Licence L2 MASS - Probabilité **feuille 1** **14 septembre 2015**

Révision évènements, probabilités, probabilités conditionnelles

Si E est un évènement, sa négation est notée $\bar{E}$. La probabilité de E est notée $P(E)$. L'évt certain Ω est de probabilité 1 ; l'évt impossible $\emptyset = \bar{\Omega}$ est de proba 0.
Si E, F sont deux évts, $E \wedge F$ désigne l'évt "E et F" ; $E \vee F$ désigne l'évt "E ou F" (ou non exclusif).
E, F sont disjoints si $E \wedge F$ est impossible auquel cas $P(E \vee F) = P(E) + P(F)$. La suite $(F_1, \dots, F_n)$ est une décomposition de l'évt E si F_i, F_j sont disjoints dès que $i \neq j$ et si $E = F_1 \vee F_2 \vee \dots \vee F_n$.

Ex. 1. Soit E un évt. Observer que $(E, \bar{E})$ est une décomposition de l'évt certain. Quelle relation entre $P(E)$ et $P(\bar{E})$ obtient on ?

Ex. 2. Soient E, F deux évts. Observer que $(E \wedge F, E \wedge \bar{F})$ est une décomposition de E, que $(E \wedge F, E \wedge \bar{F}, \bar{E} \wedge F)$ est une décomposition de $E \vee F$ (faire un dessin). En déduire la relation entre $P(E), P(F), P(E \wedge F,), P(E \vee F)$.

Ex. 3. On observe dans une faculté célèbre que 3 étudiants sur 5 aiment les maths et que 3 étudiants sur 7 aiment le sport. Montrer que pour l'expérience consistant à sélectionner un étudiant au hasard, les évts "l'étudiant aime les maths" et "l'étudiant aime le sport" ne peuvent pas être disjoints.

Si E, F sont deux évts, la probabilité de E sachant F est notée $P(E|F)$ (parfois également $P_F(E)$). Elle est bien définie si $P(E)$, $P(F)$ sont bien définis et si $P(F) > 0$. Elle vérifie la relation fondamentale

$$P(E \wedge F) = P(E|F) \times P(F) \ .$$

Combinée avec le fait que $(E \wedge F, E \wedge \bar{F})$ est une décomposition de E, on obtient le "calcul par conditionnement" ou "formule des probabilités totales"

$$P(E) = P(E|F) \times P(F) + P(E|\bar{F}) \times P(\bar{F}) \ .$$

Plus généralement si $F_1, \dots, F_n$ est une décomposition de l'évt certain alors on a

$$P(E) = \sum_i P(E|F_i) \times P(F_i) \ .$$

Ex. 4. Quelle relation a t-on entre $P(E|F), P(F|E), P(E), P(F)$? Qu'appelle t-on Formule de Bayes ?

Ex. 5. Une compagnie d'assurance répartit ses assurés en trois catégories : conducteur à faible risque, conducteur à risque moyen et conducteur à haut risque. Les statistiques de la compagnie indiquent que la probabilité d'accident sur une période de un an est 0,05, 0,15 et 0,30 selon la catégorie. Par ailleurs, la répartition des assurés est la suivante : 20% sont à bas risque, 50% à risque moyen et 30% à haut risque. Un assuré est choisi au hasard : quelle est la probabilité qu'il ait un accident au cours de l'année ? Sachant que l'assuré n'a pas eu d'accident lors de l'année écoulée, quelle est la probabilité qu'il soit à faible risque ?

Ex. 6. Un lot de 100 dés contient 25 dés pipés dont la probabilité de sortie du 6 est 1/2. Un dé est choisi au hasard et lancé : il donne 6. Quelle est la probabilité qu'il soit pipé ?

Ex. 7. On considère 3 urnes indiscernables. L'urne A contient 1 boule rouge et 2 noires, l'urne B contient 2 boules rouges et 6 blanches, et l'urne C contient 3 boules rouges et 7 blanches. Je choisis une urne au hasard sans savoir de laquelle il s'agit et dans cette urne je prends une boule au hasard. Elle est rouge. Quelle est la probabilité que je l'ai prise dans l'urne C ?

Ex. 8. Une maladie qu'on souhaite dépister touche 1% de la population. Un test est élaboré avec un taux de détection de 90% (90% des personnes malades auront un test positif) et un taux de faux positif de 10% (10% des personnes non malades auront un test positif). Une personne se fait tester et apprend que le test est positif ; quelle est la probabilité qu'elle soit malade ? Quelle est la probabilité qu'elle soit malade si elle apprend que le test est négatif ?

La notation $P_F(E)$ rappelle le fait que l'application $E \mapsto P(E|F)$ est une mesure de proba (pourvu que $P(F)$ soit strictement positif).

Ex. 9. Soient E, F, G trois évènements tels que $P(F \wedge G) > 0$. Expliquer la relation $P(E|G) = P(E|F \wedge G) \times P(F|G) + P(E|\bar{F} \wedge G) \times P(\bar{F}|G)$.

Ex. 10. *(Paradoxe de Simpson)* Le président d'une université américaine s'émeut de ce que le taux de réussite des filles au concours d'entrée soit significativement plus faible que celui des garçons : 35% contre 45%. Il interroge les directeurs des deux seuls départements de l'université, Sciences et Lettres, lesquels répondent qu'au concours d'entrée qu'ils organisent chacun pour leur département, les filles réussissent mieux que les garçons. Ainsi, d'après leurs statistiques, une fille se présentant au concours Sciences a 55% de chance d'être admise, contre 50% pour un garçon, et une fille se présentant au concours Lettres à 30% de chance d'être admise, contre 25% pour un garçon. Que doit conclure le président de l'université ?

Indication : on suppose qu'un candidat ne se présente qu'à un seul des deux concours Sciences et Lettres. Noter p, respectivement q, la proportion parmi les filles, respectivement parmi les garçons, de choix du concours Sciences. Calculer p et q à partir des données.