ idéal maximal de $A, M_{\mathfrak{m}} \simeq A_{\mathfrak{m}}$
alors $M \simeq A$.

Comment ces deux énoncés se traduisent ils pour les fibrés vectoriels sur un espace compact ?