Licence L2 MASS - Probabilité feuille 2 28 septembre 2015

Modèles pour une expérience aléatoire, probabilité conditionnelle (suite), liaison, indépendance

Un modèle pour une expérience aléatoire est un ensemble Ω (l'ensemble des issues possibles de l'expérience) et une mesure de probabilité P_Ω (le plus souvent notée simplement P) sur Ω.
Un évènement E pour cette expérience correspond alors à l'ensemble, encore noté E, des éléments de Ω pour lesquels E est réalisé.
Le modèle (Ω, P_Ω) est dit discret si l'ensemble Ω est fini ou dénombrable (on peut numéroté ses éléments). Il est dit combinatoire si Ω est fini et si P_Ω est la mesure de proba uniforme ($P_\Omega(\{\omega\})$ ne dépend pas de $\omega \in \Omega$; cela correspond au tirage de ω au hasard, sans biais).
Un modèle (Ω, P_Ω) peut être construit à partir d'un premier modèle (S, P_S) en ne retenant des issues i de S qu'une caractéristique, disons $X(i)$, à valeurs dans Ω. On pose alors, pour tout évènement $E \subset \Omega$,

$$P_\Omega(E) := P_S(X \in E) := P_S(\{i \in S, X(i) \in E\}) .$$

Exemple : On lance deux dés ; S est l'ensemble des couples (a, b) d'éléments de $\{1, \ldots, 6\}$ avec la mesure de proba uniforme, Ω est l'ensemble des paires $\{a, b\}$ d'éléments de $\{1, \ldots, 6\}$ et X est l'application $(a, b) \mapsto \{a, b\}$ (on oubli l'ordre de lancé des dés). La mesure P_Ω n'est pas uniforme !

L'expérience qu'on veut modéliser peut se décomposer en plusieurs expériences consécutives, indépendantes entre elles ($\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots$ avec la probabilité produit $P((\omega_1, \omega_2, \ldots)) = P(\omega_1)P(\omega_2)\cdots$) ou pas (arbre de probabilités conditionnelles).

Ex. 1. *(traité en cours)* Une famille a deux enfants, l'aîné étant Garçon ou Fille de façon équiprobable, le cadet également et de façon indépendante de l'ainé. On sonne à la porte de l'appartement de cette famille ; un enfant vient ouvrir ; c'est un garçon. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit également un garçon ? Avant de répondre à la question, proposer un modèle (Ω, P) de l'expérience consistant au tirage de la composition de la famille et au choix de l'enfant qui ouvre la porte lorsque l'enfant qui ouvre la porte est :

(1) toujours l'ainé ;

(2) choisi au hasard par les parents ;

(3) un garçon si possible, l'ainé s'il y a un choix à faire

2. *(traité partiellement en cours)* On dispose de deux urnes, la première contenant une boule rouge et une boule blanche, la seconde contenant deux boules rouges et une boule blanche.

Modéliser l'expérience consistant à choisir une urne au hasard puis à prendre dans cette urne une boule au hasard. Quelle est la probabilité qu'on ait choisi la première urne sachant que la boule tirée est blanche ?

Modéliser de même l'expérience consistant à choisir une urne au hasard, à prendre dans cette urne une boule au hasard qu'on place sans la regarder dans l'autre urne puis à choisir à nouveau une urne au hasard et en tirer une boule au hasard. Quelle est la probabilité que cette dernière boule soit blanche ? Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit blanche sachant que la dernière boule tirée est blanche ?

3. Un lot à gagner est caché derrière une porte parmi quatre indiscernables. Le joueur est invité à choisir une porte mais avant qu'il ne l'ouvre, l'organisateur du jeu ouvre une autre porte ne cachant pas le lot et propose au joueur de reconsidérer son choix. Que le joueur change son choix ou pas, l'organisateur ouvrira une seconde porte ne cachant pas le lot (éventuellement celle initialement choisi par le joueur si celui ci a changé son choix) puis proposera une dernière fois au joueur de reconsidérer son choix. Le joueur a ainsi plusieurs stratégies : reconsidérer ou pas son choix à chaque révélation d'une chambre vide, en excluant son choix initial ou pas. Quelle(s) stratégie(s) maximise(nt) la probabilité qu'il remporte le lot ?

Questions de dénombrement

4. Un directeur doit choisir un groupe de 4 personnes parmi 16 candidats (9 hommes et 7 femmes) pour une même tache. Quel est le nombre de choix possibles ?

Quels est le nombre de choix si le directeur veut a) autant d'hommes que de femmes b) au moins un homme et au moins une femme ?

5. Lors d'une conférence de l'ONU, des auditeurs de même nationalité s'assoient les uns à côté des autres; de combien de façon 3 français, 2 italiens, 6 américains et 2 chinois peuvent-ils prendre place sur une rangée de 13 sièges ?

6. De combien de façon peut-on ranger p boules (indiscernables) dans n cases numérotées ? (Avec $p \leq n$.) Même question avec des boules numérotées.

7. Quelle est la probabilité que le lancé de six dés donne six faces différentes ?

8. Quelle est la probabilité que dans une classe de 30 élèves les anniversaires tombent sur 30 jours différents ?

Questions d'indépendance

9. L'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ est muni de la probabilité uniforme. Observer que les évènements $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$ sont deux à deux indépendants mais pas indépendants dans leur ensemble.