

Durée : une heure – calculatrice et documents interdits

Justifier correctement chaque réponse.

1.

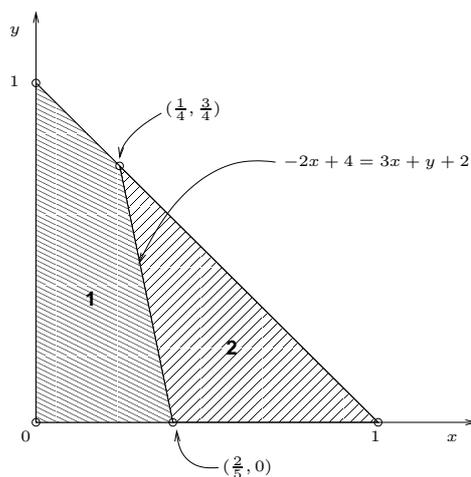
a. Soit f une fonction affine de l'intervalle $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} . On connaît $f(0) = -2$ et $f(1) = -3$. Que peut on dire de $\sup_{x \in [0,1]} f(x)$ (i.e. connaît on sa valeur) ? Que peut on dire de l'ensemble des $x \in [0, 1]$ où f est maximale ?

b. f est une fonction affine du triangle plein $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 1\}$. On connaît $f(0, 0) = 2$, $f(0, 1) = \frac{3}{2}$ et $f(1, 0) = \frac{3}{2}$. Que peut on dire de $\inf_{(x,y) \in \Delta} f(x, y)$? Que peut on dire de l'ensemble des $(x, y) \in \Delta$ où f est minimale ?

c. f est la fonction de $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 1\}$ dans \mathbb{R} définie par

$$f(x, y) = \min\{-2x + 4, 3x + y + 2\}.$$

On représente ci-dessous les deux zones de Δ délimitée par la droite d'équation $-2x + 4 = 3x + y + 2$.



Quels sont les coins de la zone 1 ?

Quelle est l'expression de f dans la zone 1 ? et dans la zone 2 ?

Que vaut le max de f dans la zone 1 ? En quels points de la zone 1 ce max est il atteint ? Qu'en est il pour la zone 2 ?

Que vaut le max de f sur Δ ? En quels point de Δ ce max est il atteint ?

2. On considère le jeu à somme nulle de matrice de paiement

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a. Y a t-il un équilibre en stratégies pures ?

Y a t-il des stratégies pures dominées par des stratégies pures ?

- b. Quelle est la perte moyenne du joueur 2 s'il joue la stratégie mixte $(q, 1 - q)$ et si le joueur 1 joue la ligne 1 ?
 Quelle est l'expression de la plus grande perte moyenne que craint le joueur 2 s'il joue la stratégie mixte $(q, 1 - q)$?
- c. Déterminer les stratégies mixtes prudentes du joueur 2 puis la valeur du jeu.
- d. *Bonus* : Montrer que la ligne 2 est strictement dominée dans l'extension mixte du jeu. Qu'en déduit on sur les stratégies mixtes prudentes du joueur 1 ?

3. On considère le jeu à somme nulle de matrice de paiement

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a. Quel est le gain moyen du joueur 1 s'il joue la stratégie mixte $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0)$ et si le joueur 2 joue la colonne 1 ?
 Même question avec les colonnes 2, 3 et 4.
- b. Quelles sont parmi les stratégies mixtes du joueur 2 les meilleures réponses à la stratégie mixte $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0)$ du joueur 1 ?
- c. On découvre que la stratégie mixte $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0)$ du joueur 1 est prudente.
 Une stratégie mixte prudente du joueur 2 est elle forcément une meilleure réponse à la stratégie mixte $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0)$ du joueur 1 ? Expliquez.
 Inversement une meilleure réponse du joueur 2 à la stratégie mixte $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0)$ du joueur 1 est elle forcément prudente ? Expliquez.
- d. Déduire de ce qui précède la valeur de l'extension mixte du jeu.
- e. *Bonus* : Quelles sont les stratégies mixtes prudentes du joueur 1 ? et du joueur 2 ?