L2 Maths — Théorie des jeux

Deux solutions pour l'exercice 6 de la feuille de TD 2

Q : Jeu matriciel $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ Trouver les stratégies mixtes prudentes du joueur 1

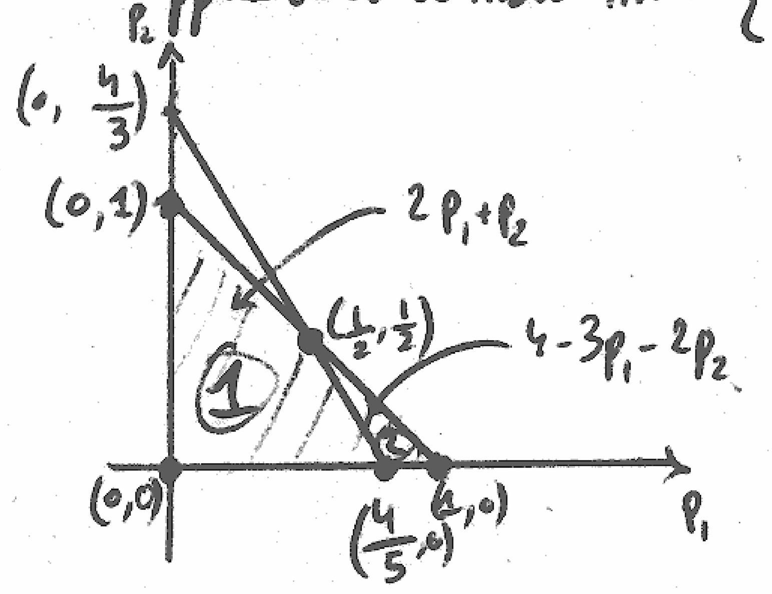
Par définition ce sont les $(p_1,p_2,p_3)\in X$ (ie $p_1,p_2,p_3\in\mathbb{R}_+$ et $p_1+p_2+p_3=1$) maximisant $\inf_{(q_1,q_2)\in Y} G((p_i),(q_j))$

Comme $(q_j)\mapsto G((p_i),(q_j))$ est affine, $\inf_{(q_j)\in Y} G((p_i),(q_j)) = \min\{G((p_i),(1,0)), G((p_i),(0,1))\} = \min\{2p_1+p_2, 4-3p_1-2p_2\}$

On cherche donc les triplets $(p_1,p_2,1-p_1-p_2)$ avec $p_1\geq 0, p_2\geq 0, 1-p_1-p_2\geq 0$ maximisant le nombre $\min\{2p_1+p_2, 4-3p_1-2p_2\}$

Solution 1 On découpe X en morceaux sur lesquels le min est donné par l'une des deux expressions $2p_1+p_2$ ou $4-3p_1-2p_2$. L'intersection des morceaux correspond au cas d'égalité $2p_1+p_2=4-3p_1-2p_2$ soit $4-5p_1-3p_2=0$. Ceci est l'équation d'une droite passant par $(0,\frac{4}{3})$ (faire $p_1=0$ dans l'éq.) et $(\frac{4}{5},0)$

~~L'application~~ le nbre $\min\{2p_1+p_2, 4-3p_1-2p_2\}$ vaut $2p_1+p_2$ sur le morceau 1 à gauche de la droite (on teste en $(0,0)$)
$4-3p_1-2p_2$ — 2 à droite —



Sur le morceau 1 l'appl $(p_1,p_2)\mapsto\min\{2p_1+p_2,4-3p_1-2p_2\}=2p_1+p_2$ est affine donc atteint son max en l'un des coins $(0,0),(0,1),(\frac{4}{5},0)$, (p_1,p_2) tq $p_1+p_2=1$ et $4-5p_1-3p_2=0$ soit $(p_1,p_2)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$2p_1+p_2$ vaut 0 en $(0,0)$, 1 en $(0,1)$, $\frac{3}{2}$ en $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ et $\frac{8}{5}$ en $(\frac{4}{5},0)$. Le max est donc atteint en le seul coin $(\frac{4}{5},0)$

La proposition 3b des notes de cours 3 nous dit que l'ensemble des points du morceau 1 où $2p_1+p_2$ est maximal est l'enveloppe convexe des coins où $2p_1+p_2$ est maximal ; cet ensemble est donc formé du seul point $(\frac{4}{5},0)$

~~Con~~

Sur le morceau 2 $\min\{2p_1+p_2,4-3p_1-2p_2\}=4-3p_1-2p_2$ est maximal en l'un des coins $(\frac{4}{5},0),(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ et $(1,0)$.
$4-3p_1-2p_2$ vaut $\frac{8}{5}$ en $(\frac{4}{5},0)$, $\frac{3}{2}$ en $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ et 1 en $(1,0)$. Le max est donc atteint en le seul point $(\frac{4}{5},0)$

En comparant le max sur les morceaux 1 et 2 on voit que $\min\{2p_1+p_2,4-3p_1-2p_2\}$ est maximal en $\boxed{(p_1,p_2)=(\frac{4}{5},0)}$ uniquement

Conclusion : $(\frac{4}{5},0,\frac{1}{5})$ est la seule stratégie mixte prudente de J1

Solution 2 connaissant la valeur du jeu

On trouve $\bar{G}=\frac{8}{5}$ par la recherche des stratégies mixtes prudentes de J2 (cf le document "Un corrigé des exercices 5 à 9"). Comme l'extension mixte d'un jeu matriciel admet une valeur, on a $\underline{G}=\frac{8}{5}$ ie $\sup_{(p_i)\in X}\min\{2p_1+p_2,4-3p_1-2p_2\}=\frac{8}{5}$ et une stratégie mixte prudente de J1 est un triplet $(p_1,p_2,1-p_1-p_2)\in X$ tel que $\min\{2p_1+p_2,4-3p_1-2p_2\}=\frac{8}{5}$ ce qui équivaut à
$$\begin{cases}2p_1+p_2\geq\frac{8}{5} & (1)\\ 4-3p_1-2p_2\geq\frac{8}{5} & (2)\end{cases}$$

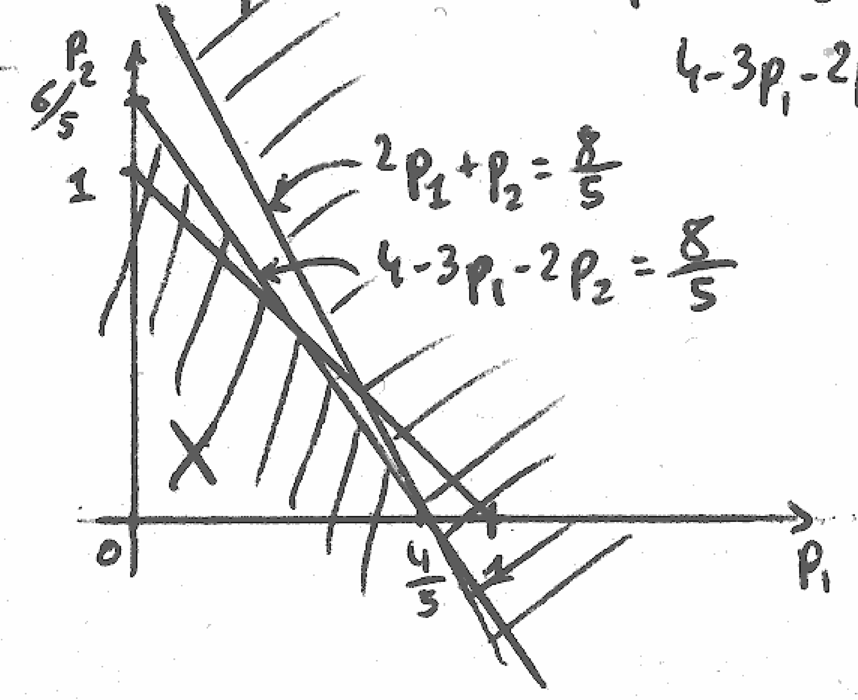
(on ne peut avoir $2p_1+p_2>\frac{8}{5}$ et $4-3p_1-2p_2>\frac{8}{5}$ avec $(p_1,p_2,1-p_1-p_2)\in X$ car alors $\min\{2p_1+p_2,4-3p_1-2p_2\}$ serait $>\frac{8}{5}$ ce qui contredirait $\sup_{(p_i)\in X}\min\{2p_1+p_2,4-3p_1-2p_2\}=\frac{8}{5}$)

Les inégalités (1) et (2) entraînent $\begin{cases}-2p_2+8\geq 8 & (\text{on prend } 3\times(1)+2\times(2))\\ p_1+4\geq\frac{24}{5} & (\text{on prend } 2\times(1)+(2))\end{cases}$ soit $\begin{cases}p_2\leq 0 & (1')\\ p_1\geq\frac{4}{5} & (2')\end{cases}$. Contrairement aux systèmes d'équations linéaires le système $\begin{cases}(1')\\(2')\end{cases}$ n'est pas équivalent à $\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases}$: par exemple $p_1=1, p_2=0$ est solution de $\begin{cases}(1')\\(2')\end{cases}$ mais pas de $\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases}$

Comme $(p_1,p_2,1-p_1-p_2)\in X$ on a aussi $p_2\geq 0$ donc $\boxed{p_2=0}$. (1) devient $p_1\geq\frac{4}{5}$, (2) devient $-3p_1\geq-\frac{12}{5}$ soit $p_1\leq\frac{4}{5}$ donc $\boxed{p_1=\frac{4}{5}}$

Dessin : $\{(p_1,p_2)\in\mathbb{R}^2, 2p_1+p_2\geq\frac{8}{5}\}$ est le demi plan bordé par la droite d'éq. $2p_1+p_2=\frac{8}{5}$ et ne contenant pas $(0,0)$ (puisque $2\times 0+0<\frac{8}{5}$)
$\{(p_1,p_2)\in\mathbb{R}^2, 4-3p_1-2p_2\geq\frac{8}{5}\}$ — $4-3p_1-2p_2=\frac{8}{5}$ et contenant $(0,0)$

L'ens. solution du système $\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases}$ est l'intersection des zones hachurées



Conclusion : $(\frac{4}{5},0,\frac{1}{5})$ est la seule stratégie mixte prudente de J1