

Durée : 1h30 – calculatrice et documents interdits

Justifier correctement chaque réponse.

1. On considère un jeu à deux joueurs à somme nulle. On connaît le gain garanti optimal \underline{g} du joueur 1 et la majoration optimale de la perte \bar{g} du joueur 2 : $\underline{g} = -2$ et $\bar{g} = 0$. Les joueurs ont choisi leurs stratégies et le joueur 1 obtient le gain 0 à l'issue du jeu. Peut-on conclure pour le joueur 1 et pour le joueur 2 qu'il regrette ou ne regrette pas son choix ? Expliquez (seule l'explication est notée).

2. On considère le jeu à deux joueurs à somme nulle suivant : $X = Y = [0, 1]$, $g(x, y) = e^y - y(x - \frac{1}{2})^2$ (paiement du premier joueur).

Montrer que l'un des joueurs a une stratégie dominante. Le jeu admet-il un équilibre ? Si oui quels sont les équilibres ?

3. On découvre que la stratégie mixte $(\frac{2}{3}, 0, 0, \frac{1}{3})$ du joueur 1 est prudente pour l'extension mixte du jeu de matrice de paiement

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{3}{2} & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la valeur de l'extension mixte du jeu ?

4. On considère le jeu matriciel de matrice de paiement

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Le jeu admet-il un équilibre en stratégies pures ? Le jeu en stratégies pures a-t-il des stratégies dominées ? strictement dominées ?

b. Quelles sont les stratégies mixtes prudentes du joueur 1 ? Expliquez.

c. Quelle est la valeur de l'extension mixte du jeu ?

d. Quels sont les équilibres de l'extension mixte du jeu ?

e. On considère maintenant le jeu matriciel

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{4} \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que la stratégie pure 2 du joueur 1 est dominée au sens large dans l'extension mixte du jeu. Qu'en déduit-on sur les équilibres de l'extension mixte du jeu ?

f. Quels sont les équilibres de l'extension mixte du jeu ci dessus ?