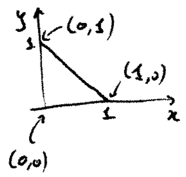
L2 Maths – Théorie des jeux   Corrigé de l'interrogation du 7 décembre 2010

1a f est une fonction affine sur l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points de $\mathbb{R}$, ici 0 et 1 donc f atteint son max en l'un des coins 0 ou 1, ici 0 puisque $f(0) = -2 > -3 = f(1)$, et l'ensemble des points du domaine $[0,1]$ où f est maximal est l'enveloppe convexe des coins où f est maximale, donc ici $\{0\}$.

On a $\sup_{x\in[0,1]} f(x) = f(0) = -2$

1b Δ est l'enveloppe convexe dans $\mathbb{R}^2$ des points $(0,0)$, $(0,1)$ et $(1,0)$. Les coins où f est minimale sont $(0,1)$ et $(1,0)$ donc $\inf_{(x,y)\in\Delta} f(x,y) = f(0,1) = f(1,0) = \frac{3}{2}$ et l'ensemble des points où f est minimale est l'enveloppe convexe des points $(0,1)$ et $(1,0)$, c.à.d. le côté de Δ joignant les sommets $(0,1)$ et $(1,0)$



1c Δ comme précédemment. f est affine par morceaux : précisément la différence $(-2x+4)-(3x+y+2)$ est nulle sur la droite d'équation $-2x+4 = 3x+y+2$ et de signe constant sur chaque demi plan de $\mathbb{R}^2$ délimité par cette droite. Comme en $(0,0)$ elle vaut $4-2>0$, elle est >0 sur la zone 1 et <0 sur la zone 2. Autrement dit $\min\{-2x+4, 3x+y+2\} = 3x+y+2$ sur la zone 1 puisque $-2x+4 > 3x+y+2$ et $\min\{-2x+4, 3x+y+2\} = -2x+4$ sur la zone 2 puisque $-2x+4 < 3x+y+2$ sur la zone 2. Donc f est affine sur la zone 1 d'expression $3x+y+2$ et affine sur la zone 2 d'expression $-2x+4$.

Les coins de la zone 1 sont $(0,0)$, $(0,1)$, $(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$ (point d'intersection de la droite d'équation $x+y=1$ avec celle d'équation $-2x+4 = 3x+y+2$) et $(\frac{2}{5},0)$ (pt d'intersection de la droite d'équation $y=0$ avec celle d'équation $-2x+4=3x+y+2$)

On a $f(0,0) = 3\times 0+0+2 = 2$, $f(0,1) = 3$, $f(\frac{1}{4},\frac{3}{4}) = \frac{7}{2}$, $f(\frac{2}{5},0) = \frac{16}{5}$

$\frac{16}{5} = 3+\frac{1}{5}$, $\frac{7}{2} = 3+\frac{1}{2} > 3+\frac{1}{5}$ donc le seul coin de la zone 1 où f est maximal est $(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$ et $\sup_{(x,y)\in \text{zone } 1} f(x,y) = f(\frac{1}{4},\frac{3}{4}) = \frac{7}{2}$ atteint en le seul pt $(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$ de la zone 1.

La zone 2 est un triangle plein de sommets $(\frac{2}{5},0)$, $(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$ et $(1,0)$. On a $f(x,y) = -2x+4$ sur la zone 2 donc f est maximal sur la zone 2 là où x est minimal, donc en le seul coin $(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$ donc $\sup_{(x,y)\in\text{zone } 2} f(x,y) = f(\frac{1}{4},\frac{3}{4}) = \frac{7}{2}$

Maintenant $\sup_{(x,y)\in\Delta} f(x,y) = \max\{\sup_{(x,y)\in\text{zone } 1} f(x,y), \sup_{(x,y)\in\text{zone } 2} f(x,y)\} = \max\{\frac{7}{2},\frac{7}{2}\} = \frac{7}{2}$ atteint en le seul point $(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$ de Δ

2a. On a $\underline{g} = \max\{0,0,-1\} = 0 < \bar{g} = \min\{1,3\} = 1$ donc le jeu n'a pas d'équilibre.

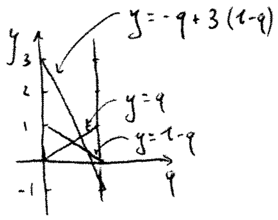
Par inspection aucune ligne n'est dominée ni aucune colonne.

2b. Si J2 joue $(q,1-q)$ et si J1 joue la ligne 1 la perte moyenne de J2 est $G((1,0,0),(q,1-q)) = 1\times q + 0\times(1-q) = q$

La plus grande perte moyenne que craint J2 en jouant $(q,1-q)$ est $\sup_{\substack{p_1,p_2,p_3\geq 0\\ p_1+p_2+p_3=1}} G((p_i),(q,1-q)) = \max\{G((1,0,0),(q,1-q)), G((0,1,0),(q,1-q)), G((0,0,1),(q,1-q))\}$
$= \max\{q, 1-q, -q+3(1-q)\}$

car $(p_i)\mapsto G((p_i),(q,1-q))$ est affine et le domaine $\{(p_1,p_2,p_3)\in\mathbb{R}^3 / p_1,p_2,p_3\geq 0$ et $p_1+p_2+p_3=1\}$ est un triangle plein de sommets (au coins) $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$

2c La stratégie mixte $(q,1-q)$ de J2 est prudente si elle minimise $f(q) := \max\{q, 1-q, -q+3(1-q)\}$



Les trois graphes s'intersectent en $q = \frac{1}{2}$ $(q = 1-q)$

$q = \frac{3}{5}$ $(q = -q+3(1-q))$

$q = \frac{2}{3}$ $(1-q = -q+3(1-q))$

Pour $q \in [0, \frac{1}{2}]$ on a $-q+3(1-q) \geqslant 1-q \geqslant q$ donc $f(q) = -q+3(1-q) = 3-4q$ fonction strict^t décroissante donc $\inf_{q\in[0,\frac{1}{2}]} f(q) = f(\frac{1}{2})$

Pour $q \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{5}]$ on a $-q+3(1-q) \geqslant q \geqslant 1-q$ donc $f(q) = -q+3(1-q)$ strict^t décroissant donc $\inf_{q\in[\frac{1}{2},3/5]} f(q) = f(\frac{3}{5})$

Pour $q \in [\frac{3}{5}, \frac{2}{3}]$ on a $q \geqslant -q+3(1-q) \geqslant 1-q$ donc $f(q) = q$ strict^t ↗

Pour $q \in [\frac{2}{3}, 1]$ on a $q \geqslant 1-q \geqslant -q+3(1-q)$ donc $f(q) = q$ strict ↗

donc $\inf_{q\in[\frac{3}{5},1]} f(q) = f(\frac{3}{5})$

Conclusion : f atteint son min en $q = \frac{3}{5}$ uniquement et ce min vaut $f(\frac{3}{5}) = \frac{3}{5}$

$(\frac{3}{5}, 1-\frac{3}{5}) = (\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$ est la seule stratégie mixte prudente de J2 et la valeur du jeu est la plus grande perte moyenne de J2 s'il joue $(\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$ (puisque le jeu admet un équilibre en stratégie mixte et ~~qu'alors~~ donc une stratégie prudente n'est jamais regrettée) c'est à dire $f(\frac{3}{5}) = \frac{3}{5}$

3a $G((\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0), (1,0,0,0)) = \frac{1}{3}\times 1 + \frac{2}{3}\times 3 + 0 + 0 = \frac{7}{3}$

$G((\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0), (0,1,0,0)) = \frac{1}{3}\times 5 + \frac{2}{3}\times 1 = \frac{7}{3}$

$G(\text{---}, (0,0,1,0)) = \frac{1}{3}\times 4 + \frac{2}{3}\times 2 = \frac{8}{3}$

$G(\text{---}, (0,0,0,1)) = \frac{1}{3}\times(-1) + \frac{2}{3}\times 7 = \frac{13}{3}$

3b (q_1, q_2, q_3, q_4) est une meilleure réponse de J2 à la stratégie mixte $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0)$ de J1 si $G((\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0), (q_j))$ est minimal.

$f : (q_j) \mapsto G((\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0), (q_j))$ est affine et l'ens des stratégies mixtes de J2 est l'enveloppe convexe des coins $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$ et $(0,0,0,1)$ donc cette fonction atteint son min en l'un des coins, donc en $(1,0,0,0)$ et $(0,1,0,0)$ d'après (a). On en déduit que l'ensemble des points où f est minimale est le segment joignant les coins $(1,0,0,0)$ et $(0,1,0,0)$ c'est à dire l'ensemble des stratégies mixtes $(q, 1-q, 0, 0)$, q décrivant $[0,1]$.

3c. On sait que tout couple de stratégies mixtes prudentes est un équilibre de l'extension mixte du jeu. Donc si J1 joue une stratégie mixte prudente, une stratégie mixte prudente de J2 ne sera pas regrettée par J2 donc est une meilleure réponse.

Inversement une meilleure réponse de J2 à la stratégie mixte prudente $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0)$ de J1 n'est pas forcément prudente : par exemple la colonne 2 est une meilleure réponse d'après 3b mais elle est moins prudente que la colonne 1 donc elle n'est certainement pas prudente ds l'extension mixte du jeu.

3d. On sait que l'extension mixte du jeu admet une valeur. Cette valeur est la perte de J2 à l'équilibre, donc la perte de J2 lorsque J1 joue une stratégie mixte prudente et J2 joue une meilleure réponse à la stratégie mixte prudente de J1. D'après 3a cette perte est $\frac{7}{3}$.