L2 Maths - Probabilités Corrigé de l'interrogation du 25 novembre 2015

Q1 $X \sim B(n,p)$ alors $E(X)=np$, $Var(X)=np(1-p)$

1,5 + 2 pts On peut obtenir ces résultats avec la loi de X : $E(X)=\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ qu'on calcule en comparant cette somme à la dérivée de $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$

De même $E(X^2)=\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ qu'on compare à la dérivée seconde de $(1+x)^n$ puis $Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

Beaucoup plus simple : X a même loi que $Y=Y_1+\dots+Y_n$ avec les $Y_i \sim B(p)$ indépendantes.

On a $E(Y)=\sum_{i=1}^{n}E(Y_i)=n\,E(Y_1)=np$

$Var(Y)=\sum_{i=1}^{n}Var(Y_i)$ car les Y_i sont indépendantes

$= n\,Var(Y_1)=np(1-p)$

Ex 2 On note X_1 et X_2 les résultats des 1er et 2ème dés, alors $X=X_1+X_2$ donc $E(X)=E(X_1)+E(X_2)$

2 + 2 pts X_1, X_2 de loi $\mathcal{U}(\{1,\dots,6\})$, $E(X_i)=\sum_{k=1}^{6}k\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\,\frac{(1+6)6}{2}=\frac{7}{2}$ (= milieu de $[1,6]$)

d'où $E(X)=2\times\frac{7}{2}=7$

$Var(X)=Var(X_1)+Var(X_2)$ car X_1 et X_2 sont indépendantes

$Var(X_i)=E(X_i^2)-(E(X_i))^2$

$E(X_i^2)=\sum_{k=1}^{6}k^2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36)=1-\frac{1}{6}+1+\frac{3}{6}+2+\frac{4}{6}+4+\frac{1}{6}+6=15+\frac{1}{6}$

d'où $Var(X_i)=15+\frac{1}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=3+\frac{1}{6}-\frac{1}{4}=3-\frac{1}{12}$ puis $Var(X)=2\,Var(X_1)=6-\frac{1}{6}$

Ex 3 a) On calcule $E(X)$ en conditionnant suivant les valeurs prises par N

2 $E(X)=\sum_{k=1}^{n}E(X|N=k)\,P(N=k)=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}E(X|N=k)$

Sachant $N=k$, X suit la loi binomiale $B(k,\frac{1}{2})$ donc $E(X|N=k)=\frac{k}{2}$.

On obtient $E(X)=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}\frac{k}{2}=\frac{1}{12}\,\frac{(1+6)6}{2}=\frac{7}{4}$.

b) De même $E(X^2)=\sum_{k=1}^{6}E(X^2|N=k)\times P(N=k)=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}E(X^2|N=k)$

On connaît $Var(X|N=k)=k\,\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{k}{4}$ (cf Q1) d'où $E(X^2|N=k)=Var(X|N=k)+(E(X|N=k))^2$

2 $=\frac{k}{4}+\left(\frac{k}{2}\right)^2=\frac{k}{4}+\frac{k^2}{4}$

On obtient $E(X^2)=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}\left(\frac{k}{4}+\frac{k^2}{4}\right)=\frac{1}{24}\left(\sum_{k=1}^{6}k\right)+\frac{1}{4\times 6}\sum_{k=1}^{6}k^2$

On a calculé dans l'ex 2 $\sum_{k=1}^{6}\frac{k^2}{6}=15+\frac{1}{6}$ d'où $E(X^2)=\frac{1}{24}\,\frac{(1+6)6}{2}+\frac{1}{4}\left(15+\frac{1}{6}\right)=\frac{7}{8}+\frac{15}{4}+\frac{1}{24}=1-\frac{1}{8}+4-\frac{1}{4}+\frac{1}{24}$

$=5-\frac{1}{3}$

puis $Var(X)=E(X^2)-E(X)^2=5-\frac{1}{3}-\left(\frac{7}{4}\right)^2=5-\frac{1}{3}-\left(2-\frac{1}{4}\right)^2=5-\frac{1}{3}-\left(4-1+\frac{1}{16}\right)$

$=2-\frac{1}{3}-\frac{1}{16}$

a-b) Pertinence : On doit avoir $Var(X)>0$ ok

1+1 X est à valeurs dans $\{0,1,\dots,6\}$ donc $0\le E(X)\le 6$ ok