Licence L2 MASS - Probabilité **feuille 4** **9 novembre 2015**

Espérance de variable aléatoire

Ex. 1. *(traité en cours)* Soit X la variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau suivant. Calculer l'espérance et la variance de X.

x	0	1	2	3	4	5
$\mathrm{P}(X = x)$	1/4	1/8	1/8	1/3	0	1/6

Ex. 2. Calculer de deux façons l'espérance de la somme des lancers de deux dés : 1. en utilisant la loi de la somme des lancers, 2. en utilisant la linéarité de l'espérance.

Ex. 3. *(traité en cours)* **a.** Donner l'expression formelle de $E(X)$ et $E(X^2)$ pour X de loi $B(p)$ (Bernouilli), $B(n,p)$ (binomiale), $U(\{1,\ldots,n\})$ (uniforme)

b. Pouvez vous calculer ces espérances à partir des expressions ci-dessus ?

Ex. 4. a. Observer que si X est une variable aléatoire prenant la seule valeur x (ou telle que $P(X = x) = 1$) alors $\mathrm{E}(X) = x$

b. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1,\ldots,n\}$. Observer que X est de même loi que $n+1-X$. A t-on $X = n+1-X$? Qu'obtient on pour $E(X)$?

Ex. 5. *(traité en cours)* Soit n un entier fixé. On répète n fois une même expérience dont la probabilité de succès est p. On note, pour $1 \leq k \leq n$, X_k la variable de Bernouilli qui vaut 1 si la k-ième expérience est un succès. On note X le nombre de succès après les n répétitions.

Observer $X = X_1 + \cdots + X_n$. En déduire l'espérance et la variance de X. Quels tests de pertinence pouvez vous faire sur les valeurs trouvées ?

Ex. 6. *(Feuille 3 ex 9 rerédigé)* Soit n un entier fixé. Soit Ω l'ensemble des n-uplets $(x_1,\ldots,x_n)$ à valeurs dans $\{P,F\}$, muni de la probabilité uniforme. On note T la variable $\Omega \to \mathbb{N}$ qui associe à $(x_1,\ldots,x_n)$ le premier $k \leq n$ tel que $x_k = P$ si un tel k existe, l'entier $n+1$ si $(x_1,\ldots,x_n) = (F,\ldots,F)$.

a. Que représente T ? Calculer sa loi. Que reconnaît on si $n = \infty$?

b. Calculer l'espérance et la variance de T. Quels tests de pertinence peut on faire sur les valeurs obtenues ?

Ex. 7. On lance un dé et on note N la valeur affichée par le dé. On lance ensuite N fois le dé et on compte le nombre de fois qu'on obtient 1 (le lancé initial ne compte pas). Que vaut $E(X), Var(X)$?

Ex. 8. A la sortie d'un restaurant, le garçon remet à n hommes venus déjeuner ensemble leurs chapeaux au hasard. Les clients sont numérotés de 1 à n : pour le client i, on désigne par X_i la variable aléatoire valant 1 si le chapeau distribué est le bon et 0 sinon. Le nombre de chapeaux correctement distribués est $X = X_1 + \cdots + X_n$.

a. Donner la loi de chaque X_i. En déduire l'espérance de X.

b. Donner la valeur de $E(X_iX_j)$ pour $i \neq j$. En déduire la variance de X.

Ex. 9. Un joueur joue à la roulette d'un casino. Il mise un euro sur une couleur à chaque fois et gagne un euro (plus sa mise) avec probabilité 18/37 ; il perd sa mise avec probabilité 19/37. Il joue n parties. On note X_i son gain à la partie i, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ son gain total (qui peut être négatif) et $Y_n = S_n/n$ son gain moyen par partie.

a. Donner la loi de X_i et calculer son espérance.

b. Donner l'espérance et la variance de Y_n.

c. On note g_n la probabilité que le joueur gagne de l'argent. Comment se comporte g_n quand $n \to \infty$?

Révisions

10. On choisit au hasard une partie A de 10 éléments de l'ensemble $\{1, 2, \dots, 100\}$. Quelle est la loi de $\max(A)$?

11. Un lot de 100 dés contient 25 dés pipés. Le lancé d'un dé pipé donne la face 1 avec probabilité $1/2$ et les autres faces de façon équiprobable.

On choisit un dé au hasard et on le lance deux fois. Le résultat du deuxième lancé est il indépendant du résultat du premier lancé ?

Variables continues

Ex. 12. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. Quelle est la loi de $\max(X, Y)$? Quelle est son espérance ?