L2 Mass – Théorie des jeux – cours 2 [1]

Gain garanti optimal, valeur

On considère un jeu à deux joueurs sous forme normale. On note X l'ensemble des stratégies du joueur 1, Y l'ensemble des stratégies du joueur 2 et $g : X \times Y \to \mathbb{R}$ la fonction de paiement du joueur 1. Si le joueur 1 a choisi la stratégie $x \in X$ et si le joueur 2 a choisi $y \in Y$, le gain du joueur 1 sera $g(x, y)$. Si le jeu est à somme nulle, le gain du joueur 2 sera $-g(x, y)$. Dans le cas contraire il faut encore préciser la fonction de paiement du joueur 2.

1. Gain garanti optimal et stratégies prudentes du joueur 1

Pour chaque choix $x \in X$ de stratégie, le joueur 1 craint le plus mauvais paiement

$$\inf_{y \in Y} g(x, y)\ .$$

Ce plus mauvais paiement est un paiement garanti : le joueur 1 gagnera au moins $\inf_{y \in Y} g(x, y)$ s'il joue x. Par contre pour tout réel $\alpha > \inf_{y \in Y} g(x, y)$, le paiement α n'est pas garanti si le joueur 1 joue x : il existe $y \in Y$ tel qu'on ait $g(x, y) < \alpha$.

Par comportement prudent du joueur 1 on entend le choix par le joueur 1 d'une stratégie $x_0 \in X$ qui maximise son plus mauvais paiement. La valeur maximale du plus mauvais paiement en question est

$$\underline{g} := \sup_{x \in X} (\inf_{y \in Y} g(x, y))\ .$$

Voici ce qui caractérise $\underline{g}$: si α est un réel strictement supérieur à $\underline{g}$, le paiement α au joueur 1 n'est garanti par aucune de ses stratégies : Pour chaque choix de $x \in X$ par le joueur 1, il existe un choix $y \in Y$ par le joueur 2 tel qu'on ait $g(x, y) < \underline{g}$. Si au contraire α est inférieur strictement à $\underline{g}$ alors le joueur 1 peut se garantir un paiement strictement supérieur à α : Il existe un choix de $x \in X$ par le joueur 1 tel que quel que soit le choix de $y \in Y$ par le joueur 2 on ait $g(x, y) > \alpha$.

On dit que $\underline{g}$ est le **paiement garanti optimal** du joueur 1.

Une **stratégie prudente** du joueur 1 est par définition une stratégie $x_0 \in X$ telle que le plus mauvais paiement du joueur 1 s'il joue x_0 soit égal à $\underline{g}$, *i.e.*

$$\inf_{y \in Y} g(x_0, y) = \underline{g}\ .$$

Il faut des conditions sur X, Y et g pour qu'un tel x_0 existe : par exemple X a un nombre fini d'éléments, ou bien X et Y sont des parties fermées bornées de $\mathbb{R}^n$ et g est continue.

2. Perte et stratégies prudentes du joueur 2 dans le cas d'un jeu à somme nulle

Si le jeu est à somme nulle, la fonction de paiement du joueur 2 est

$$X \times Y \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto -g(x, y)\ .$$

On peut alors appliquer les notions qui précèdent à $-g$. On préfère cependant raisonner sur les pertes possibles du joueur 2 : $g(x, y)$ est la perte du joueur 2, ce qu'il devra payer au joueur 1, s'il joue y et si le joueur 1 joue x.

Si le joueur 2 choisit la stratégie $y \in Y$ il craint la plus mauvaise perte

$$\sup_{x \in X} g(x, y)\ .$$

En jouant de façon prudente le joueur 2 choisit une stratégie $y_0 \in Y$ qui minimise sa plus mauvaise perte. La valeur minimale de la plus mauvaise perte en question est

$$\bar{g} := \inf_{y \in Y} (\sup_{x \in X} g(x, y))$$

[1] F.-X. Dehon, 26 septembre – 3 octobre 2008, dehon@unice.fr

(qu'on peut appeler majoration optimale de la perte).

Une **stratégie prudente** du joueur 2 est par définition une stratégie $y_0 \in Y$ telle que la plus mauvaise perte du joueur 2 s'il joue y_0 soit $\bar{g}$, *i.e.* telle que

$$\sup_{x \in X} g(x, y_0) = \bar{g} \ .$$

Une telle stratégie n'existe pas forcément, on a besoin d'hypothèses sur g.

3. Equilibre de Nash et valeur d'un jeu à deux joueurs à somme nulle

Si le jeu est à somme nulle, un **équilibre de Nash** est un couple de stratégies $(x_0, y_0) \in X \times Y$ tel que pour toute stratégie $x \in X$ du joueur 1 et pour toute stratégie $y \in Y$ du joueur 2 on ait

$$g(x, y_0) \leq g(x_0, y_0) \leq g(x_0, y) \ .$$

(Le joueur 1 ne regrette pas d'avoir joué x_0 sachant que le joueur 2 joue y_0 ; le joueur 2 ne regrette pas d'avoir joué y_0 sachant que le joueur 1 joue x_0.) Un couple $(x_0, y_0) \in X \times Y$ satisfaisant la condition ci-dessus est appelé un **point selle** de la fonction g. Points selle de g et équilibre de Nash du jeu à somme nulle correspondant coïncident donc.

Supposons l'existence d'une stratégie prudente x_0 pour le joueur 1 et d'une stratégie prudente y_0 pour le joueur 2. On a pour tout couple (x, y) de stratégies

$$\underline{g} = \inf_{y \in Y} g(x_0, y) \leq g(x_0, y_0) \leq \sup_{x \in X} g(x, y_0) = \bar{g} \ .$$

Prop. 1. On suppose $\underline{g} = \bar{g}$. Alors les inégalités ci-dessus sont des égalités. En particulier pour tout couple (x, y) de stratégies on a

$$g(x, y_0) \leq g(x_0, y_0) \leq g(x_0, y) \ ;$$

autrement dit le couple (x_0, y_0) est un équilibre de Nash.

Si $\underline{g} = \bar{g}$ on appelle **valeur** du jeu la quantité $\underline{g} = \bar{g}$ et on dit que le jeu **admet une valeur**.

Rq. Si $\underline{g} < \bar{g}$ alors soit $\underline{g} < g(x_0, y_0)$ soit $g(x_0, y_0) < \bar{g}$ (soit les deux !). Dans le premier cas le joueur 1 a reçu du joueur 2 un paiement strictement supérieur à ce qu'il craignait donc le joueur 2 regrette son choix y_0. Dans le second cas le joueur 2 a perdu moins qu'il ne craignait donc le joueur 1 regrette son choix x_0.

La proposition suivante donne la réciproque de la proposition 1 :

Prop. 2. Supposons que le couple de stratégies (x, y) soit un équilibre de Nash du jeu alors on a $\underline{g} = g(x, y) = \bar{g}$, x est une stratégie prudente du joueur 1 et y est une stratégie prudente du joueur 2.

Preuve (Exercice). Observer que si $\underline{g} \neq g(x, y)$ ou si $g(x, y) \neq \bar{g}$ alors $\underline{g} < g(x, y)$ ou $g(x, y) < \bar{g}$. Dans le premier cas le paiement $g(x, y)$ n'était pas garanti au joueur 1 donc le joueur 2 aurait pu faire mieux. Dans le second cas le joueur 2 aurait pu perdre plus que $g(x, y)$ donc le joueur 1 aurait pu faire mieux.

Corollaire 3. Supposons $\underline{g} = \bar{g}$ et notons O_X, respectivement O_Y, l'ensemble des stratégies prudentes du joueur 1, respectivement du joueur 2. L'ensemble des équilibres de Nash du jeu (points selle de g) est $O_X \times O_Y$.

Exercice. On suppose que le jeu admet une valeur et soit (x, y) un couple de stratégies tel que $g(x, y) = \underline{g} = \bar{g}$. Le couple (x, y) est-il un équilibre de Nash ? (Essayer de construire un contre exemple.)

Une condition suffisante pour l'existence d'un point selle.

Théorème 4. (Sion) On suppose

1) X et Y sont des parties convexes (non vides) fermées et bornées de $\mathbb{R}^n$.

2) Pour tout couple $(x_0, y_0) \in X \times Y$ de stratégies et pour tout réel α, les ensembles $x \in X, g(x, y_0) \geq \alpha$ et $y \in Y, g(x_0, y) \leq \alpha$ sont des parties convexes fermées de $\mathbb{R}^n$.

Alors la fonction g admet au moins un point selle.

4. Stratégies dominées, strictement dominées, dominantes

On ne suppose plus le jeu à somme nulle.

Déf. On dit que la stratégie $x \in X$ du joueur 1 est **dominée** par la stratégie $x' \in X$, $x' \neq x$, si pour tout choix d'une stratégie $y \in Y$ par le joueur 2 on a $g(x,y) \leq g(x',y)$. On dit que x est **strictement dominée** par x' si pour tout $y \in Y$, $g(x,y) < g(x',y)$.

On dit que la stratégie $x \in X$ est **dominée**, respectivement **strictement dominée**, s'il existe une stratégie $x' \in X$, $x' \neq x$ telle que x est dominée par x', respectivement strictement dominée par x'.

On dit que la stratégie $x \in X$ est **dominante**, respectivement **strictement dominante**, si chaque stratégie de X autre que x est dominée par x, respectivement strictement dominée par x.

Prop. 5. Soient $x, x' \in X$ deux stratégies du joueur 1. On suppose x dominée par x' alors

– Si x est prudente, x' est également prudente.

– Si le joueur 1 ne regrette pas x après le choix par le joueur 2 d'une stratégie y, il n'aurait pas non plus regretté x'.

Supposons x strictement dominée par x' alors x sera toujours regrettée. Si de plus $\inf_{y \in Y} g(x,y)$ est atteint en un $y_0 \in Y$ alors x ne peut pas être prudente.

Rq. Une stratégie prudente peut très bien être dominée (exercice : construire un exemple !)

Prop. 6. Soit $x \in X$ une stratégie du joueur 1. On suppose que x est dominante ; alors x est une stratégie prudente et ne sera pas regrettée. Si de plus il existe une stratégie y_0 du joueur 2 minimisant $y \mapsto g(x,y)$ alors le couple (x, y_0) est un équilibre de Nash.

Notons X_d un sous-ensemble de X formé des stratégies dominées (au sens large) et notons $X - X_\mathrm{d}$ le complémentaire de X_d dans X. On veillera à ce que $X - X_\mathrm{d}$ ne soit pas vide.

On considère le jeu extrait du jeu initial où on a supprimé les stratégies dominées dans X_d du joueur 1. La fonction de paiement du joueur 1 pour le nouveau jeu est la restriction de g à $(X - X_\mathrm{d}) \times Y$.

Prop. 7. On suppose que $X - X_\mathrm{d}$ n'est pas vide.

a. Le gain garanti optimal du joueur 1 est inchangé lorsqu'on retire de X les stratégies dominées dans X_d ; *i.e.*

$$\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} g(x,y) = \sup_{x \in X - X_\mathrm{d}} \inf_{y \in Y} g(x,y)$$

b. Supposons le jeu à somme nulle, alors la plus petite plus mauvaise perte du joueur 2 est inchangée lorsqu'on retire de X les stratégies dominées dans X_d ; *i.e.*

$$\inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} g(x,y) = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X - X_\mathrm{d}} g(x,y)$$

En particulier le jeu admet une valeur si et seulement si le nouveau jeu admet une valeur auquel cas la valeur du jeu est inchangée.

c. Supposons que le jeu est à somme nulle et qu'il admette une valeur. Si (x,y) est un équilibre pour le nouveau jeu (ou de façon équivalente un couple de stratégies prudentes pour le nouveau jeu) alors (x,y) est aussi un équilibre pour le jeu initial (ou de façon équivalente un couple de stratégies prudentes pour le jeu initial).

Rq. En supprimant des stratégies dominées d'un jeu à somme nulle on peut supprimer des stratégies prudentes donc des équilibres mais on ne supprime pas l'existence d'un équilibre.

Exercice. Construire un jeu à somme non nulle admettant un équilibre de Nash mais tel que le jeu obtenu en supprimant les stratégies dominées du joueur 1 n'admette pas d'équilibre.

Exemples. 1) Soit le jeu à deux joueurs à somme nulle dont la matrice de paiement du joueur 1 est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -7 \\ 3 & 8 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

La stratégie 1 du joueur 1 est dominée, de même que sont dominées les stratégies 2 et 3 du joueur 2. En supprimant les stratégies dominées, on tombe sur le jeu $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ qui n'admet pas de valeur.

2) Soit le jeu de matrice de paiement

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Aucune stratégie du joueur 1 n'est dominée. Les stratégies 3 et 4 du joueur 2 sont dominées. Le nouveau jeu a pour matrice de paiement

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cette fois la stratégie 2 du joueur 1 est dominante donc le jeu admet une valeur. En supprimant les stratégies dominées on tombe sur le jeu $\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$ pour lequel le joueur 2 a une stratégie dominante : la stratégie 1. En replaçant ces stratégies dans le cadre du jeu initial, on obtient que le couple de stratégies $(2, 1)$ est un équilibre de Nash. On observe que la stratégie $(4, 1)$ est également un équilibre de Nash du jeu initial.