L2 MASS - option Théorie des jeux **Interrogation 2** **2 décembre 2011**

Durée : 40mn – calculatrice et documents interdits

Nom : **Prénom :**

Justifier correctement chaque réponse.

1. On considère un jeu à deux joueurs à somme nulle $(X, Y, g : X \times Y \to \mathbb{R})$ (X est l'ensemble des stratégies du joueur 1, Y est l'ensemble des stratégies du joueur 2, g la fonction de paiement du joueur 1). On note $\underline{g}$ le gain garanti optimal du joueur 1, $\overline{g}$ la majoration optimale de la perte du joueur 2.

Le joueur 1 choisit une stratégie x et le joueur 2 une stratégie y. Dans chacune des situations suivantes indiquez si on peut conclure que le joueur 1 regrette ou au contraire ne regrette pas son choix. Expliquez

a) $\underline{g} = 0, \quad \overline{g} = 1, \quad g(x, y) = 0.5$

b) $\underline{g} = 0, \quad \overline{g} = 1, \quad g(x, y) = 0$

c) $\underline{g} = 0, \quad \overline{g} = 1, \quad g(x, y) = 1$

d) $\underline{g} = 0, \quad \overline{g} = 0, \quad g(x, y) = 0$

a) $g(x,y) < \overline{g}$ donc J2 perd moins que ce qui lui est garanti donc J1 regrette son choix

b) même conclusion pour la même raison

c) On ne peut conclure : rien n'indique que J1 regrette, rien n'indique par ailleurs que J2 joue prudemment donc que J1 ne regrette pas

d) Même conclusion qu'en (c) : J1 regrette si et seulement si J2 joue non prudemment ce qu'on ne sait pas.

2. On considère le jeu de matrice de paiement $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

a. Avec quelle fréquence la ligne 1 est elle jouée si le jeu est répété un grand nombre de fois et si le joueur 1 choisit la stratégie mixte $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$?

b. Quel est le gain moyen du joueur 1 s'il joue la stratégie mixte $(0, 1)$ et si le joueur 2 joue la stratégie mixte $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$?

c. Quel est le plus petit gain moyen du joueur 1 s'il joue la stratégie mixte $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$?

d. Quelles sont les meilleures réponses (en stratégies mixtes) du joueur 2 à la stratégie mixte $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ du joueur 1 ?

e. Quelles sont les stratégies mixtes prudentes du joueur 1 ?

f. La stratégie mixte $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ du joueur 2 est elle prudente ?

g. Les couples formés d'une stratégie mixte prudente du joueur 1 et d'une meilleure réponse à cette stratégie par le joueur 2 sont ils tous des équilibres de l'extension mixte du jeu ?

a) Avec fréquence $\frac{1}{3}$: une fois sur trois en moyenne.

b) $G((0,1),(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2})) = \frac{1}{4}\times 1 + \frac{1}{4}\times 2 + \frac{1}{2}\times 4 = \frac{11}{4}$

c) On cherche $\inf_{(q_j)\in\Delta_3} G((\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(q_j)) = \min\{G((\frac{1}{2},\frac{1}{2}),e_1), G((\frac{1}{2},\frac{1}{2}),e_2), G((\frac{1}{2},\frac{1}{2}),e_3)\}$ car $(q_j)\mapsto G((\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(q_j))$

et

est affine et Δ_3 est un convexe fermé borné de coins e_1, e_2, e_3

$= \min\{\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{2}\times 1, \frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times 2, \frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{2}\times 4\} = \min\{\frac{3}{2},\frac{3}{2},2\} = \frac{3}{2}$

d) Les meilleures réponses de J2 sont les triplets $(q_j)\in\Delta_3$ minimisant $G((\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(q_j))$. D'après le cours ce sont les éléments de la partie convexe C de Δ_3 dont les coins sont les éléments de $\{e_1,e_2,e_3\}$ où $G((\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(q_j))$ est minimale.

D'après (c) les éléments en question sont e_1 et e_2 donc $C = [e_1,e_2] = \{\lambda e_1 + (1-\lambda)e_2, \lambda\in[0,1]\} = \{(\lambda,1-\lambda,0), \lambda\in[0,1]\}$

Les meilleures réponses de J2 sont donc les triplets de la forme $(\lambda, 1-\lambda, 0)$, $\lambda\in[0,1]$

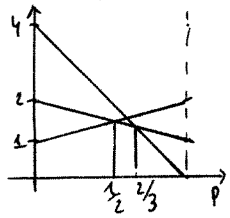
e) En jouant $(p,1-p)$, J1 craint le plus petit gain moyen $\inf_{(q_j)} G((p,1-p),(q_j)) = \min\{G((p,1-p),e_1), G((p,1-p),e_2), G((p,1-p),e_3)\}$

$= \min\{p+2(1-p), 2p+(1-p), 4(1-p)\}$

Notons $f(p)$ ce plus petit gain moyen. f est affine sur les segments de $[0,1]$ délimités par 0, 1 et les p réalisant une égalité entre deux des expressions $p+2(1-p)$, $2p+1-p$, $4(1-p)$.

$p+2(1-p) = 2p+(1-p) \iff p=\frac{1}{2}$; $p+2(1-p) = 4(1-p) \iff p=\frac{2}{3}$; $2p+(1-p) = 4(1-p) \iff p = \frac{3}{5}$

Dessin :



On voit que f est croissante sur $[0,\frac{1}{2}]$, décroissante sur $[\frac{1}{2},\frac{2}{3}]$ et $[\frac{2}{3},1]$

En jouant prudemment, J1 joue p maximisant f donc $p=\frac{1}{2}$

Autre méthode : on peut chercher p parmi $0, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, 1$ en comparant $f(0), f(\frac{1}{2}), f(\frac{3}{5}), f(\frac{2}{3}), f(1)$ puis raisonner comme en (d)

Conclusion : $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ est la seule stratégie mixte prudente de J1

f) On a $\bar{G} = \inf_{(q_j)} G((\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(q_j))$ puisque, si (q_j) est prudente, $((\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(q_j))$ est un équilibre. Donc $\bar{G} = \frac{3}{2}$ d'après (c)

En jouant $(\frac{2}{3},\frac{1}{3},0)$ J2 risque de perdre $G((1,0),(\frac{2}{3},\frac{1}{3},0)) = 2\times\frac{2}{3}+1\times\frac{1}{3} = \frac{5}{3} > \frac{3}{2} = \bar{G}$ donc $(\frac{2}{3},\frac{1}{3},0)$ n'est pas prudent

g) D'après (d) $(\frac{2}{3},\frac{1}{3},0)$ est une meilleure réponse de J2 à la stratégie mixte prudente $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ de J1 mais elle n'est pas prudente d'après (f) donc $((\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{2}{3},\frac{1}{3},0))$ n'est pas un équilibre.