

TD de theorie des jeux 1

September 20, 2007

1 Relation mere bebe

Une mere et son bebe (1 an environ) sont seuls dans une salle d'attente avec des jouets. L'experience montre que suivant les couples mere-enfant on a 3 types de comportements differents possibles :

- Certains enfants evitent leur mere (parfois, meme quand celles-ci essayent de les prendre dans leurs bras ils detournent la tete ou les repoussent). On les qualifie d'“evitant”.
- Certains enfants s'accrochent a leur mere, la sollicitant sans cesse et ne jouent presque pas avec les jouets. On les qualifie d'“ambivalent-resistant”.
- Le troisieme type va et vient entre les jouets et la mere. On les qualifie de “confiant”.

NB : les etudes montrent que les enfants les moins anxieux sont les enfants confiants. Les enfants evitants ne montrent pas leur anxiete mais des tests biochimiques prouvent qu'ils le sont. Les enfants autres enfants (ambivalent-resistants) manifestent ouvertement leur anxiete.

On essaye de modeliser la situation avec le jeu suivant :

L'enfant a le choix d'aller jouer avec les jouets ou d'aller voir sa mere. La mere a le choix de reconforter ou repousser l'enfant (s'il vient a elle, sinon elle continue de lire son magazine par exemple).

On prend comme fonction d'utilite pour l'enfant la fonction suivante :

	reconforter	repousser
aller vers mere	10	-10
aller jouer	5	5

La fonction d'utilite pour la mere est la suivante :

	reconforter	repousser
aller vers mere	2	7
aller jouer	10	10

- Strategies prudentes et dominantes
 - Est-ce que l'enfant a une strategie dominante ? Et la mere ? Si oui, laquelle ou lesquelles.

- Si la mere et l'enfant utilisent une strategie prudente, quelle strategie choisissent la mere et l'enfant ? Quel type de relation mere-enfant a-t-on (ambivalent-resistant, confiant, evitant) ?
- Quelles caracteristiques psychologiques peut-on preter a l'enfant pour expliquer sa fonction d'utilite ? Et pour la mere ?
- Jeu a somme nulle
 - Est-ce un jeu a somme nulle ?
 - Si on remplace le 2 par un 20 et le 7 par un -20 dans la fonction d'utilite de la mere, c'est un jeu a somme nulle. Pourquoi ?
On se place maintenant dans ce jeu modifie.
 - Quel sens psychologique peut-on associer au fait que le jeu soit a somme nulle ?
 - La mere et l'enfant choisissent une strategie prudente, quelle est le type de relation mere-enfant ?
 - L'experience prouve que la "sensibilite" de la mere est determinante. On la modelise ici en introduisant un parametre s dans la modelisation mesurant "combien la mere reconforte son enfant". La fonction d'utilite est desormais :

	reconforter	repousser
aller vers mere	s	$s-10$
aller jouer	5	5

 - Si la mere et l'enfant ont une strategie prudente, quel est le type de relation mere-enfant a-t-on en fonction de s ? Est-ce qu'on peut dire que ce modele est complet ?

2 Le dilemme du prisonnier

Deux complices d'un crime sont mis en garde a vue par la police. Cependant les policiers n'ont aucune preuve et vont essayer d'obtenir des aveux. Les deux complices ne peuvent pas communiquer. Les 3 cas de figure suivant peuvent se presenter :

- Si l'un denonce l'autre et l'autre plaide innocent il prend une peine tres lourde et le delateur est libere.
- Si les 2 plaident innocents ils sont tous les 2 liberes.
- Si les 2 s'accusent l'un l'autre ils vont tous les 2 en prison avec un peine moyenne.

La fonction d'utilite d'un prisonnier est alors modelisee comme :

	denoncer	se taire
denoncer	-2	1
se taire	-4	1

- La fonction ci dessus est la fonction d'utilite d'un prisonnier, est-ce que le choix de ce prisonnier (denoncer, se taire) est represente en abscisse ou en ordonne ?

- Y a-t-il une strategie dominante ? Est-ce que ce systeme judiciaire encourage la delation ? Proposer une fonction d'utilite pour le cas ou le systeme judiciaire n'encourage pas la delation. Y-a-t-il une strategie dominante ?
- Est-ce qu'au fond les 2 complices se preoccupent de ce qui arrive a l'autre ? Proposer une fonction d'utilite dans le cas contraire. Y-a-t-il une strategie dominante ?

3 Encore plus de strategies prudentes

Pour cet exercice l'objectif est de s'assurer la maitrise technique des calculs de min et de max. Le raisonnement est de meme nature que sur les cas concrets, seul le nombre d'entrees dans la fonction d'utilite change. Le joueur X est en abscisse et le joueur Y est en ordonnee. On donne la fonction d'utilite de X.

-8	2	-2	6
-1	1	0	-7
-4	-3	8	0

- Y a-t-il une strategie dominante ? Quelle est la strategie prudente de X, quelle est son utilite ?
- Y a-t-il des strategies dominees ?
- On suppose le jeu a somme nulle, cad que la fonction d'utilite de Y est l'opposee de celle de X.
Quelle est la strategie prudente de Y ? Quelle est son utilite ?
- Si les 2 jouent prudemment est-ce satisfaisant pour les 2 parties ? Les joueurs peuvent-ils etre tentes de changer leur strategie ?
- On remplace le -3 par un 5 dans la fonction d'utilite. Quelles sont les strategies prudentes de X et Y ? Les joueurs peuvent-ils etre tentes de changer leur strategie ?

4 Les points selles

On se place dans le contexte general d'un jeu a somme nulle a 2 joueurs. Soit X et Y les ensembles de strategies des joueurs X et Y, $u(x, y)$ la fonction d'utilite du joueur X.

- Prouver que

$$\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} u(x, y) \leq \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} u(x, y) \quad (1)$$

- Supposons que l'on dispose d'un couple de strategies $(\tilde{x}, \tilde{y})$ tel que

$$u(\tilde{x}, \tilde{y}) = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} u(x, y)$$

Est-ce $\tilde{x}$ qui est une strategie prudente pour X, ou bien $\tilde{y}$ qui est une strategie prudente pour Y ? Et donc pourquoi a-t-on

$$\forall x \in X, \quad u(x, \tilde{y}) \leq u(\tilde{x}, \tilde{y})$$

- Supposons que l'egalite

$$\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} u(x, y) = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} u(x, y)$$

soit realisee en un couple de strategies $(\tilde{x}, \tilde{y})$. Pourquoi

$$\forall x \in X, \quad \forall y \in Y, \quad u(x, \tilde{y}) \leq u(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq u(\tilde{x}, y)$$

- On suppose maintenant que $u(x, y) = y^2 - x^2 - xy + y - 2x$, que $X = [-3, 3]$ et $Y = [-4, 2]$. Trouver un couple de strategies $(\tilde{x}, \tilde{y})$ qui realise

$$\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} u(x, y) = u(\tilde{x}, \tilde{y}) = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} u(x, y)$$

- Dessiner le graphe de la fonction $u(x, y)$ dans $\mathbf{R}^3$ au dessus de $X \times Y$, dessinez un selle de cheval.