Sous-variétés de R^n et fibrés vectoriels

Exercice 1 - Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ est une sous-variété lisse de $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$. Donner sa dimension ainsi que l'espace tangent en chaque point.

Exercice 2 - Soit $M \subset \mathbf{R}^n$ une sous variété lisse. Montrer que le fibré vectoriel $\tau_M \oplus \nu_M$ est isomorphe au fibré trivial ε^n.

Exercice 3 - Soit $M \subset \mathbf{R}^n$ une sous-variété lisse de dimension p. Montrer que l'espace total du fibré tangent τ_M (resp. du fibré normal ν_M) est une sous-variété lisse de $\mathbf{R}^{2n}$.
Quelle est (à isomorphisme près) la restriction à M du fibré tangent de $E(\tau_M)$? de $E(\nu_M)$?

Exercice 4 - Soit ξ un fibré de rang $n \geq 0$ au-dessus d'une base B. Montrer que ξ est isomorphe au fibré trivial ε^n si et seulement s'il existe n sections $s_1, \ldots, s_n : B \to E(\xi)$ linéairement indépendantes en tout point.

Exercice 5 - Soient $M \subset \mathbf{R}^m$ et $N \subset \mathbf{R}^n$ deux sous-variétés lisses. Montrer que $M \times N$ est une sous-variété lisse de $\mathbf{R}^{m+n}$.
Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, le fibré tangent $\tau_{\mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^n}$ est trivial.

Exercice 6 - Soit X l'espace topologique quotient $[0,1]/(0 \sim 1)$. Montrer que X est homéomorphe au cercle S^1.
Soit μ le fibré de Möbius :

$$\begin{array}{c} E(\mu) := [0,1] \times \mathbf{R}/(0,t) \sim (1,-t) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle (x,t) \mapsto x} \\ X \end{array}$$

Vérifier que μ est un fibré vectoriel et montrer qu'il n'est pas isomorphe au fibré trivial.
Montrer que $\mu \oplus \mu$ est isomorphe au fibré trivial ε^2.
Le fibré $\mu \oplus \varepsilon$ est-il isomorphe au fibré trivial ε^2 ? Existe-t-il un entier $n \geq 0$ tel que $\mu \oplus \varepsilon^n$ soit isomorphe à ε^{n+1}.

Exercice 7 - Soit $n \geq 1$ un entier. On rappelle que $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ désigne l'espace topologique quotient

$$\mathbf{R}^{n+1} - \{0\} / \left[(x_0, \ldots, x_n) \sim (\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n)\ \forall \lambda \in \mathbf{R}^\times\right].$$

Montrer que $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ est compact.
Pour tout entier relatif $i \in \mathbf{Z}$, soit $\mathcal{O}(i)$ l'espace topologique quotient :

$$\mathcal{O}(i) := \mathbf{R}^{n+1} - \{0\} \times \mathbf{R} / \left[(x_0, \ldots, x_n, u) \sim (\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n, \lambda^i u)\ \forall \lambda \in \mathbf{R}^\times\right].$$

Montrer que la projection $\mathcal{O}(i) \to \mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ est un fibré vectoriel et reconnaître le fibré vectoriel $\mathcal{O}(1)$ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{R}) \simeq \mathrm{S}^1$.

Exercice 8 - Soit $f : Y \to X$ une application continue. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, le fibré $f^*(\varepsilon^n)$ est trivial.
Réciproquement, si ξ est un fibré vectoriel sur X tel que $f^*(\xi)$ soit trivial, le fibré ξ est-il nécessairement trivial ?

Exercice 9 - Soient $\xi_1 = (E_1 \xrightarrow{\pi_1} B_1)$, $\xi_2 = (E_2 \xrightarrow{\pi_2} B_2)$ deux fibrés vectoriels et $f : \xi_1 \to \xi_2$ un morphisme de fibrés. On suppose que pour tout $b_1 \in B_1$, l'application induite sur les fibres $f_{b_1} : E_{1,b_1} \to E_{2,f(b_1)}$ est un isomorphisme. Montrer alors l'isomorphisme de fibrés (de base B_1) $\xi_1 \simeq f^*(\xi_2)$.

Exercice 10 - Soit $n \geq 1$ un entier. On rappelle qu'un champ de vecteur sur S^n est une section du fibré tangent.
Montrer que si n est impair alors il existe[1] un champ de vecteur partout non nul sur S^n.

Exercice 11 - Soit $n \geq 1$ un entier. Une structure d'algèbre à division sur $\mathbf{R}^n$ est la donnée d'un produit

$$\mu : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$$

tel que pour tout $a \in \mathbf{R}^n$, les applications $x \mapsto \mu(a, x)$ et $x \mapsto \mu(x, a)$ soient linéaires et inversibles si $a \neq 0$. (L'application μ n'est supposée ni commutative, ni même associative).
Montrer que si $\mathbf{R}^n$ admet une structure d'algèbre à division alors le fibré tangent $\tau_{\mathrm{S}^{n-1}}$ est trivial.
En déduire que le fibré tangent des sphères S^0, S^1, S^3 et S^7 sont triviaux[2].

Exercice 12 - Soient $U \subset \mathbf{R}^m$ un ouvert, $N \subset \mathbf{R}^n$ une sous-variété lisse et $f : U \to \mathbf{R}^n$ une application lisse. On suppose qu'en tout point $x \in f^{-1}(N)$ la condition suivante (dite de *transversalité*) est satisfaite :

$$\operatorname{Im} \mathrm{d}f_x + \tau_{f(x)} N = \mathbf{R}^n.$$

Montrer qu'alors $M := f^{-1}(N)$ est une sous-variété de R^m et que l'application $\mathrm{d}f$ induit un morphisme $\nu_M \to \nu_N$ entre les fibrés normaux. En déduire un isomorphisme de fibrés vectoriels $\nu_M \simeq f^*(\nu_N)$.
Cas particulier : montrer que si une sous-variété $M \subset \mathbf{R}^m$ peut-être définie par une équation "globale" (*i.e.* par $M = g^{-1}(0)$, avec $g : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^{m-p}$ de différentielle partout surjective) alors le fibré normal de M est trivial.

Exercice 13 - Soient X un espace topologique et $\lambda = (E \xrightarrow{\pi} B)$ un fibré en droite *euclidien*. On note $S(\lambda)$ le sous-espace de $E(\lambda)$ formé des vecteurs de norme 1 (on dit que $S(\lambda)$ est le fibré en sphère de λ). Montrer que $S(\lambda) \xrightarrow{\pi} B$ est un revêtement double.
Réciproquement, à tout revêtement double $S \xrightarrow{\pi} B$, on associe l'espace topologique quotient

$$E := S \times \mathbf{R}/(x, t) \sim (\sigma(x), -t)$$

où σ désigne l'involution canonique de S. Montrer que π induit une application $E \to B$ qui est un fibré vectoriel.

1. Pour tout entier $n \geq 2$, soit $\rho(n)$ la borne supérieure des entiers r tels qu'il existe r champs de vecteurs sur S^{n-1} linéairement indépendants en tout point. On écrit $n = 2^{4a+b}(2c+1)$ avec a, b et c dans $\mathbb{N}$ et $0 \leq b < 4$ et on pose $\sigma(n) = 2^b + 8a - 1$. Des arguments d'algèbre linéaire (subtils pour n général !) montrent que l'on a $\rho(n) \geq \sigma(n)$. J. F. Adams a montré en 1962, par des arguments de topologie algébrique, que l'on a $\rho(n) = \sigma(n)$.

2. En fait, on peut montrer que réciproquement ce sont les seules sphères dont les fibrés tangents sont triviaux.