1 a $P(6) = 1 - \left(P(1) + P(2) + \cdots + P(5)\right) = 1 - \left(\frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{6}$

b $E(R) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{4} + \cdots + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1 + \frac{5}{12} + 1 = 2 + \frac{16}{12} = 3 + \frac{1}{3}$

2 a $Y \sim B(10, \frac{1}{2})$ $\quad P(Y=1) = \binom{10}{1} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^9 = 10 \times \frac{1}{2^{10}} \quad \left(= \frac{5}{2^9}\right)$

b On sait ~~E(Y)~~ que $E(B(n,p)) = np$; $V(B(n,p)) = np(1-p)$ d'où $E(Y) = \frac{10}{2} = 5$; $V(Y) = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

3 a $X_1, \dots, X_5$ résultats des 5 dés $\quad X_i \sim \mathcal{U}(\{1, \dots, 6\})$

$N = X_1 + \cdots + X_5 \rightsquigarrow E(N) = E(X_1) + \cdots + E(X_5) = 5\, E(\mathcal{U}(\{1, \dots, 6\})) = 5 \times \frac{1+6}{2} = \frac{35}{2} \quad (= 17{,}5)$

$V(N) = V(X_1) + \cdots + V(X_5)$ car les X_i sont indépendantes

$= 5\, V(\mathcal{U}(\{1, \dots, 6\})) = 5\left(\frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36) - \left(\frac{7}{2}\right)^2\right) = 5\left(\frac{91}{6} - \frac{49}{4}\right)$

$= 5\, \frac{35}{12} = 5\left(3 - \frac{1}{12}\right) = 15 - \frac{5}{12}$
$= 14 + \frac{7}{12}$

$E(N^2) = V(N) + E(N)^2 = 14 + \frac{7}{12} + \frac{1225}{4} = 14 + \frac{7}{12} + 306 + \frac{1}{4} = 320 + \frac{5}{6}$

b On lance 5 dés $\rightsquigarrow N$ puis on lance N fois une pièce équilibrée $\rightsquigarrow Y$ = nbre de Pile obtenu

N à valeurs dans $\{5, \dots, 30\}$. Sachant $N = n$ pour n fixé, on a $Y \sim B(n, \frac{1}{2})$ d'où $E(Y \mid N=n) = \frac{n}{2}$

$V(Y \mid N=n) = \frac{n}{4}$

$E(Y^2 \mid N=n) = \frac{n}{4} + \left(\frac{n}{2}\right)^2$

$E(Y) = \sum_{n=5}^{30} E(Y \mid N=n)\, P(N=n) = \sum_{n=5}^{30} \frac{n}{2} P(N=n)$. On reconnaît $\frac{1}{2} \times E(N) = \frac{35}{4}$ d'après a
$= 8 + \frac{3}{4}$

De même $E(Y^2) = \sum_{n=5}^{30} E(Y^2 \mid N=n)\, P(N=n) = \sum_{n=5}^{30} \left(\frac{n}{4} + \frac{n^2}{4}\right) P(N=n) = \frac{1}{4} E(N) + \frac{1}{4} E(N^2)$

$= \frac{35}{8} + \frac{320}{4} + \frac{5}{24} = 84 + \frac{7}{12}$

d'où $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 84 + \frac{7}{12} - \frac{1225}{16} = 84 + \frac{7}{12} - 76 - \frac{9}{16} = 8 + \frac{1}{48}$

4 a Il reste dans le tiroir 20 chaussettes dont égal^t X paires complètes. Si $X=0$ il ne reste aucune paire complète ds le tiroir, etc.

b On numérote les chaussettes de 1 à 40. On peut prendre pour Ω l'ensemble des ~~[illegible]~~ 20-uplets d'él^ts de $\{1,\dots,40\}$ ou encore l'ensemble des parties à 20 él^ts de $\{1,\dots,40\}$. Dans les deux cas la probabilité sur Ω est uniforme.

On choisit la numérotation de sorte que deux chaussettes d'une même paire ont des numéros qui se suivent. Alors pour le second modèle pour Ω (l'ens. des parties à 20 él^ts) l'event $X=0$ correspond à l'ens des parties de la forme

$$\{1+\varepsilon_1, 3+\varepsilon_2, \dots, 39+\varepsilon_{20}\}$$ avec $\varepsilon_i = 0$ ou 1 suivant qu'on a choisit la chaussette gauche ou droite

Il y a 2^{20} telles parties $\rightsquigarrow$ $P(X=0) = \dfrac{2^{20}}{\#\Omega} = \dfrac{2^{20}}{\binom{40}{20}}$

c X à valeurs dans $\{0,\dots,10\}$

$X=k$ revient à choisir k paires parmi les 20 puis à choisir $20-2k$ chaussettes gauche ou droite parmi les $20-k$ paires restantes c'est à dire $20-2k$ paires parmi les $20-k$ paires restantes et pour chacune des paires choisies un él^t de $\{g,d\}$

$\rightsquigarrow$ pour le second modèle de Ω $\quad \#(X=k) = \binom{20}{k}\binom{20-k}{20-2k} 2^{20-2k}$

$$P(X=k) = \frac{\binom{20}{k}\binom{20-k}{20-2k} 2^{20-2k}}{\binom{40}{20}}$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{10} k\, P(X=k)$$

$$V(X) = \sum_{k=0}^{10} k^2 P(X=k) - E(X)^2$$

d Avec le modèle ci-dessus pour Ω on a $P(X_i=1) = \dfrac{\binom{38}{18}}{\binom{40}{20}} = \dfrac{38!}{20!\,18!}\,\dfrac{20!\,20!}{40!} = \dfrac{20\times 19}{40\times 39} \left(= \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2+1/19}\right)$

$= \dfrac{19}{78}$

$E(X_i) = P(X_i=1)$ puis $E(X) = \sum_{i=1}^{20} E(X_i) = \dfrac{190}{39}$ car $X = \sum_{i=1}^{20} X_i$

pour $i\neq j$ $X_iX_j = 1$ si les paires i et j sont au complet parmi les chaussettes tirées
$= 0$ sinon

$$E(X_iX_j) = P(X_iX_j=1) = \frac{\binom{36}{16}}{\binom{40}{20}} \quad \left(= \frac{20\times19\times18\times17}{40\times39\times38\times37} = \dots\right)$$

$$E(X^2) = E\left((X_1+\dots+X_{20})^2\right) = E\left(X_1^2+\dots+X_{20}^2 + 2\sum_{i<j} X_iX_j\right) = 20\,E(X_1^2) + 2\binom{20}{2} E(X_1X_2)$$

$$= 20\,E(X_1) + 20\times19\times E(X_1X_2) \qquad (\text{car } X_i^2 = X_i)$$

$$= 20\times\frac{19}{78} + 20\times19\times\frac{20\times19\times18\times17}{40\times39\times38\times37}$$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dots$

Si les X_i étaient indépendantes entre elles on aurait $E(X_iX_j) = E(X_i)E(X_j)$ pour $i\neq j$ donc $\dfrac{20\times19\times18\times17}{40\times39\times38\times37} = \left(\dfrac{20\times19}{40\times39}\right)^2$ ce qui n'est pas le cas.

Autre argument : $(X_1 = X_2 = \dots = X_{19} = 1) \Rightarrow X_{20} = 1$

$P(Y\leq 0) = 1-1 = 0$ donc Y à valeurs dans $[0,+\infty[$

5.a. $F_Y(t) = 1-e^{-t}$ est continûment dérivable sur $[0,+\infty[$ de dérivée $f(t) = e^{-t}$ donc $\underbrace{F_Y(t)}_{F_Y(t)=} - F_Y(0) = \int_0^t e^{-x}dx$ pour $t\geq 0$

donc Y admet une densité égale à f sur $[0,+\infty[$, 0 sur $]-\infty,0[$

On a alors $E(Y) = \int_0^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x e^{-x}dx \underset{IPP}{=} [-x e^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 0 + [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1$

b. $\ln$ est une bijection strict^t croissante $[0,1] \to [-\infty,0]$

si X est à valeurs ds $[0,1]$ donc également $1-X$ donc $\ln(1-X)$ est à valeurs dans $[-\infty,0]$ donc $-2\ln(1-X)$ est à valeurs ds $[0,+\infty]$

Pour $t\geq 0$ $\quad Y\leq t \Leftrightarrow -2\ln(1-X)\leq t$

$\Leftrightarrow \ln(1-X) \geq -\frac{t}{2}$

$\Leftrightarrow 1-X \geq \exp(-\frac{t}{2})$

$\Leftrightarrow X \leq 1-\exp(-\frac{t}{2})$

D'où $F_Y(t) := P(Y\leq t) = P(X\leq 1-\exp(-\frac{t}{2}))$

$= 1-\exp(-\frac{t}{2})$ puisque $X \sim \mathcal{U}([0,1])$ et $1-\exp(-\frac{t}{2}) \in [0,1]$

~~Plus~~ $P(Y\leq 0) = P(X\leq 0) = 0$

$1-\exp(-\frac{t}{2})$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ de dérivée $\frac{1}{2}\exp(-\frac{t}{2})$ et pour $t\geq 0$ $F_Y(t) = F_Y(t) - F_Y(0) = \int_0^t \frac{1}{2}\exp(-\frac{x}{2})dx$

donc Y admet la densité $f(t) = \frac{1}{2}\exp(-\frac{t}{2})$ si $t\geq 0$

$= 0$ si $t<0$

On reconnaît la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$