Topologie pour la Licence

Cours et exercices

Clemens Berger[1]

24 Janvier 2004

[1]Université de Nice-Sophia Antipolis, Laboratoire J.-A. Dieudonné, 06108 Nice Cedex

Table des matières

Préface

Ce texte représente le cours de topologie dispensé en Licence de Mathématiques Pures à Nice, pendant quatre années consécutives (de 2000/2001 à 2003/2004).

La topologie est une théorie mathématique relativement jeune : elle émerge (sous le nom d'analysis situs) au début du vingtième siècle dans les travaux de Hausdorff et de Tychonoff. Le besoin d'une telle théorie s'est déjà fait sentir à la fin du dix-neuvième siècle dans les travaux de Riemann et de Hilbert. Dans la recherche actuelle, la topologie joue un rôle fondamental aussi bien en Analyse Fonctionnelle qu'en Géométrie Différentielle ou encore en Topologie Algébrique.

Ce cours (de 13 séances d'une heure et demi) n'est cependant qu'une introduction aux notions de base. Il contient le strict minimum pour celui qui souhaite poursuivre les études en mathématiques. Comme la topologie repose sur relativement peu de connaissances aquises, elle présente l'occasion idéale pour l'étudiant de combler d'éventuelles lacunes en logique ou en théorie des ensembles. C'est la raison pour laquelle la plupart des énoncés sont suivis d'une preuve complète. Le dernier chapitre contient une collection d'exercices. Ces exercices servent à la fois à mieux familiariser l'étudiant avec les notions apprises en cours, et à compléter le cours là où le temps nécessaire manquait.

En ce moment même, le programme de Licence subit de profonds remaniements, dans le cadre de l'harmonisation européenne du système universitaire. Il est fort probable qu'un cours spécialisé de topologie n'aura plus sa place dans la Licence de demain. Ceci est moins regrettable pour les concepts topologiques eux-mêmes (car ceux-là s'introduiront tout seuls), que pour le rôle formateur du raisonnement topologique qui fait appel aussi bien à la perception spatiale qu'à la précision logique.

C'est Mathieu Thibaud qui a pris le soin de typographier la majeure partie de ce texte, aidé en cela par Julie Déserti, Nathalie et Laurie Canarelli, Nicolas Basbois et Laurence Mannucci. A tous, un grand merci pour le temps et les efforts consacrés.

Chapitre 1

Espaces métriques

1.1 Distances

Définition 1.1 *Un* **espace métrique** *est un ensemble E muni d'une foction $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant pour tout triplet $(x, y, z) \in E^3$:*

a) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
b) $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie)
c) $d(x, y) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire)

Une telle fonction est appelée **distance** *sur E.*

Exemple : Tout **espace vectoriel normé** $(E, \| - \|)$ est un espace métrique (E, d) pour la distance $d(x, y) = \|x - y\|$. Toute partie A d'un espace métrique (E, d_E) est un espace métrique (A, d_A) pour la distance $d_A = d_E|_{A \times A}$.

Rappel : Une **norme** sur un $\mathbb{R}$- (resp. $\mathbb{C}$-)espace vectoriel E est une fonction $\| \_ \| : E \to \mathbb{R}_+$ telle que

α) $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
β) $\| \lambda x \| = |\lambda| \cdot \| x \|$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$)
γ) $\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$

Les propriétés (α, β, γ) d'une norme entrainent les propriétés (a, b, c) de la distance associé.

Si $E = \mathbb{R}^n$, nous aurons l'occasion d'utiliser la norme $\| x \|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}$, la norme $\| x \|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$, ainsi que la norme $\| x \|_\infty = \sup(|x_1|, \ldots, |x_n|)$.

Lemme 1.2 *Une distance d sur E vérifie pour tout $(x, y, z) \in E^3$ l'inégalité*
$|d(x, z) - d(y, z)| \leqslant d(x, y)$

▲ Nous avons (par l'inégalité triangulaire) $d(x, z) - d(y, z) \leqslant d(x, y)$ et de même $d(y, z) - d(x, z) \leqslant d(y, x)$, d'où (par symétrie) $|d(x, z) - d(y, z)| \leqslant d(x, y)$. ■

Définition 1.3 *Soit (E, d) un espace métrique.*

La boule ouverte (resp. fermée) de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$ (resp. $r \geqslant 0$) est définie par

$$B(a, r) = \{x \in E \mid d(x, a) < r\} \text{ (resp. } B_f(a, r) = \{x \in E \mid d(x, a) \leqslant r\})$$

Un voisinage d'un point a est une partie de E contenant une boule ouverte centrée en a.

Un ouvert de E est une partie de E qui est voisinage de tous ses points. Un fermé de E est le complémentaire d'un ouvert de E.

Remarque : Dans un espace vectoriel normé $(E, \|-\|)$, $B(a,r)$ est le translaté de $B(0,r)$ par le vecteur a.

Lemme 1.4 *Dans un espace métrique (E,d), toute boule ouverte est un ouvert, et toute boule fermée est un fermé.*

▲ a) Il faut montrer qu'une boule ouverte est voisinage de tous ses points, c'est à dire que pour tout $x \in B(a,r)$, il existe $s > 0$ tel que $B(x,s) \subset B(a,r)$.

Nous pouvons choisir $s \leqslant r - d(a,x)$; comme $d(a,x) < r$, il existe bien $s > 0$, donc $B(x,s)$ existe. Il reste à montrer que $B(x,s) \subset B(a,r)$. Or si $y \in B(x,s)$, alors $d(x,y) < s$ et donc $\underbrace{d(a,x) + \overbrace{d(x,y)}^{<s}}_{<r} \geqslant d(a,y)$; donc, $d(a,y) < r$ et $y \in B(a,r)$.

b) Il faut montrer que le complémentaire d'une boule fermée est un ouvert, autrement dit que pour tout $x \notin B_f(a,r)$, il existe $B(x,s)$ inclus dans le complémentaire de $B_f(a,r)$. Posons $s = d(a,x) - r$. Comme $x \notin B_f(a,r)$, $d(a,x) > r$ et donc $s > 0$ d'où l'existence de $B(x,s)$. Il reste à montrer que $B(x,s) \cap B_f(a,r) = \emptyset$. En effet, si $y \in B(x,s)$ alors $d(x,y) < s$, donc (par **1.2**) $d(a,y) \geqslant |d(a,x) - d(y,x)| > r$ ce qui montre que $y \notin B_f(a,r)$. ■

1.2 Adhérence

Définition 1.5 *Un point x d'un espace métrique (E,d)* ***adhère*** *à une partie A de E si tout voisinage de x rencontre A.*

Proposition 1.6 *Un point x d'un espace métrique (E,d) adhère à A si et seulement s'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A qui converge vers x.*

▲ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x si et seulement si $d(x_n,x)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

$$\begin{aligned} x_n \to x &\Leftrightarrow d(x_n,x) \to 0 \\ &\Leftrightarrow \forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant N \quad d(x_n,x) < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists N \in \mathbb{N} \mid \quad \underbrace{\forall n \geqslant N \ x_n \in B(x,\epsilon)}_{B(x,\epsilon) \text{ contient presque tous les } x_n} \\ &\Leftrightarrow \text{ tout voisinage de } x \text{ rencontre } A. \blacksquare \end{aligned}$$

Définition 1.7 ***L'adhérence*** *$\overline{A}$ de A est l'ensemble des points adhérents de A.*

Proposition 1.8 *Soit A une partie d'un espace métrique E. Alors l'adhérence $\overline{A}$ de A est la plus petite (au sens de l'inclusion) partie fermée de E contenant A. En particulier, A est fermée si et seulement si $A = \overline{A}$*

▲ $A \subset \overline{A}$ car pour $x \in A$, tout voisinage de x rencontre A. Nous allons montrer que le complémentaire de $\overline{A}$ est ouvert ($\overline{A}$ est alors fermé). Par définition de $\overline{A}$, nous savons que si $x \notin \overline{A}$, alors il existe un voisinage ouvert de x qui ne rencontre pas A. Pour tout $x \notin \overline{A}$, choisissons un tel ouvert U_x et posons $U = \bigcup_{x \notin \overline{A}} U_x$. Toute réunion d'ouverts étant ouverte (cf. **2.2**), U est une partie ouverte de E. Aucun des U_x ne rencontre A, donc la réunion non plus, soit $U \subseteq E \setminus \overline{A}$. Inversement, si $x \notin \overline{A}$, alors $x \in U$, par construction de U, d'où $U = E \setminus \overline{A}$.

Enfin, $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A. Pour cela, supposons $A \subset F$ avec F fermé et montrons que $\overline{A} \subset F$. De manière équivalente, montrons que $E \setminus F \subset E \setminus \overline{A}$. En effet, si $x \notin F$, il s'ensuit que $x \in U = E \setminus F$ ouvert qui ne rencontre pas A donc $x \notin \overline{A}$. ■

1.3 Continuité

Définition 1.9 *Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques. Une application $f : E \to E'$ est dite continue en $x \in E$ si, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E qui converge vers x, la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E' converge vers l'image de x par f. Soit :*

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \to \infty} x_n)$$

$f : E \to E'$ est dite **continue** *si f est continue en tout $x \in E$.*

Théorème 1.10 *Pour une application $f : (E, d) \to (E', d')$, les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :*

$\imath$) f est continue.

$\imath\imath$) $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ pour tout $A \subset E$.

$\imath\imath\imath$) L'image réciproque de tout fermé de E' est un fermé de E.

$\imath v$) L'image réciproque de tout ouvert de E' est un ouvert de E.

▲ $\imath$) $\Rightarrow$ $\imath\imath$) Soit $y \in f(\overline{A})$, c'est à dire qu'il existe $x \in \overline{A}$ tel que $f(x) = y$. Comme $x \in \overline{A}$, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x. Comme f est continue (hypothése $\imath$), $f(x_n)$ converge vers $f(x) = y$. Comme $x_n \in A$, nous avons $f(x_n) \in f(A)$. Par conséquent, $y = f(x) \in \overline{f(A)}$.

$\imath\imath$) $\Rightarrow$ $\imath\imath\imath$) Soit $A' \subset E'$ un fermé. Par définition, l'image réciproque $A = f^{-1}(A') = \{x \in E \mid f(x) \in A'\}$ vérifie $f(f^{-1}(A')) \subseteq A'$ (égalité si f est surjective) et $f^{-1}(f(\tilde{A})) \supseteq \tilde{A}$ (égalité si f est injective). Nous voudrions montrer que sous l'hypothèse $\imath\imath$), A est fermé. Nous allons montrer $A = \overline{A}$, cf. **1.8**. Nous savons déjà que $A \subset \overline{A}$; il reste à montrer $\overline{A} \subset A$. On a

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} = \overline{f(f^{-1}(A'))} \subset \overline{A'} \overset{fermé}{=} A'$$

$f(\overline{A}) \subset A'$ équivaut par définition à $\overline{A} \subset f^{-1}(A') = A$.

$\imath\imath\imath$) $\Rightarrow$ $\imath v$) Nous utilisons la propriété suivante : pour toute application f, nous avons $f^{-1}(E' \backslash A') = E \backslash f^{-1}(A')$. Nous obtenons donc $f^{-1}(U') = f^{-1}(E' \backslash A') = E \backslash f^{-1}(A')$. D'aprés $\imath\imath\imath$) $f^{-1}(A')$ est un fermé de E donc son complémentaire est un ouvert $U = f^{-1}(U')$.

$\imath v$) $\Rightarrow$ $\imath$) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergeant vers x. Il faut monter que sous l'hypothèse $\imath v$), $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$ dans (E', d'), c'est à dire que toute boule $B(f(x), \epsilon)$ contient presque tous les $f(x_n)$.

L'hypothèse $\imath v$) implique que l'image réciproque $U = f^{-1}(B(f(x), \epsilon))$ est un ouvert de E ; comme $f(x) \in B(f(x), \epsilon)$, U contient x et il existe $B(x, \delta) \subset U$. Comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers x, presque tous les x_n appartiennent à $B(x,\delta)$. Par conséquent, presque tous les $f(x_n)$ appartiennent à $f(B(x,\delta)) \subset f(U) \subset B(f(x),\epsilon)$. ■

Corollaire 1.11 *Soit* $Id_E : (E,d) \longrightarrow (E,d')$ *(donc* $E = E'$ *et* $f = Id_E$*). Alors, il y a équivalence entre :*

– Id_E *est continue.*
– *Toute suite d-convergente est d'-convergente.*
– *Tout ouvert de* (E,d') *est un ouvert de* (E,d)*.*

En particulier, les distances d et d' induisent la même notion de convergence (soit : d-convergence équivaut à d'-convergence) si et seulement si l'ensemble des ouverts (la ***topologie****) de* (E,d) *est identique à l'ensemble des ouverts (la* ***topologie****) de* (E,d')*.*

Définition 1.12 *Deux normes* $\|\ \_\ \|$ *et* $\|\ \_\ \|'$ *sur un espace vectoriel E sont équivalentes, s'il existe* $\alpha,\beta \in \mathbb{R}_+^*$ *tels que pour tout* $x \in E$ *:*

$$\alpha\|x\| \leqslant \|x\|' \leqslant \beta\|x\|$$

Proposition 1.13 *Deux normes équivalentes sur E définissent la même notion de convergence et donc la même topologie sur E.*

Théorème 1.14 *Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

▲ La preuve, nécessitant des résultats plus avancés, sera faite au chapitre 5. ■

Chapitre 2

Espaces topologiques

2.1 Définitions

Définition 2.1 *Un* **espace topologique** (E, τ_E) *est un ensemble* E *muni d'une topologie* τ_E*. Une topologie est la donnée d'une collection de parties de* E*, appelées les* **ouverts** *de* E*, vérifiant les trois axiomes suivants :*

$(\imath)$ $\emptyset \in \tau_E$ *et* $E \in \tau_E$

$(\imath\imath)$ *Une réunion d'ouverts est ouverte.*

$(\imath\imath\imath)$ *Une intersection* ***finie*** *d'ouverts est ouverte.*

Un **fermé** *de* (E, τ) *est une partie de* E *dont le complémentaire est un ouvert.*

Lemme 2.2 *Les ouverts d'un espace métrique* (E, d) *forment une topologie.*

▲ $(\imath)$ Si $U = \emptyset$, U est ouvert ; si $x \in U = E$, toutes les boules centrées en x conviennent.

$(\imath\imath)$ $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ avec les U_i ouverts. Donc si $x \in U$, alors $x \in U_i$ pour un certain i. Comme U_i est ouvert, il existe une boule $B(x, \epsilon) \subset U_i \subset \bigcup_{i \in I} U_i = U$ donc U est un ouvert.

$(\imath\imath\imath)$ $U = U_1 \cap \ldots \cap U_n$ avec U_i ouvert pour $i = 1 \ldots n$. $x \in U$ implique l'existence d'une boule $B(x, \epsilon_i) \subset U_i$, $i = 1 \ldots n$. Nous posons $\epsilon = \min(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$, d'où $B(x, \epsilon) \subset B(x, \epsilon_i)$ $\forall i = 1 \ldots n$. Donc $B(x, \epsilon) \subset U$ et U est ouvert.■

Remarques :

1) La topologie sur E est également déterminée par l'ensemble des fermés de E. Cette collection de fermés satisfait (en appliquant les lois de Morgan) les axiomes suivants :

$(\imath')$ $\emptyset$ et E sont des fermés.

$(\imath\imath')$ Une intersection de fermés est fermée.

$(\imath\imath\imath')$ Une réunion **finie** de fermés est fermée.

2) $\underset{\text{E.V.N.}}{(E, \|\text{-}\|)} \overset{\text{définit}}{\rightsquigarrow} \underset{\text{E.M.}}{(E, d)} \overset{\text{définit}}{\rightsquigarrow} \underset{\text{E.T.}}{(E, \tau)}$

Il s'agit de généralisations. Il y a des espaces métriques qui ne sont pas des espaces vectoriels normés et il y a des espaces topologiques qui ne sont pas des espaces métriques.

3) La topologie "discrète" sur un ensemble E est définie par $\tau_E = \mathcal{P}(E)$, toute partie de E est alors à la fois un ouvert et un fermé. Un espace topologique dont la topologie est discrète,

est appelée **discret**. Un espace est discret si et seulement si tous les singletons $\{x\}$ sont des ouverts. La dernière propriété s'exprime aussi en disant que tous les points de E sont **isolés**.

4) Dans un espace topologique E, les notions de voisinage et d'adhérence se définissent comme suit : un **voisinage** de $x \in E$ est une partie V de E contenant un ouvert $U \ni x$. L'**adhérence** $\overline{A}$ de A est l'ensemble des points $x \in E$ tels que tout voisinage de x rencontre A. En particulier, un **voisinage ouvert** de x est un voisinage de x qui est ouvert, donc tout simplement un ouvert contenant x. Un **voisinage fermé** de x est un voisinage de x qui est fermé ce qui est donc un fermé contenant un ouvert contenant lui-même x.

Proposition 2.3 *Toute partie A d'un espace topologique E définit une partition de E selon*

$$E = \underbrace{\mathring{A}}_{\text{Intérieur de } A} \bigsqcup \underbrace{\mathit{Front}(A)}_{\text{Frontière de } A} \bigsqcup \underbrace{E \setminus \overline{A}}_{\text{Extérieur de } A}$$

$\mathring{A} = \{x \in A | \textit{ il existe un ouvert } U \textit{ tel que } x \in U \subset A\}$

$\mathit{Front}(A) = \{x \in E | \textit{ tout voisinage de } x \textit{ rencontre à la fois } A \textit{ et } E \setminus A\}$.

▲ Il faut monter que tout $x \in E$ vérifie une et une seule propriété parmi les suivantes :
$x \in \mathring{A}$, $x \in \mathrm{Front}(A)$, $x \in E \setminus \overline{A}$.
$x \in \mathring{A} \Leftrightarrow \exists$ voisinage ouvert U de x tel que $U \subset A$.
$x \in \mathrm{Front}(A) \Leftrightarrow \forall$ voisinage ouvert U de x, $U \cap A \neq \emptyset$ et $U \cap (E \setminus A) \neq \emptyset$
$x \in E \setminus \overline{A} \Leftrightarrow$ il existe un voisinage ouvert U de x tel que $U \cap A = \emptyset$.

Soit tous les voisinages de x rencontrent A et $E \setminus A$ et $x \in \mathrm{Front}(A)$, soit, il existe un voisinage qui ne rencontre pas $E \setminus A$ et $x \in \mathring{A}$, soit il existe un voisinage qui ne rencontre pas A et $x \in E \setminus \overline{A}$. ■

Corollaire 2.4 $\overline{A} = \mathring{A} \sqcup \mathrm{Front}(A)$ *et* $\overline{E \setminus A} = \mathrm{Front}(A) \sqcup E \setminus \overline{A}$
En particulier, $\mathring{A} = E \setminus \overline{(E \setminus A)}$ *est un ouvert de E : le plus grand ouvert de E inclus dans A. Par conséquent, A est ouvert si et seulement si $\mathring{A} = A$, ou encore, si et seulement si A est voisinage de tous ses points.*

2.2 Densité, homéomorphie

Définition 2.5 *Une partie A d'un espace topologique E est* **dense** *dans E si l'adhérence de A est E lui-même, soit : $\overline{A} = E$.*

Lemme 2.6 *A est dense dans E si et seulement si tout ouvert non vide de E rencontre A.*

Exemple : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
Raison 1 : Par construction de $\mathbb{R}$, tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels.
Raison 2 : Le lemme : tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient des rationnels.

Remarque :
1) Soit A une partie dense dans E et B une partie de E telle que $A \subset B$ alors B est aussi dense dans E. En effet, si $A \subset B$, alors $E = \overline{A} = \overline{B} \subset E$, soit $\overline{B} = E$ donc B est dense.
2) L'unique partie de E qui est à la fois dense et fermée, c'est E lui-même. En effet, si A est dense et fermé, alors $A = \overline{A} = E$.

Définition 2.7 *Une application $f : E \longrightarrow E'$ entre espaces topologiques E et E' est* ***continue*** *si l'image réciproque d'un ouvert (resp. fermé) de E' est un ouvert (resp. fermé) de E.*

Remarques :

1) $Id_E : E \longrightarrow E$ est continue

2) Si $f : E \longrightarrow E'$ et $g : E' \longrightarrow E''$ sont continues, alors $g \circ f$ est aussi continue. En effet, si U ouvert de E'', alors $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ est ouvert, donc $g \circ f$ est continue.

Définition 2.8 *Un espace topologique est* ***séparé*** *si pour tous points distincts x, y de E il existe des ouverts* ***disjoints*** *U_x et U_y de E tels que $x \in U_x$ et $y \in U_y$.*

Remarque : Tous les espaces métriques sont séparés.

Proposition 2.9 *Soient $f, g : E \longrightarrow E'$ deux applications continues d'espaces topologiques avec E'* ***séparé****. Alors l'ensemble $\{f = g\} = \{x \in E |\ f(x) = g(x)\}$ est un fermé de E.*

▲ Montrons que $E \setminus \{f = g\}$ est un ouvert de E. Nous avons $E \setminus \{f = g\} = \{f \neq g\}$. Si $f(x) \neq g(x)$, il existe deux ouverts disjoints U et V de E' tels que $f(x) \in U$ et $g(x) \in V$. Nous posons $W = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$. Alors d'une part $f(W) \subset U$ et $g(W) \subset V$, donc $f(x) \neq g(x)$ pour $x \in W$; d'autre part, W est un ouvert en tant qu'intersection d'ouverts (f et g sont continues). Il s'ensuit que $\{f \neq g\}$ est voisinage de tous ses points donc un ouvert.■

Corollaire 2.10 *Soient $f, g : E \longrightarrow E'$ deux applications continues d'espaces topologiques. Nous supposons que E' est séparé. Si f et g coïncident sur une partie dense de E, alors f et g coïncident sur E.*

▲ $\{f = g\}$ est dense et fermé, donc $\{f = g\} = E$, c'est-à-dire $f = g$.■

Proposition 2.11 *Soient $f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues, alors $\{f < g\}$ est un ouvert de E, et $\{f \leqslant g\}$ est un fermé de E.*

▲ En effet, $\{f < g\}$ s'identifie à l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}_+^\star$ de $\mathbb{R}$ par rapport à l'application continue $g - f$. De même, $\{f \leqslant g\}$ s'identifie à l'image réciproque du fermé $\mathbb{R}_+$.■

Définition 2.12 *Une bijection f d'espaces topologiques est un* ***homéomorphisme*** *si f et f^{-1} sont des applications continues. Deux espaces topologiques sont* ***homéomorphes*** *s'il existe un homéomorphisme entre eux.*

† **Attention :** Le fait que f soit bijective continue n'implique pas que sa réciproque soit aussi continue.

Exemples d'homéomorphismes :

a) $\tan :]-\pi/2, \pi/2[\leftrightarrows \mathbb{R} : \arctan$

b) Tous les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ sont homéomorphes entre eux.

c) Dans $(\mathbb{R}^n, \|\_\|)$ deux boules ouvertes (fermées) sont homéomorphes.

d) Soient N_1 et N_2 deux normes différentes sur $\mathbb{R}^n$. Alors les boules ouvertes (fermées) pour les deux normes sont homéomorphes.

2.3 Topologie-produit, topologie induite

Définition-Proposition 2.13 *Soient (E_1, τ_1) et (E_2, τ_2) deux espaces topologiques. Alors il existe sur $E_1 \times E_2$ une unique topologie τ, appelée la* ***topologie-produit****, telle qu'une application $f : E \longrightarrow E_1 \times E_2$ est continue si et seulement si les deux projections $\pi_1 \circ f$ et $\pi_2 \circ f$ le sont. Une partie U de $E_1 \times E_2$ est* ***ouverte*** *pour la topologie-produit si pour tout $x \in U$ il existe un ouvert U_1 de E_1 et un ouvert U_2 de E_2 tels que $x \in U_1 \times U_2 \subset U$.*

Lemme 2.14 *La topologie canonique sur $\mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire celle induite par une norme sur $\mathbb{R}^n$) s'identifie à la topologie-produit. En particulier, une application $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue si et seulement si toutes les projections $\pi_i \circ f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, le sont.*

▲ Nous considérons la norme $\|\_\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$. Les boules ouvertes pour cette norme sont des cubes $B_\infty(x, \epsilon) =]x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon[\times \cdots \times]x_n - \epsilon, x_n + \epsilon[$. Il s'agit d'un produit de n intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Comme deux normes sur $\mathbb{R}^n$ induisent la même topologie, cela montre que la topologie canonique sur $\mathbb{R}^n$ s'identifie à la topologie-produit.■

Définition-Proposition 2.15 *Pour toute partie A d'un espace topologique (E, τ_E), il existe une unique topologie τ_A, appelée* ***topologie induite sur*** *A, telle que pour toute application continue $f : E \longrightarrow E'$, la restriction$f_{|A} : A \longrightarrow E'$ soit également continue. En fait, une partie U_A de A est* ***ouverte*** *pour τ_A s'il existe un ouvert U de E tel que $U_A = U \cap A$.*

En particulier, l'inclusion $i : (A, \tau_A) \hookrightarrow (E, \tau_E)$ est continue. En effet, pour tout ouvert U de E, l'image réciproque $i^{-1}(U) = \{x \in A | i(x) \in U\} = U \cap A = U_A$ est un ouvert de A.

† **Attention :** $A \subset E$ mais $\tau_A \not\subset \tau_E$ en général. Autrement dit, il y a des ouverts de A qui ne sont pas des ouverts de E. On a $\tau_A \subset \tau_E$ si et seulement si A est un ouvert de E.

Exemples :

1) $([0, 1], \tau_{[0,1]}) \hookrightarrow (\mathbb{R}, \tau_\mathbb{R})$, mais les ouverts de $[0, 1]$ contiennent (entre autres) les intervalles de types $[0, \alpha[$ et $]\beta, 1]$ qui ne sont pas des ouverts de $\mathbb{R}$.

2) Il en est de même pour $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$; dans $\mathbb{Z}$ muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$, les singletons sont des ouverts mais ce sont des fermés pour la topologie de $\mathbb{R}$. Un point $x \in A$ d'une partie A de E est isolé dans A s'il existe un ouvert U de E tel que $U \cap A = \{x\}$. Il s'ensuit que (A, τ_A) est un espace discret si et seulement si tous les points de A sont isolés dans A. Ceci est en particulier le cas pour $\mathbb{Z}$, considéré comme partie de $\mathbb{R}$.

3) La topologie induite τ_A sur une partie A d'un espace métrique (E, d) est celle induite par la distance restreinte $d_A = d_{|A \times A}$.

Chapitre 3

Espaces complets et espaces compacts

3.1 Complétude

Définition 3.1 *Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points d'un espace métrique (E,d) est une **suite de Cauchy** si :*

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n, m \geqslant N \quad d(x_n, x_m) < \epsilon$$

Proposition 3.2 *Dans un espace métrique (E,d), toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

† **Attention :** La réciproque est fausse en général.

Définition 3.3 *Un espace métrique (E,d) est **complet** si toute suite de Cauchy de points de E est convergente.*

L'avantage des espaces complets est que dans de tels espaces, il n'est pas utile de connaitre la limite d'une suite pour montrer qu'elle est convergente, il suffit de montrer qu'elle est de Cauchy.

Exemple : $(\mathbb{Q}, ||)$ n'est pas complet mais $(\mathbb{R}, ||)$ est complet. Si un espace métrique n'est pas complet, nous pouvons toujours le "compléter" en lui ajoutant les limites de toutes les suites de Cauchy modulo une relation d'equivalence ; c'est le cas ici, $(\mathbb{R}, ||)$ est le "complété" de $(\mathbb{Q}, ||)$.

Il faut bien noter que les notions de complétude, convergence et de suite de Cauchy sont des notions **métriques** et ne s'appliquent pas dans les espaces topologiques généraux.

Lemme 3.4 *Un sous-espace métrique (A, d_A) d'un espace complet (E, d_E) est complet si et seulement si A est une partie fermée de E.*

▲ $A \subset E$ est fermé si et seulement si toutes les suites convergentes de A convergent vers un élément de A. (A,d) est un espace métrique complet si toutes les suites de Cauchy d'éléments de A convergent dans A.

Si (E,d) complet, alors il y a équivalence entre suites convergentes et suites de Cauchy, donc les deux propriétés sont équivalentes. ■

Exemples :
$([a,b], d_{[a,b]})$ est un sous-espace métrique complet de $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$, mais $(]a,b[, d_{]a,b[})$ ne l'est pas.

Lemme 3.5 *Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques complets ; alors, pour la distance d_N sur $E_1 \times E_2$ induite par une norme N sur $\mathbb{R}^2$, $(E_1 \times E_2, d_N)$ est un espace métrique complet.*

▲ Nous montrons que $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(E_1 \times E_2, d_N)$ si et seulement si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (E_1, d_1) et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy dans (E_2, d_2).

$$\left.\begin{array}{rccc} N: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ d_1: & E_1 \times E_2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ d_2: & E_2 \times E_2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \end{array}\right\} \begin{array}{rccc} d_N: & (E_1 \times E_2) \times (E_1 \times E_2) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & (x,y),(x',y') & \longmapsto & N(d_1(x,x'), d_2(y,y')) \end{array} \blacksquare$$

Définition 3.6 *Soit f une fonction de E dans $\mathbb{R}$; la* **norme sup** *de f est définie par*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in E} |f(x)|$$

Nous dirons alors que f est **bornée** *si et seulement si $\|f\|_\infty < +\infty$.*
En munissant $\mathcal{F}_b(E,\mathbb{R})$ des deux lois suivantes :

$$(f+g)(x) \overset{déf}{=} f(x) + g(x)$$
$$(\lambda f)(x) \overset{déf}{=} \lambda f(x) \ \lambda \in \mathbb{R}$$

nous en faisons un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

<u>Remarque :</u> $\| \_ \|_\infty$: $\mathcal{F}(E,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ n'est qu'une semi-norme. Nous définissons une topologie associée à une **semi-norme** ou à une semi-distance comme pour une norme ou une distance : un ouvert de $\mathcal{F}(E,\mathbb{R})$ est défini comme étant une partie de $\mathcal{F}(E,\mathbb{R})$ qui est voisinage de tous ses points. La notion de boule ouverte pour une **semi-distance** est identique à la notion de boule ouverte pour une **distance**.

La topologie définie pour $\mathcal{F}(E,\mathbb{R})$ ci-dessus s'appelle **la topologie de la convergence uniforme**. En effet, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers f pour $\| \_ \|_\infty$ si et seulement si :

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant N \quad \| f - f_n \|_\infty < \epsilon$$

donc :

$$\forall x \in E \quad \forall n \geqslant N \ |f(x) - f_n(x)| < \epsilon$$

Si $E = \mathbb{R}$, cela revient à dire que pour tout $n \geqslant N$, le graphe de f_n est contenu dans une ϵ-bande autour du graphe de f.

Théorème 3.7 $(\mathcal{F}(E,\mathbb{R}), \| \_ \|_\infty)$ *est un espace complet.*

▲ Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Donc

$$\forall \epsilon \in \mathbb{N} \quad \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n,m \geqslant N \quad \| f_n - f_m \|_\infty < \epsilon$$

Par conséquent,

$$\forall n, m \leqslant N \quad \forall x \in E \ |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

Donc pour tout $x \in E$, la suite de nombres réels $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, mais comme $(\mathbb{R}, ||)$est complet, cette suite de Cauchy converge vers un réel que nous noterons $f(x)$. Nous définissons une fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$. Il suffit alors de montrer que f_n converge vers f pour la norme $\| \_ \|_\infty$. (Laissé en exercice) ■

Corollaire 3.8 *Les parties :*

$\mathcal{F}_b(E, \mathbb{R}) = \{$ *fonctions bornées de* E *dans* $\mathbb{R}$ $\}$
$\mathcal{C}(E, \mathbb{R}) = \{$ *fonctions continues de* E *dans* $\mathbb{R}$ $\}$
$\mathcal{C}_b(E, \mathbb{R}) = \mathcal{F}_b(E, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(E, \mathbb{R})$
sont des fermés de $(\mathcal{F}(E, \mathbb{R}), \| \_ \|_\infty)$*. En particulier, ce sont des espaces* ***complets*** *pour la convergence uniforme.*

▲ Une limite **uniforme** de fonctions continues est continue. De même, une limite uniforme de fonctions bornées est bornée. ■

Définition 3.9 *Une fonction* $f : (A, d) \longrightarrow (E, d')$ *est dite* ***uniformément continue*** *si*

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* | \ \forall x, y \in A \quad d(x, y) < \eta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$$

Théorème 3.10 *Soit* A *une partie dense d'un espace métrique* (E, d) *et soit* (E', d') *un espace métrique complet. Alors toute fonction uniformement continue* $f : (A, d) \longrightarrow (E', d')$ *admet un prolongement continu unique* $F : (E, d) \longrightarrow (E', d')$*tel que* $F_{|_A} = f$.

▲ L'unicité a déjà été montrée (A dense dans E et F continue). Il faut établir l'existence de F. Comme A dense dans E, chaque $x \in E$ est limite d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A.

Comme F doit être continue, il est naturel de poser $F(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Il reste à montrer :

– $F(x)$ ne dépend pas du choix de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to x$.
– $F : E \longrightarrow E'$ est continue.

Le premier point découle de l'hypothèse f uniformément continue.

Pour le second point, si $x_n \to x$ dans (E, d) alors $F(x_n) \to F(x)$ dans (E', d'), car chaque x_n dans E est limite d'une suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de points de A. Nous avons $x_n \to x$ et $x_{n_k} \to x_n$. Alors tout voisinage de x contient presque tous les x_{n_k}. Comme $x_{n_k} \in A$, nous obtenons $\lim_{n,k} f(x_{n_k}) = F(x)$ par définition de F, mais également :

$$\lim_{n,k} f(x_{n_k}) = \lim_n (\lim_k f(x_{n_k})) = \lim_n F(x_n)$$

Nous obtenons donc bien $F(x) = \lim_n F(x_n)$. ■

Définition 3.11 *Une application* $\varphi : (E, d) \longrightarrow (E', d')$ *est* k**-lipschitzienne** *si*

$$\exists k \in \mathbb{R}_+ \ \forall x, y \in E \quad d(\varphi(x), \varphi(y)) \leqslant k \cdot d(x, y)$$

Si $k < 1$, φ *est* **contractante**.

Théorème 3.12 (Théorème du Point Fixe) *Soit (E, d) un espace métrique complet et $\varphi : E \longrightarrow E$ une application contractante. Alors φ admet un unique point fixe, i.e. il existe un unique point $x \in E$ tel que $\varphi(x) = x$.*

▲ L'idée est de construire x comme limite d'une suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Choisissons arbirairement $x_0 \in E$ et posons $x_n = \varphi \circ \cdots \circ \varphi(x_0)$. Nous avons :

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(\varphi(x_{n-1}), \varphi(x_n)) = \cdots = d(\varphi^n(x_0), \varphi^n(x_1)) \leqslant k^n \cdot d(x_0, x_1)$$

Plus généralement : $d(x_n, x_{n+m}) \leqslant k^n \cdot d(x_0, x_m)$; mais aussi :

$$d(x_0, x_m) \leqslant d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \leqslant (1 + k + \cdots + k^{m-1}) \cdot d(x_0, x_1)$$

Nous obtenons donc la formule générale :

$$\forall n, m \in \mathbb{N}\ d(x_n, x_{n+m}) \leqslant (1 + k + \cdots + k^{m-1})k^n \cdot d(x_0, x_1) \leqslant \frac{k^n}{1-k} \cdot d(x_0, x_1)$$

Nous en déduisons donc que pour $p \leqslant q, \quad d(x_p, x_q) \leqslant \frac{k^p}{1-k} \cdot d(x_0, x_1)$. La suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est donc une suite de Cauchy. Comme (E, d) est complet, cette suite converge vers $x \in E$.

Quant à l'affirmation $\varphi(x) = x$, la contractance de φ implique que φ est continue donc $x = \lim_p\ x_{p+1} = \lim_p\ \varphi(x_p) = \varphi(\lim_p\ x_p) = \varphi(x)$.

Enfin, pour l'unicité, il suffit de supposer $\varphi(x) = x$ et $\varphi(y) = y$. Nous obtenons donc que $d(x, y) \geqslant 1/k \cdot d(\varphi(x), \varphi(y)) = 1/k \cdot d(x, y)$ avec $k < 1$, ce qui implique que $d(x, y) = 0$ et donc que $x = y$, d'où l'unicité. ■

3.2 Compacité

Définition 3.13 *Un espace topologique E est **compact** si E est séparé et si tout recouvrement de E par des ouverts contient un recouvrement fini de E. Ce qui revient à : si $E = \bigcup_{i\in I} U_i$ avec les U_i ouverts, alors il existe une partie finie $\{i_1, i_2, \cdots, i_n\}$ de I tel que $E = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$. Nous dirons également qu'il est possible d'extraire de tout recouvrement de E par des ouverts un recouvrement fini. Il est alors dit que E vérifie la* **propriété de Borel-Lebesgue**.

Définition 3.14 *Une partie A d'un espace topologique (E, τ_E) est **compacte** si (A, τ_A) est un espace compact. Autrement dit, pour tous $x, y \in A$, il existe des ouverts U_x, U_y de E tels que $x \in U_x$, $y \in U_y$, $U_x \cap U_y \cap A = \emptyset$ et pour tout recouvrement de A par des ouverts de E : $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, il existe un recouvrement fini $A \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$ avec $\{i_1, \cdots, i_n\} \subset I$.*

Lemme 3.15 *Toute partie fermée d'un espace compact est compacte.*

▲ Si E est compact, E est en particulier séparé, et toute partie $A \subset E$ est séparée. Il suffit donc de montrer que A satisfait la propriété de Borel-Lebesgue si A est fermé.

Supposons donc qu'il existe un recouvrement $\bigcup_{i\in I} U_i$ de A par des ouverts U_i de E. Nous déduisons de cela un recouvrement de E : $E = (E \setminus A) \cup (\bigcup_{i\in I} U_i)$ qui est un recouvrement de E par des ouverts car A est fermé. Puisque E est compact, nous pouvons en extraire un recouvrement fini $E = (E \setminus A) \cup (U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n})$. Par conséquent, $A \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$, A vérifie donc la propriété de Borel-Lebesgue. ■

Lemme 3.16 *Une partie compacte d'un espace séparé est fermée. En particulier, pour un espace compact, une partie est fermée si et seulement si elle est compacte.*

▲ Soit A une partie compacte d'un espace topologique E séparé. Nous allons montrer que $E \setminus A$ est ouvert dans E, soit que pour tout $x \in E \setminus A$, il existe U tel que $x \in U \subset E \setminus A$.

Nous fixons $x \in E \setminus A$ et comme E est séparé, pour tout $y \in A$, il existe deux ouverts de E disjoints U_x^y contenant x et U_y^x contenant y. Par conséquent, nous avons $\bigcup_{y\in A} U_y^x$ forme un recouvrement de A par des ouverts disjoints de E. Puisque A est compact, nous pouvons en extraire un recouvrement fini : $A \subset U_{y_1}^x \cup \cdots \cup U_{y_n}^x$.

Par construction, nous avons pour tout $y \in A$,$U_x^y \cap U_y^x = \emptyset$. Par conséquent : $U = U_x^{y_1} \cap \cdots \cap U_x^{y_n}$ est un ouvert de E contenant x, et disjoint à la réunion $U_{y_1}^x \cup \cdots \cup U_{y_n}^x$ qui est elle-même un ouvert de E contenant A, donc, U ne rencontre pas A. ■

Proposition 3.17 *Soit $f : E \longrightarrow E'$ une application continue d'espaces topologiques avec E' séparé. Alors l'image par f d'une partie compacte de E est une partie compacte de E'.*

▲ Nous supposons $A \subset E$ compacte. Il faut montrer que $f(A)$ est compacte. Puisque E' est séparé, il suffit d'établir la propriété de Borel-Lebesgue pour $f(A)$.

Suposons donc donné un recouvrement $f(A) \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ avec les U_i ouverts de E'. Cela est équivalent à $A \subset f^{-1}(\bigcup_{i\in I}(U_i))$ et donc à $A \subset \bigcup_{i\in I}(f^{-1}(U_i))$ et les $f^{-1}(U_i)$ sont des ouverts de E. Mais alors, puisque A est compact, nous pouvons extraire du précédent recouvrement un recouvrement fini $A \subset f^{-1}(U_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(U_n) = f^{-1}(U_1 \cup \cdots \cup U_n)$ ce qui est équivalent à $f(A) \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n$, donc $f(A)$ vérifie la propriété de Borel-Lebesgue. ■

Corollaire 3.18 *Soit $f : E \longrightarrow E'$ une bijection continue d'espaces topologiques avec E compact et E' séparé. Alors, f^{-1} est aussi continue (i.e. f est un homéomorphisme).*

▲ f^{-1} continue si et seulement si l'image réciproque $(f^{-1})^{-1}(U)$ d'un ouvert U de E est un ouvert de E', donc si et seulement si $f(U)$ est un ouvert de E'. Autrement dit, une bijection continue est un homéomorphisme si et seulement si elle transforme un ouvert en un ouvert . Puisque f est bijective, $f(E \setminus U) = E' \setminus f(U)$ donc une bijection continue transforme ouvert en ouvert si et seulement si elle transforme fermé en fermé. Mais pour $f : E \longrightarrow E'$ avec E compact et E' séparé, si A est fermé dans E, A est compact, donc comme f est continue, $f(A)$ l'est aussi et donc, $f(A)$ est fermé car E' séparé. ■

3.3 Parties compactes de $\mathbb{R}^n$

Définition 3.19 *Un point $x \in E$ est un* **point d'accumulation** *d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de E si tout voisinage de x contient une infinité de termes x_n.*

Proposition 3.20 *x est un point d'accumulation de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si x est adhérent à $\bigcup_{n\geqslant k}\{x_n\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ soit : x point d'accumulation si et seulement si $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}}(\overline{\bigcup_{n\geqslant k}\{x_n\}})$.*

Proposition 3.21 *Toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments d'un espace compact admet au moins un point d'accumulation.*

▲ Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il n'existe pas de point d'accumulation :

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}}(\overline{\bigcup_{n\geqslant k}\{x_n\}}) = \emptyset \iff E = E\setminus \bigcap_{k\in\mathbb{N}}(\overline{\bigcup_{n\geqslant k}\{x_n\}}) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \overbrace{(E\setminus \underbrace{\overline{\bigcup_{n\geqslant k}\{x_n\}}}_{\text{fermé}})}^{ouvert}$$

nous avons donc réussi à écrire E comme une réunion d'ouverts. Comme E est compact, nous pouvons en extraire un recouvrement fini :

$$E = E\setminus \overline{\bigcup_{n\geqslant k_1}\{x_n\}} \cup \cdots \cup E\setminus \overline{\bigcup_{n\geqslant k_m}\{x_m\}}$$

Si $k < k'$, alors $\overline{\bigcup_{n\geqslant k}\{x_n\}} \supset \overline{\bigcup_{n\geqslant k'}\{x_n\}}$ et alors $E\setminus\overline{\bigcup_{n\geqslant k}\{x_n\}} \subset E\setminus\overline{\bigcup_{n\geqslant k'}\{x_n\}}$. Soit : $E = E\setminus\overline{\bigcup_{n\geqslant k}\{x_n\}}$ pour $k = \max(k_1;\cdots,k_m)$, et cela signifie que $\overline{\bigcup_{n\geqslant k}\{x_n\}} = \emptyset$ ce qui est absurde. ■

Théorème 3.22 *Un espace métrique est compact si et seulement s'il est* ***complet*** *et* ***totalement borné*** *(i.e. pour tout $\epsilon > 0$ recouvert par un nombre fini de boules de rayon ϵ).*

▲ Compact ⇒ complet et totalement borné

Dans un espace compact, toutes les suites ont des points d'accumulation. Une suite de Cauchy qui admet un point d'accumulation **converge** vers ce point d'accumulation. En particulier, toute suite de Cauchy d'un espace compact converge, d'où la complétude. De plus, nous pouvons, pour tout $\epsilon > 0$, recouvrir E par $\bigcup_{x\in E} B(x,\epsilon)$. Puisqu'une boule ouverte est un ouvert, la propriété de Borel-Lebesgue dit que parmi les boules, il en existe un nombre fini qui recouvrent E. Donc E est totalement borné.

Complet et totalement borné ⇒ compact.

Puisque E est métrique, E est séparé. Il suffit alors de montrer la propriété de Borel-Lebesgue. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un recouvrement de E par des ouverts $U_i, i\in I$, tel que pour toute partie finie $I_0 \subset I$, la réunion des $U_i, i\in I_0$, ne recouvre pas E. Par hypothèse, il existe pour tout $k \geqslant 0$ un recouvrement *fini* de E par des boules de rayon $\frac{1}{2^k}$.

On peut alors, par récurrence sur k, définir une suite de boules $B_k = B(x_k, \frac{1}{2^k})$ de sorte que deux boules successives se rencontrent et de sorte que pour aucune des B_k, il existe une partie finie $I_0 \subset I$ telle que les $U_i, i\in I_0$, recouvrent B_k.

La suite des centres $(x_k)_{k\geqslant 0}$ est alors une suite de Cauchy (exo !) qui converge par complétude de E. L'ouvert U_{i_0} contenant la limite, contient donc presque tous les centres x_k et par conséquent, il existe k tel que B_k soit incluse dans U_{i_0}. Ceci contredit la non-existence d'une partie finie $I_0 \subset I$ telle que les $U_i, i\in I_0$, recouvrent B_k.■

Remarque : Il y a plusieurs définitions équivalentes des parties bornées de $\mathbb{R}^n$:

$$A \text{ bornée} \Leftrightarrow \mathrm{diam}(A) = \sup_{x,y\in A} d(x,y) < +\infty$$

$$A \text{ bornée} \Leftrightarrow A \subset B(0,R) \text{ avec } R < +\infty$$

Dans ces définitions il est possible d'utiliser n'importe quelle distance définie par une norme puisque toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes. La propriété essentielle des parties bornées (déjà utilisée dans la preuve précédente) est qu'une réunion finie de parties bornéees est bornée.

Théorème 3.23 *Les parties **compactes** de $\mathbb{R}^n$ sont précisément les parties **fermées bornées** de $\mathbb{R}^n$.*

▲ Montrons qu'une partie compacte de $\mathbb{R}^n$ est fermée bornée.

Nous savons que toute partie compacte est fermée. De plus, toute partie compacte est "totalement bornée", donc recouverte par un nombre fini de ϵ-boules. Comme une réunion finie de parties bornées est bornée, cela montre bien qu'une partie compacte de $\mathbb{R}^n$ est bornée.

Montrons qu'une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$ est compacte.

A borné signifie que $A \subset \overline{B_\infty(0, R)} = [-R, R]^n$ (un n-cube de coté $2R$). Comme n'importe quel fermé d'un espace compact est une partie compacte, il suffit de montrer que ce n-cube est compact. En utilisant le théorème précédent, il suffit donc de montrer que $[-R, R]^n$ est complet et totalement borné.

Il est clair que $[-R, R]^n$, étant un fermé de l'espace complet $\mathbb{R}^n$, est complet. Il reste à montrer que $[-R, R]^n$ est totalement borné soit que pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$, nous pouvons recouvrir $[-R, R]^n$ par un nombre fini de ϵ-boules. Cela est évident si $n = 1$ car nous pouvons recouvrir $[-R, R]$ par un nombre fini d'intervalles ouverts $I_j, j \in J$, de longueur 2ϵ.

Mais alors, si $[-R, R] \subset \cup_{j\in J} I_j$, nous avons $[-R, R]^n \subset \cup_{(j_1,\cdots,j_n)\in J^n} I_{j_1} \times \cdots \times I_{j_n}$. Comme $I_{j_1} \times \cdots \times I_{j_n} = B_\infty(x, \epsilon)$ pour $I_{j_k} =]x_k - \epsilon, x_k + \epsilon[$, on conclut que $[-R, R]^n$ est recouvert par un nombre fini de ϵ-boules. ■

Corollaire 3.24 *Une partie compacte de $\mathbb{R}$ contient son* inf *et son* sup.

Proposition 3.25 *Toute fonction réelle continue **atteint ses bornes** sur toute partie compacte de son domaine de définition.*

▲ Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur un espace compact E. Alors l'image $f(E)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$ qui contient son inf et son sup, i.e. f atteint ses bornes sur E.■

Chapitre 4

Espaces connexes

4.1 Connexité et connexité par arcs

Définition 4.1 *Un espace topologique E est* **connexe par arcs** *si pour tout $(x, y) \in E^2$, il existe un chemin continu $\gamma : [0, 1] \longrightarrow E$ tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.*

Exemples :
- $\mathbb{R}$ est connexe par arcs.
- $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ n'est pas connexe par arcs (nous ne pouvons pas joindre un réel négatif à un réel positif par un chemin continu sans passer par 0).
- Tout espace vectoriel normé est connexe par arcs.
- Une partie **convexe** d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs. En particulier, les boules ouvertes (fermées) sont connexes par arcs.
- $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est connexe par arcs, mais $\mathbb{R}^2 \setminus \{\text{droite}\}$ n'est pas connexe par arcs. (Si x et y ne sont pas du même côté de la droite, alors tout chemin continu reliant x à y rencontre la droite).

Définition 4.2 *Un espace topologique E est* **connexe** *si l'ensemble vide et E sont les uniques parties de E à la fois ouvertes et fermées.*

E est connexe ssi, pour toute décomposition de E en deux ouverts disjoints $E = U_1 \sqcup U_2$, soit $U_1 = \emptyset$ et $U_2 = E$, soit $U_1 = E$ et $U_2 = \emptyset$.

E est connexe ssi, pour toute décomposition de E en deux fermés disjoints $E = F_1 \sqcup F_2$, soit $F_1 = \emptyset$ et $F_2 = E$, soit $F_1 = E$ et $F_2 = \emptyset$.

Théorème 4.3 $(\mathbb{R}, |\,|)$ *est connexe.*

▲ Comme la réunion de deux intervalles qui se rencontrent est à nouveau un intervalle, nous pouvons caractériser les ouverts de $\mathbb{R}$ comme réunions **disjointes** d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.

Supposons que $\mathbb{R} = U_1 \sqcup U_2$ avec U_1 et U_2 ouverts. Alors, U_1 s'écrit comme réunion disjointe d'intervalles ouverts, et nous pouvons en choisir un, noté I. Nous obtenons donc $U_1 = I \sqcup U_1'$, et en déduisons que $\mathbb{R} = U_1 \sqcup U_2 = I \sqcup (U_1' \sqcup U_2)$. Alors, si I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ différent de $\mathbb{R}$ lui-même, son complémentaire $\mathbb{R} \setminus I$ est un fermé qui contient au moins une extrémité ; cela contredit le fait que $U_1' \sqcup U_2$ est ouvert. Donc U_1 est soit $\mathbb{R}$ soit $\emptyset$. ■

Définition 4.4 *Une **partie** A d'un espace topologique E est **connexe** si l'espace topologique (A, τ_A) est connexe. Autrement dit, A est connexe ssi pour tout recouvrement de A par des ouverts U_1, U_2 de E qui se rencontrent en dehors de A, soit $A \subset U_1$, soit $A \subset U_2$.*

Proposition 4.5 *Soit A une partie connexe d'un espace topologique E. Alors toute partie B telle que $A \subset B \subset \overline{A}$ est connexe.*

Proposition 4.6 *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes de E qui se rencontrent deux à deux. Alors la réunion des $A_i, i \in I$, est connexe.*

▲ Raisonnons par l'absurde et supposons que A soit non connexe, donc recouvert par deux ouverts U_1, U_2 qui se rencontrent en dehors de A et qui ne contiennent pas A. Puique A_i est connexe pour tout $i \in I$, soit $A_i \subset U_1$ soit $A_i \subset U_2$ Mais comme A n'est contenu ni dans U_1, ni dans U_2, il existe des indices $i, j \in I$ tels que $A_i \subset U_1$ et $A_j \subset U_2$ et comme $U_1 \cap U_2 \cap A = \emptyset$, nous en déduisons que $A_i \cap A_j = \emptyset$ ce qui est contraire à l'hypothèse. ■

Proposition 4.7 *Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont connexes.*

▲ Comme un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est soit vide soit homéomorphe à $\mathbb{R}$, tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est connexe. La proposition 4.5 permet alors de conclure. ■

Proposition 4.8 *E connexe par arcs implique E connexe.*

▲ Raisonnement par l'absurde. Nous supposons E connexe par arcs mais E non connexe. Il existe alors une décomposition $E = U_1 \sqcup U_2$ en deux ouverts disjoints non-vides. Nous choisissons $x \in U_1$, et $y \in U_2$. Comme E est connexe par arcs, nous pouvons joindre x et y par un chemin continu $\gamma : [0,1] \longrightarrow E$ tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$, mais puisque $E = U_1 \sqcup U_2$, nous obtenons que $[0,1] = \gamma^{-1}(U_1) \sqcup \gamma^{-1}(U_2)$ qui sont deux ouverts non vides. Cela contredit donc le fait que $[0,1]$ est connexe. ■

Remarque : Pour une partie **ouverte** U de $\mathbb{R}^n$, la réciproque est vraie, donc :

$$U \text{connexe} \Longleftrightarrow U \text{connexe par arcs}$$

4.2 Composantes connexes

Théorème 4.9 *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application continue d'espaces topologiques. Alors l'image par f de toute partie connexe de E est une partie connexe de F.*

▲ Soit $A \subset E$ une partie connexe. Nous considérons $f(A)$, soit $f(A) \subset V_1 \cup V_2$ où V_1 et V_2 sont des ouverts de F qui se rencontrent en dehors de $f(A)$. En appliquant f^{-1}, nous obtenons $A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2)$ qui sont deux ouverts qui se rencontrent en dehors de A. Comme A est connexe, A est contenu soit dans $f^{-1}(V_1)$ soit dans $f^{-1}(V_2)$. Cela est équivalent à dire que $f(A)$ est contenue, soit dans V_1 soit dans V_2. Puisque cela est vrai pour tout recouvrement $f(A) \subset V_1 \cup V_2$ comme ci-dessus, $f(A)$ est connexe. ■

Proposition 4.10 *Une partie de $\mathbb{R}$ est connexe si et seulement si elle est de la forme $]a, b[$, $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$, avec a et b éventuellement égaux à $\pm\infty$.*

▲ $\Longleftarrow$) Vu en 4.7.

$\Longrightarrow$) Nous supposons $A \subset \mathbb{R}$ connexe, et nous voulons montrer que A s'identifie à l'un des intervalles $]a,b[$, $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ (avec a et b éventuellement égaux à $\pm\infty$).

Posons $a = \inf A$ et $b = \sup A$, il s'ensuit que $A \subset \overline{]a,b[}$. Il suffit alors de montrer que $]a,b[\subset A$.

Raisonnons par l'absurde : nous supposons qu'il existe $x \in]a,b[$ tel que $x \notin A$. Nous obtenons donc que $]-\infty,x[\sqcup]x,+\infty[\supset A$, mais comme A est connexe, A est soit contenu dans $]-\infty,x[$ soit dans $]x,+\infty[$. Dans les deux cas, nous obtenons une contradiction.

En effet, dans le premier cas, nous obtiendrions que $\sup A \leqslant x < b$ et dans le second que $a < x \leqslant \inf A$. ■

Corollaire 4.11 (Théorème des valeurs intermédiaires) *Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue avec E connexe. Alors, pour tout $(a,b) \in E^2$, f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.*

▲ E est connexe, donc $f(E)$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$ et vu la proposition précédente, il s'agira d'un intervalle. Mais $f(a)$ et $f(b)$ appartiennent à l'intervalle $f(E)$, donc toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$ également. ■

Définition 4.12 *Soit E un espace topologique et soit $a \in E$. La* ***composante connexe*** *de E contenant a est la plus grande partie connexe de E contenant a.*

Proposition 4.13 *Tout espace topologique s'écrit comme la réunion disjointe de ses composantes connexes. Chaque composante connexe est fermée. S'il n'y a qu'un nombre fini de composantes connexes, alors chaque composante connexe est également ouverte.*

▲ Soient E un espace topologique et a un point de E. Nous définissons $C(a) = \bigcup_{A_i \ni a} A_i$ avec A_i connexe. $C(a)$ est connexe car c'est une réunion de parties connexes se rencontrant deux à deux. $C(a)$ est la plus grande partie connexe contenant a, puisque $C(a)$ est la réunion de toutes les parties connexes contenant a. On vérifie aisément :

(1) $b \notin C(a) \Longrightarrow C(a) \cap C(b) = \emptyset$;

(2) $b \in C(a) \Longrightarrow C(b) = C(a)$.

(1) et (2) montrent que la relation $a \;\mathcal{R}\; b \overset{déf}{\Longleftrightarrow} C(a) = C(b)$ est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont les composantes connexes de E. En particulier :

$$E = \bigsqcup_{\overline{a} \in E/\mathcal{R}} C(a)$$

Comme $C(a)$ est connexe, l'adhérence $\overline{C(a)}$ est également connexe par **4.5**. Comme $C(a)$ est la plus grande partie connexe contenant a, nous obtenons $C(a) = \overline{C(a)}$, i.e. $C(a)$ est fermée.

Enfin, si $E = C(a_1) \sqcup \cdots \sqcup C(a_n) = C(a_i) \sqcup (\bigsqcup_{1\leqslant j\leqslant n, i\neq j} C(a_j))$ alors, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $C(a_i)$ est le complémentaire d'une partie fermée, donc ouvert. ■

Exemples :

a) Les composantes connexes d'un espace discret sont les parties singletons.

b) L'espace non-discret $(\mathbb{Q}, |\_|)$ a comme composantes connexes les parties singletons. On dit que $(\mathbb{Q}, |\_|)$ est **totalement discontinu**.

c) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ a deux composantes connexes $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

d) $\mathbb{R}^2 \setminus \{x = y\}$ a deux composantes connexes $\{x < y\}$ et $\{x > y\}$.

e) Une application continue $f : E \longrightarrow F$ avec E connexe et F discret (ou totalement discontinu) est constante. Plus généralement, toute application continue $f : E \longrightarrow F$ applique chaque composante connexe de E dans une composante connexe de F.

f) $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$. $M_n(\mathbb{R})$ est donc un espace connexe. $GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ est le sous-espace des matrices inversibles. $GL_n(\mathbb{R})$ est-il connexe ? La réponse est non. En effet, $\det : GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^*$ est une application continue. Si $GL_n(\mathbb{R})$ était connexe, son image par le déterminant serait connexe, or ici, ce n'est pas le cas car il existe des matrices inversibles de déterminant positif et de déterminant négatif. En fait, il est possible de montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ possède deux composantes connexes : $GL_n(\mathbb{R}) = GL_n^+(\mathbb{R}) \sqcup GL_n^-(\mathbb{R})$ avec $GL_n^{\pm}(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) | \det M \gtrless 0\}$.

Proposition 4.14 *$\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ pour $n \geqslant 2$ ne sont pas homéomorphes. De même, S^1 et S^n pour $n \geqslant 2$ ne sont pas homéomorphes.*

▲ Raisonnons par l'absurde : nous supposons avoir trouvé un homéomorphisme $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, nous en déduisons alors un homéomorphisme

$$\varphi_{|_{\mathbb{R}^*}} : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{\varphi(0)\}$$

Cela est absurde car $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe tandis que $\mathbb{R}^n \setminus \{\varphi(0)\}$ est connexe pour $n \geqslant 2$.

De même, supposons que nous ayons trouvé un homéomorphisme $\varphi : S^1 \longrightarrow S^n$, cet homéomorphisme induirait un homéomorphisme

$$\varphi_{|_{S^1 \setminus \{a,b\}}} : S^1 \setminus \{a, b\} \longrightarrow S^n \setminus \{\varphi(a), \varphi(b)\}$$

Mais $S^1 \setminus \{a, b\}$ a deux composantes connexes tandis que $S^n \setminus \{\varphi(a), \varphi(b)\}$ est connexe pour $n \geqslant 2$, donc φ n'existe pas. ■

Remarque : En fait, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ ainsi que S^n et S^m ne sont pas homéomorphes si $n \neq m$.

Chapitre 5

Espaces fonctionnels

5.1 Espaces de Banach et de Hilbert

Définition 5.1 *Un espace de* ***Banach*** *est un espace vectoriel normé* $(E, \| \_ \|)$ *(sur* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*) qui est* ***complet*** *pour la métrique définie par la norme.*

Un espace de ***Hilbert*** $(E, <\_, \_>)$ *est un espace de* ***Banach*** *dans lequel la norme provient d'un produit scalaire sur* $\mathbb{R}$ *ou hermitien sur* $\mathbb{C}$*, soit :* $\| x \| = \sqrt{<x, x>}$*.*

Un produit hermitien est une forme **sesquilinéaire** $<\_, \_>: E \times E \to \mathbb{C}$ (antilinéaire dans le premier, linéaire dans le second argument) qui est **positive** et **non-dégénérée** (i.e. $< x, x > \geqslant 0$ et $< x, x >= 0 \Leftrightarrow x = 0$).

Exemples :

1) $(\mathbb{R}^n, \| \_ \|) = (\mathbb{R}^n, <\_, \_>)$ avec $< x, y >= \sum_{i=1}^n x_i y_i$ est un espace de Hilbert (alias espace euclidien).

2) $(\mathbb{C}^n, <\_, \_>)$ avec $< x, y >= \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i$ est un espace de Hilbert (alias espace hermitien).

3) $L^2([0, 1], \mathbb{C}) = \{$fonctions complexes L^2-intégrables sur $[0, 1]\}$ et $< f, g >= \int_0^1 \overline{f(t)} g(t) dt$. Alors, $(L^2([0, 1], \mathbb{C}), <\_, \_>)$ est un espace de Hilbert contenant les fonctions complexes continues sur $[0, 1]$.

Idée : Faire de la géométrie dans un espace vectoriel de dimension infinie comme elle est faite dans un espace euclidien ou hermitien. Cela est possible grâce à la topologie.

Théorème 5.2 *Toutes les normes de* $\mathbb{R}^n$ *sont équivalentes.*

▲ Soient $\| \_ \|$ et $\| \_ \|'$ deux normes sur $\mathbb{R}^n$. Il faut établir l'existence de constantes réelles $k_1, k_2 \geqslant 0$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\| x \| \leqslant k_1 \| x \|'$ et $\| x \|' \leqslant k_2 \| x \|$. Comme $\| \lambda x \| = |\lambda| \cdot \| x \|$ et $\| 0 \| = \| 0 \|' = 0$, il suffit de considérer le cas $\| x \| = 1$.

Autrement dit, il suffit de montrer que $\frac{\|x\|}{\|x\|'} \leqslant k_1$ si $\| x \| = 1$ et de même, $\frac{\|x\|'}{\|x\|} \leqslant k_1$ si $\| x \|' = 1$.

Nous savons que $S(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n | \ \| x \| = 1\}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$ donc un compact. L'application $\begin{array}{rccc} q : & S(0,1) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{\|x\|'} \end{array}$ est continue, donc l'image de $S(0, 1)$ par q est une partie compacte de $\mathbb{R}$. Par conséquent, il existe une constante $k_1 \geqslant 0$ telle que $\frac{\|x\|}{\|x\|'} \leqslant k_1$ si $x \in S(0, 1)$.

De manière symétrique, la continuité de $\begin{array}{cccc} p: & S(0,1) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{\|x\|} \end{array}$ implique l'existence de la constante $k_2 \geqslant 0$ telle que $\| x \| = 1$ et de même, $\frac{\|x\|'}{\|x\|} \leqslant k_2$ si $x \in S(0,1)$. ■

Théorème 5.3 *Une application linéaire* $\varphi : (E, \| \_ \|) \longrightarrow (E', \| \_ \|')$ *est continue si et seulement si elle est continue en* 0 *ou si et seulement si* $\sup_{\|x\| \leqslant 1} \| \varphi(x) \|'$ *existe.*

▲ $\varphi : (E, \| \_ \|) \longrightarrow (E, \| \_ \|')$ est continue en $x \in E$ si et seulement si pour $x = \lim_n x_n$ nous avons $\lim_n \varphi(x_n) = \varphi(x)$ ou de manière équivalente, si $(x - x_n) \to 0$ alors $\varphi(0) = \lim_n \varphi(x - x_n) = \lim_n \varphi(x) - \varphi(x_n) = 0$ (par linéarité).

Cette dernière condition exprime la **continuité** de φ en 0. Prouvons maintenant que φ est continue en 0 si et seulement si $\sup_{\|x\| \leqslant 1} \| \varphi(x) \|'$ existe. Si φ continue en 0 alors

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^* \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \mid \ \| x \| < \eta \Longrightarrow \| \varphi(x) \|' < \epsilon$$

Autrement dit, φ continue en 0 implique que :

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^* \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* | \varphi(B_E(0, \eta)) \subset B_{E'}(0, \epsilon)$$

Comme φ est linéaire, nous pouvons multiplier cette inclusion par un facteur $\frac{1}{\eta}$ et nous obtenons que $\varphi(B_E(0,1)) \subset B_{E'}(0, \frac{\epsilon}{\eta})$). De là et par continuité de φ nous obtenons :

$$\varphi(\overline{B(0,1)}) \subset \overline{\varphi(B(0,1))} \subset \overline{B(0, \frac{\epsilon}{\eta})}$$

Donc le sup existe. Inversement, si ce sup existe, alors il s'agit du plus petit $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall x \in E \ \ \| \varphi(x) \|' \leqslant k \, \| x \|$$

ce qui implique que φ est k-lipschitzienne donc continue. ■

Remarque : La constante k obtenue dans la fin de la démonstration précédente s'appelle **la norme de l'application** φ et se note souvent $\| \varphi \|$. Sa définition dépend du choix des normes sur E et E'. Les normes d'application ont la propriété fondamentale suivante :

Pour deux applications linéaires continues composables φ et ψ on a : $\| \psi \circ \varphi \| \leqslant \| \psi \| \cdot \| \varphi \|$.

Théorème 5.4 *Un espace vectoriel normé* $(E, \| \_ \|)$ *est de dimension finie si et seulement si* ***la sphère unité*** $S(0,1)$ *(ou* ***la boule unité fermée*** $B_f(0,1)$*) est* ***compacte****.*

▲ $(E, \| \_ \|)$ est de dimension finie n, alors il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels entre E et $\mathbb{R}^n$. Nous obtenons de cette manière un homéomorphisme d'espaces topologiques $\begin{array}{ccc} (E, \| \_ \|) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^n, \| \_ \|) \\ S(0,1) & \longleftrightarrow & S(0,1) \end{array}$. La sphère unité de $\mathbb{R}^n$ est compacte par rapport à toutes les normes. Par conséquent, la sphère unité de $(E, \| \_ \|)$ l'est aussi.

Insersement, supposons que $S(0,1)$ soit compacte, nous voudrions montrer que $\dim_{\mathbb{R}} E < \infty$. Si $S(0,1)$ est compacte, nous pouvons la recouvrir par un nombre fini de ϵ-boules. Il existe donc $x_1, \cdots, x_n \in E$ tels que $S(0,1) \subset B(x_1, \epsilon) \cup \cdots \cup B(x_n, \epsilon)$, et considérons le sous-espace vectoriel $F \subset E$ engendré par $x_1, \cdots, x_n$. Nous pouvons écrire que $S(0,1) \subset F + B(0, \epsilon)$, et nous allons montrer que cela implique que $E = F$ soit que $\dim_{\mathbb{R}} E = \dim_{\mathbb{R}} F \leqslant n$.

Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe un sous-espace G tel que $F \subset G \subset E$ avec $G \neq F$ et $\dim_{\mathbb{R}} G < \infty$, et considérons $S_E(0,1) \cap G = S_G(0,1)$. Nous avons :

$$S_G(0,1) \subset B_G(x_1, \epsilon) \cup \cdots \cup B_G(x_n, \epsilon)$$

soit :

$$S_G(0,1) \subset F + B_G(0,\epsilon) \quad (*)$$

Comme $F \subset G$ et $F \neq G$, il existe une forme linéaire f non nulle sur G qui s'annule sur F. En appliquant $(*)$, nous obtenons $f(S_G(0,1)) \subset f(B_G(0,\epsilon))$ et ϵ peut-être quelconque, en le prenant égal à $1/2$, nous obtenons grâce à la linéarité de f que $f(B_G(0,1)) \subset f(B_G(0,1/2))$ et en itérant cette inclusion, nous obtenons :

$$f(B_G(0,1)) \subset f(B_G(0,1/2)) \subset f(B_G(0,1/4)) \subset \cdots \subset f(B_G(0,1/2^n))$$

donc, en faisant tendre n vers l'infini, nous obtenons que $f(B_G(0,1)) = 0$, ce qui impliquerait $f_{|G} = 0$ contraire à l'hypothèse. ■

Lemme 5.5 *Soit E' un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé $(E, \| \_ \|)$. Alors l'adhérence $\overline{E'}$ est un sous-espace vectoriel. En particulier, si E est un espace de Hilbert, alors $\overline{E'}$ l'est également.*

▲ Il faut montrer que pour $x, y \in \overline{E'}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), $x + y \in \overline{E'}$ et $\lambda x \in \overline{E'}$.

Nous utilisons la continuité de l'addition $+ : E \times E \longrightarrow E$ et de la multiplication scalaire $\cdot : \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$. Si $x \in \overline{E'}$, alors $x = \lim_n x_n$ si $y \in \overline{E'}$, alors $y = \lim_n y_n$ avec les x_n et les y_n éléments de E'. Il s'ensuit que $x + y = \lim_n (x_n + y_n)$ mais puisque $x_n + y_n \in E'$, $x + y \in \overline{E'}$.

De même, $\lambda x = \lim_n \lambda x_n$ et puisque $\lambda x_n \in E'$, il s'ensuit que $\lambda x \in \overline{E'}$. ■

Lemme 5.6 *Pour un espace de Hilbert $(E, <\_,\_>)$ l'application $<\_,\_>: E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ est continue.*

▲ Nous avons l'égalité :

$$< x, y >= \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) - \frac{i}{4}(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2)$$

Puisque l'application $\| \_ \|: E \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, le côté droit de l'égalité est continue en x et y donc, le côté gauche l'est également. ■

5.2 Projection orthogonale et orthogonalité

Théorème 5.7 (Théorème de la projection orthogonale) *Soient $(E, <\_,\_>)$ un espace de Hilbert et F un sous-espace fermé (donc **complet**). Alors, pour tout $x \in E$, il existe un unique élément $x_F \in F$ tel que $x - x_F$ soit orthogonal à F. (c'est-à-dire $\forall y \in F <x - x_F, y>= 0$)*

Le vecteur x_F s'appelle la projection orthogonale de $x \in E$ sur F. Elle est également caractérisée par la propriété $d(x, x_F) = d(x, F) = \inf_{y \in F}(x, y)$.

▲ Prouvons d'abord que l'existence de x_F implique que x_F réalise la distance minimale et qu'il est unique. En posant $a = x - x_F$, $b = x_F - y$ et $c = x - y$ nous obtenons $a + b = c$ et $a \perp b$ par hypothèse, soit $< a, b >= 0$. Donc

$$d(x,y)^2 =< a + b, a + b >=< a, a > + < b, b >= d(x, x_F)^2 + \underbrace{d(x_F, y)^2}_{\geqslant 0}$$

Par conséquent, pour tout $y \in F$, $d(x, y) \geqslant d(x, x_F)$ et nous avons l'égalité précisément quand $d(x_F, y) = 0$ soit quand $y = x_F$.

Prouvons maintenant l'existence de x_F. En fait, nous construisons un élément y qui réalise la distance minimale $d(x, y) = d(x, F)$; cela entraîne que $y = x_F$. En effet, si $y \neq x_F$, alors $d(x, y) \neq d(x, F)$ car nous pouvons projeter x sur $\mathbb{C}y$ puisque $E = \mathbb{C}y \oplus \mathbb{C}y^\perp$.

$d(x, F) = \inf_{z \in F} d(x, z)$ par définition, il existe donc une suite d'éléments $y_n \in F$ telle que $\lim_n d(x, y_n) = d(x, F)$. L'idée est de montrer que y_n est une suite de Cauchy d'éléments de F. Comme F est complet, cette suite de Cauchy convergera vers $y \in F$ et comme la distance est continue, nous aurons alors

$$d(x, y) = \lim_n d(x, y_n) = d(x, F).$$

Pour montrer la propriété de Cauchy, nous utilisons que pour tout $u, v \in E$ nous avons l'égalité :

$$\| u + v \|^2 + \| u - v \|^2 = 2(\| u \|^2 + \| u \|^2)$$

soit :

$$< u + v, u + v > + < u - v, u - v >= 2(< u, u > + < v, v >)$$

En posant $u = x - y_n$ et $v = x - y_m$ nous obtenons

$$\| u - v \| = \| y_m - y_n \| = 2(\| x - y_n \|^2 + \| x - y_m \|^2) - \| 2x - y_n - y_m \|^2$$

Il faut montrer que $\| y_m - y_n \|^2 \longrightarrow 0$ si m et n tendent vers $+\infty$. Nous savons déjà que

$$2(\| x - y_n \|^2 + \| x - y_m \|^2) \to 4\ d(x, F)^2 \text{ et } \| 2x - y_n - y_m \|^2 = 4 \| x - \frac{y_n + y_m}{2} \|^2$$

En faisant tendre n et m vers $+\infty$, nous obtenons

$$\| x - \frac{y_n + y_m}{2} \|^2 \to d(x, F)^2$$

Nous en concluons que $\| y_m - y_n \|^2$ tend vers 0 quand n et m tendent vers $+\infty$, soit que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. ■

Lemme 5.8 *Si A est une partie d'un espace hermitien E, alors $A^\perp$ est un fermé de E.*

▲ L'orthogonal de A est une intersection de fermés. En effet

$$A^\perp = \bigcap_{x \in A} x^\perp \quad \text{et} \quad x^\perp = \{y \in E | < x, y >= 0\} = \ker(y \mapsto < x, y >)$$

est l'image réciproque du singleton $\{0\}$ par une application continue **5.6**, donc fermé.■

Corollaire 5.9 *Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace de Hilbert $(E, <\_,\_>)$. Alors*

$$\overline{F} = (F^{\perp})^{\perp}$$

*En particulier, si F est **fermé** alors $F = (F^{\perp})^{\perp}$.*

▲ Nous avons toujours $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$. Montrons d'abord l'égalité $F = (F^{\perp})^{\perp}$ si F est fermé. Supposons donc $x \in (F^{\perp})^{\perp}$, et utilisons l'existence de la projection orthogonale x_F de x sur F, $x = x_F + (x - x_F)$ avec $x_F \in F$ et $(x - x_F) \in F^{\perp}$. Alors :

$$< x - x_F, x - x_F >= \underbrace{< x, x - x_F >}_{=0} - \underbrace{< x_F, x - x_F >}_{=0} = 0$$

nous en concluons que $x - x_F = 0$ car le produit hermitien est non-dégénéré. Nous avons donc $x \in F$ ce qui montre l'inclusion opposée : $(F^{\perp})^{\perp} \subset F$.

Maintenant, si F n'est pas fermé,

$$F \subset \overline{F} \Rightarrow (F^{\perp})^{\perp} \subset (\overline{F}^{\perp})^{\perp}$$

D'après ce qui précède, nous avons alors $\overline{F} = (\overline{F}^{\perp})^{\perp}$. Donc, $F \subset (F^{\perp})^{\perp} \subset \overline{F}$, d'où $(F^{\perp})^{\perp} = \overline{F}$ par le lemme précédent. ■

Corollaire 5.10 *Un sous-espace vectoriel F de $(E, <\_,\_>)$ est **dense** si et seulement si 0 est le seul vecteur orthogonal à F.*

▲ $(F^{\perp})^{\perp} = \overline{F} = E \Longleftrightarrow F^{\perp} = E^{\perp} = \{0\}$. ■

5.3 Bases hilbertiennes

Définition 5.11 *Une famille $(e_i)_{i \in I}$ de vecteur de E est*

- ***orthonormale** si $< e_i, e_j >= \delta_{ij}$*
- ***totale** si $\overline{\bigoplus_{i \in I} \mathbb{C} e_i} = E$*

*$(e_i)_{i \in I}$ est une **base hilbertienne** si $(e_i)_{i \in I}$ est à la fois **orthonormale et totale**.*

† **Attention :** Une base hilbertienne d'un espace de Hilbert n'est pas une base vectorielle!!!

Remarque : $(e_i)_{i \in I}$ est total ssi les e_i, $i \in I$, engendrent un sous-espace vectoriel **dense** de E.

Théorème 5.12 *Soit E un espace de Hilbert muni d'une base hilbertienne $(e_i)_{i \in I}$, alors pour tout $x \in E$, la famille $(< x, e_i > e_i)_{i \in I}$ est **sommable** de somme x.*

$$x = \sum_{i \in I} < x, e_i > e_i$$

Les $< x, e_i >$, $i \in I$, sont les coordonnées de x dans la base $(e_i)_{i \in I}$

Corollaire 5.13 (Identité de Parseval) *Si :*

$$x = \sum_{i \in I} <x, e_i> e_i \quad et \quad y = \sum_{i \in I} <y, e_i> e_i$$

Alors,

$$< x, y >= \sum_{i \in I} \overline{<x, e_i>} <y, e_i>$$

En particulier, nous avons ***l'identité de Parseval*** *:*

$$\| x \|^2 = <x, x> = \sum_{i \in I} | <x, e_i> |^2$$

5.4 Théorème de Stone-Weierstrass et séries de Fourier

Théorème 5.14 (Théorème de Stone-Weierstrass) *Soient E un espace compact et A une sous-$\mathbb{C}$-algèbre de l'algèbre $C^0(E; \mathbb{C})$ des fonctions complexes continues sur E.*

Alors, A est dense dans $C^0(E; \mathbb{C})$ pour la topologie de la convergence uniforme si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

1. $\forall a \in E \quad \exists f \in A \mid f(a) \neq 0$
2. $\forall a \neq b \quad \exists f \in A \mid f(a) \neq f(b)$
3. $f \in A \Rightarrow \overline{f} \in A$

Nous allons considérer maintenant l'espace $L^2([0, 2\pi]; \mathbb{C})$ des fonctions complexes L^2-intégrables sur l'intervalle fermé $[0; 2\pi]$. Comme il est d'usage, nous identifierons une fonction à sa classe d'équivalence L^2. Nous définissons le produit hermitien suivant :

$$<f, g> = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) dt$$

Comme $L^2([0, 2\pi]; \mathbb{C})$ est un espace **complet** pour la norme $\| f \|_{L^2} = \sqrt{<f, f>}$, il s'agit d'un espace de **Hilbert**. Nous avons vu au chapitre 3 que l'espace fonctionnel $C^0([0, 2\pi]; \mathbb{C})$ est complet pour la topologie de la convergence uniforme. Néanmoins, le même espace fonctionnel n'est **pas complet** pour la norme $\|-\|_{L^2}$. Le complété de $C^0([0, 2\pi]; \mathbb{C})$ pour cette norme L^2 n'est rien d'autre que l'espace de Hilbert $L^2([0, 2\pi]; \mathbb{C})$. En particulier, $C^0([0, 2\pi]; \mathbb{C})$ est dense dans $L^2([0, 2\pi]; \mathbb{C})$ pour la norme L^2. Il est facile de vérifier que l'ensemble des fonctions complexes $t \mapsto e^{ikt}$ (où k parcourt $\mathbb{Z}$) engendre un sous-espace vectoriel de $C^0([0, 2\pi]; \mathbb{C})$ qui vérifie les hypothèses du théorème de Stone-Weierstrass (en particulier, c'est une sous-algèbre). De plus, $< e^{ikt}, e^{ilt} >= \delta_{kl}$. Comme la convergence uniforme entraine la convergence L^2, et comme la densité est une propriété transitive, nous obtenons

Théorème 5.15 *L'espace de Hilbert $L^2([0, 2\pi]; \mathbb{C})$ admet comme base hilbertienne l'ensemble des exponentielles complexes : e^{ikt} , $k \in \mathbb{Z}$.*

Par le théorème de sommabilité, nous obtenons les séries de Fourier :

Corollaire 5.16 *Toute fonction L^2-intégrable $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ s'écrit comme somme d'une série*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{ikt}$$

*il s'agit de la **série de Fourier de** f avec :*

$$c_k(f) =< f, e^{ikt} >= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt$$

le $k^{\grave{e}me}$ coefficient de Fourier de f.

*Si $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ est à **valeurs réelles**, nous regroupons $c_k(f)e^{ikt} + c_{-k}(f)e^{-ikt}$ pour $k > 0$. Ce terme s'identifie à $a_k(f)\cos(kt) + b_k(f)\sin(kt)$ avec $a_k(f)$ et $b_k(f)$ les coefficients de Fourier réels de f.*

Les coefficients de Fourier complexes $(c_k(f))_{k\in\mathbb{Z}}$ sont reliés aux coefficients de Fourier réels $(a_k(f))_{k\geqslant 0}$ et $(b_k(f))_{k>0}$ par les formules :

$$\begin{cases} a_0(f) = c_0(f) \\ c_k(f) = \frac{1}{2}(a_k(f) - ib_k(f)) \quad k > 0 \\ c_{-k}(f) = \overline{c_k(f)} \end{cases}$$

† **<u>Attention :</u>** La série de Fourier $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{ikt}$ converge vers $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ au sens de la convergence L^2, donc il y a convergence ponctuelle seulement en dehors d'une partie de mesure nulle (i.e. "presque partout"). Nous avons en revanche la convergence uniforme pour les fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$:

Théorème 5.17 *Si $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ s'étend en une fonction continue, 2π-périodique, alors la série de Fourier de f converge uniformément vers f.*

En fait, nous avons mieux : nous avons une indication sur la convergence des séries de Fourier pour les fonctions **continues par morceaux**. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux si l'ensemble de discontinuité de f est une partie discrète de $\mathbb{R}$. En particulier, cet ensemble de dicontinuité est au plus dénombrable.

Théorème 5.18 (Théorème de Dirichlet) *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique, continue par morceaux. Alors la série de Fourier $\tilde{f}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{ikt}$ converge uniformément vers f sur tout intervalle fermé sur lequel f est continue. Aux points de discontinuité de f, nous avons :*

$$\tilde{f}(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

avec :

$$f(x^+) = \lim_{\substack{t\to x \\ t>x}} f(t) \quad et \quad f(x^-) = \lim_{\substack{t\to x \\ t<x}} f(t)$$

Exemple : Considérons la fonction 2π-périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{t}{2\pi}, t \in [0, 2\pi[$. Pour $k = 0$, nous avons :

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{t}{2\pi}dt = \frac{1}{4\pi^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}$$

Si $k \neq 0$, nous avons :

$$\begin{aligned}
c_k(f) &= < f, e^{ikt} > \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\frac{t}{2\pi}dt \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} te^{-kt}dt \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\left(\left[t\frac{e^{-ikt}}{-ik}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{e^{-ikt}}{-ikt}dt\right) \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\left[t\frac{e^{-ikt}}{-ik} + \frac{e^{-ikt}}{-i^2k^2}\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\left[e^{-ikt}\left(\frac{t}{ik} + \frac{1}{k^2}\right)\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\cdot\frac{2\pi}{-ik} \\
&= \frac{i}{2k\pi}
\end{aligned}$$

Nous obtenons donc pour tout $k \neq 0$:

$$c_k(f) = \frac{i}{2k\pi}$$

Etudions maintenant les coeffficients de Fourier réels de f :

$$a_0(f) = c_0(f) = \frac{1}{2}$$

Pour $k > 0$,

$$c_k(f) = \frac{1}{2}(a_k(f) - ib_k(f))$$

les $c_k(f)$ étant des imaginaires purs, nous avons que $a_k(f) = 0$ pour tout $k > 0$. Et nous obtenons donc :

$$\frac{i}{2k\pi} = -\frac{ib_k(f)}{2} \quad \Longrightarrow \quad b_k(f) = \frac{-1}{k\pi}$$

La série de Fourier de f s'écrit donc sous la forme :

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(t) &= a_0(f) + \sum_{k>0} b_k(f)\sin(kt) \\
&= \frac{1}{2} - \sum_{k>0}\frac{\sin(kt)}{k\pi}
\end{aligned}$$

Il est alors possible de vérifier que f et $\tilde{f}$ diffèrent en $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. En effet :

$$f(0^+) = 0 \quad \text{et} \quad f(0^-) = f((2\pi)^-) = 1$$

d'où :

$$\tilde{f}(0) = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{1}{2}$$

Etudions maintenant f et $\tilde{f}$ en $\frac{\pi}{2}$. Nous avons de manière évidente :

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Nous avons également :

$$\tilde{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} - \sum_{k>0} \frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\pi} = \frac{1}{2} - \sum_{l \geqslant 0} \frac{(-1)^l}{(2l+1)\pi}$$

Car

$$\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ (-1)^l & \text{si } k = 2l+1 \end{cases}$$

En appliquant le théorème de Dirichlet, nous obtenons que :

$$\tilde{f}\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Soit que :

$$\frac{1}{2} - \sum_{l \geqslant 0} \frac{(-1)^l}{(2l+1)\pi} = \frac{1}{4}$$

Soit enfin, une série numérique, connue sous le nom de **série de Leibniz** :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{l \geqslant 0} \frac{(-1)^l}{2l+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Appliquons maintenant l'identité de Parseval :

$$\begin{aligned} \| f \|_{L^2}^2 &= < f, f >= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(f)|^2 \\ &= \frac{1}{4} + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq}} \left| \frac{i}{2k\pi} \right|^2 = \frac{1}{4} + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq}} \frac{1}{4k^2\pi^2} = \frac{1}{4} + \sum_{k>0} \frac{1}{2k^2\pi^2} \end{aligned}$$

Mais nous avons également par définition de la norme :

$$\begin{aligned} \| f \|_{L^2}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{t^2}{4\pi^2} \\ &= \frac{1}{8\pi^3} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Nous obtenons donc :

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \sum_{k>0} \frac{1}{2k^2\pi^2}$$

Soit la série numérique bien connue :

$$\sum_{k>0} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Chapitre 6

Exercices

6.1 Ouverts, fermés et adhérence dans un espace métrique.

1) a) Dessiner les boules-unités fermées du plan $\mathbb{R}^2$, muni resp. de la norme $\|-\|_1$, de la norme $\|-\|_2$ et de la norme $\|-\|_\infty$.

b) Montrer que pour deux normes N_1, N_2 sur $\mathbb{R}^2$, on a l'inclusion des boules-unité fermées $B_f^1(0,1) \subseteq B_f^2(0,1)$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, on a l'inégalité $N_2(x) \leqslant N_1(x)$.

c) Montrer d'abord de manière algébrique, puis de manière géométrique (en utilisant 1b) que $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{2}\|x\|_2 \leqslant 2\|x\|_\infty$ pour $x \in \mathbb{R}^2$.

2) a) Rappeler la définition d'un ouvert d'un espace vectoriel normé.

b) Montrer (à l'aide de 1c) que chaque boule ouverte de $(\mathbb{R}^2, \|-\|_2)$ contient une boule de $(\mathbb{R}^2, \|-\|_\infty)$ ayant le même centre, et vice versa.

c) En déduire que chaque ouvert de $(\mathbb{R}^2, \|-\|_2)$ est un ouvert de $(\mathbb{R}^2, \|-\|_\infty)$, et vice versa, donc que l'ensemble des ouverts de $(\mathbb{R}^2, \|-\|_2)$ est identique à l'ensemble des ouverts de $(\mathbb{R}^2, \|-\|_\infty)$.

3) Soit (E, d) un espace métrique.

a) Montrer que pour deux points distincts $x, y \in E$, il existe des ouverts disjoints U, V de E tels que $x \in U$ et $y \in V$. En déduire que les parties singleton de E sont fermées.

b) Montrer que pour tout ouvert U, et tout point $x \in U$, il existe un ouvert V tel que $x \in V \subset \overline{V} \subset U$.

c) Montrer que la propriété précédente est équivalente à la suivante : pour tout point $x \in E$ et toute partie fermée F de E ne contenant pas x, il existe des ouverts disjoints V, V' de E tels que $x \in V$ et $F \subset V'$.

4) Soit A une partie d'un espace métrique (E, d) et soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de A.

a) Rappeler la définition d'un point-limite x de la suite (x_n). Montrer que x est point-limite si et seulement si toute ϵ-boule ouverte $B(x, \epsilon)$ contient "presque tous" les termes de la suite (x_n).

b) En déduire que si x est point-limite de (x_n) alors tout voisinage de x rencontre A (i.e. x

appartient à l'adhérence de A).

c) Montrer inversement que si $y \in \overline{A}$ alors il existe une suite $(y_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de A qui converge vers y.

d) Déduire de ce qui précède que A est fermée si et seulement si toute suite convergente, formée d'éléments de A, converge vers un élément de A.

5) Soient (E, d) un espace métrique, $a \in E$ et $r > 0$.

a) Montrer que $\overline{B(a;r)} \subset B_f(a;r)$.

b) Montrer que si E est un espace vectoriel et la métrique de E provient d'une norme, alors $B_f(a;r) \subset \overline{B(a;r)}$. On pourra utiliser une suite $x_k = \lambda_k a + (1-\lambda_k)x$ pour des $\lambda_k \in \mathbb{R}$ convenables.

c) Trouver un espace métrique E tel que $B_f(a;r) \not\subset \overline{B(a;r)}$. Indication : on pourra restreindre la métrique usuelle de la droite réelle à l'ensemble des entiers relatifs.

6) Soient A, B deux parties d'un espace métrique.

a) Montrer que si $A \subset B$ alors $\overline{A} \subset \overline{B}$.

b) Montrer l'inclusion $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

c) Montrer l'égalité $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

7) a) Montrer que sur la droite réelle, munie de la métrique usuelle, les intervalles ouverts (bornés ou non) sont des ouverts. Montrer de même que les intervalles fermés (bornés ou non) sont des fermés.

b) Donner l'exemple d'une suite décroissante (pour l'inclusion) de parties ouvertes de $\mathbb{R}$ dont l'intersection est fermée, mais non ouverte. De même, donner l'exemple d'une suite croissante de parties fermées de $\mathbb{R}$ dont la réunion est ouverte, mais non fermée.

c) Montrer que l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$. Déterminer la plus grande partie ouverte de $\mathbb{R}$ contenue dans $\mathbb{Q}$, ainsi que la plus petite partie fermée de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{Q}$.

6.2 Continuité, densité.

1) Montrer que pour une application $f : (E, d) \to (E', d')$ entre espaces métriques, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Pour tout $x \in E$, l'image réciproque de tout voisinage de $f(x)$ est un voisinage de x ;
2. $\forall x \in E\, \forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0 : d(x, x') < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x')) < \epsilon$.

En déduire que f est continue (selon la ϵ/δ-définition) si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de E' est un ouvert de E.

2) Soit (E, d) un espace métrique et $x \in E$.

a) Montrer que la fonction $d(x, -) : E \to \mathbb{R}_+$ est continue, la droite réelle positive étant munie de la métrique usuelle.

b) En déduire que la norme $\|-\| : E \to \mathbb{R}_+$ d'un espace vectoriel normé $(E, \|-\|)$ est continue.

3) Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ une fonction continue vérifiant $\gamma(0) = (0,0)$ et $\gamma(1) = (1,1)$. Montrer que l'image de γ rencontre le cercle-unité S^1 ainsi que le losange L de sommets $(\pm 1.5, 0), (0, \pm 1.5)$.

4) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que le graphe de f est un fermé de $(\mathbb{R}^2, \|-\|_\infty)$. La réciproque est-elle vraie ? (Considérer la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$).

5) a) Montrer que l'addition et la multiplication sont des fonctions continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

b) Montrer que pour deux fonctions continues $f, g : (E, d) \to \mathbb{R}$, les applications $x \mapsto f(x) \pm g(x)$ et $x \mapsto f(x)g(x)$ définissent des fonctions continues $f \pm g, f \cdot g : E \to \mathbb{R}$. (Autrement dit, l'ensemble des fonctions continues réelles sur un espace métrique forme une $\mathbb{R}$-algèbre).

c) Montrer (en utilisant b) que $\{f \leqslant g\} = \{x \in E \,|\, f(x) \leqslant g(x)\}$ est un fermé de E resp. $\{f < g\} = \{x \in E \,|\, f(x) < g(x)\}$ est un ouvert de E.

d) Montrer qu'une application $f = (f_1, \ldots, f_n) : (E, d) \to (\mathbb{R}^n, \| - \|_\infty)$ est continue si et seulement si les n composantes $f_i : E \to \mathbb{R}$ le sont.

6) a) Montrer que le déterminant det : $M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une fonction continue. On identifie $M_n(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^{n^2}$ muni d'une norme quelconque.

b) Déterminer si les parties suivantes de $M_n(\mathbb{R})$ sont ouvertes ou fermées ou intersection d'un ouvert et d'un fermé :

– l'ensemble des matrices non-inversibles ;
– l'ensemble $Gl_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles ;
– l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à k ;
– l'ensemble des matrices de rang k.

c) Montrer que $Gl_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$. Pour $X \in M_n(\mathbb{R})$ on pourra considérer $det(X + \epsilon \cdot Id_n)$ pour un scalaire ϵ tendant vers 0.

d) Déduire de la densité de $Gl_n(\mathbb{R}) \times Gl_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$ que pour tout couple $(X, Y) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$, les polynômes caractéristiques de XY et de YX coïncident.

e) En admettant que les matrices diagonalisables sont denses dans $M_n(\mathbb{C})$ montrer que pour tout $X \in M_n(\mathbb{C})$, on a $det(exp(X)) = e^{Tr(X)}$.

7) a) Montrer que tout ouvert de la droite réelle $\mathbb{R}$ (munie de la métrique usuelle) est réunion dénombrable d'intervalles ouverts de longueur rationnelle.

b) Montrer que dans un espace métrique contenant une partie dénombrable dense, tout ouvert est réunion dénombrable de boules ouvertes de rayon rationnel. Cette propriété est-elle satisfaite dans $\mathbb{R}^n$?

8) a) Montrer que toute bijection (dé)croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La réciproque est-elle vraie ?

b) Montrer que toutes les boules overtes d'un espace vectoriel normé sont homéomorphes.

c) Montrer que les boules-unités B_1, B_2 de $\mathbb{R}^n$ pour deux normes différentes N_1, N_2 sur $\mathbb{R}^n$ sont homéomorphes.

6.3 Espaces complets, espaces compacts.

1) Soit E un espace topologique et $E \times E$ muni de la topologie-produit. Montrer que E est séparé si et seulement si la diagonale $\Delta_E \subset E \times E$ est un fermé de $E \times E$.

2) Un point x d'un espace métrique est dit *point d'accumulation* de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ si tout voisinage de x contient une infinité de termes x_n.

a) Montrer qu'une suite convergente n'a qu'un seul point d'accumulation : sa limite. Montrer inversement que tout point d'accumulation de $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est limite d'une suite extraite $(x_{n_k})_{k\geqslant 0}$.

b) Montrer qu'une suite de Cauchy a au plus un point d'accumulation, et que, le cas échéant, elle converge vers ce point d'accumulation.

c) Montrer que dans un espace métrique compact, toute suite a un point d'accumulation. (En fait, cette propriété caractérise les espaces métriques compacts). En déduire que les espaces métriques compacts sont complets.

3) Soient d la distance euclidienne et δ la distance définie par $\delta(x, y) = |arctan(x) - arctan(y)|$ sur $\mathbb{R}$. a) Montrer que les topologies de $(\mathbb{R}, d)$ et de $(\mathbb{R}, \delta)$ sont les mêmes.

b) Construire une suite de Cauchy de $(\mathbb{R}, \delta)$ qui n'est pas une suite de Cauchy de $(\mathbb{R}, d)$.

c) Montrer que $(\mathbb{R}, \delta)$ n'est pas complet. Quel est son complété ?

4) Soit le système d'équation : $sin(x + y) = 2x,\ cos(x - y) = 2y \quad (*)$.

a) Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application

$$(x, y) \mapsto (\frac{\sin(x + y)}{2}, \frac{\cos(x - y)}{2}).$$

Quel est le lien entre les points fixes de F et le système d'équation $(*)$?

b) Majorer la norme d'application $\|DF(x, y)\|$ par $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Que peut-on en déduire sur l'ensemble des solutions de $(*)$?

5) Montrer que dans un espace compact, deux fermés disjoints sont contenus dans des ouverts disjoints. Montrer la même propriété pour un espace métrique (montrer d'abord que la fonction distance à un fermé est continue).

6) Montrer qu'un espace qui est à la fois discret et compact est fini.

7) Parmi les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$, lesquelles sont compactes ?

a) $H_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy = 1, |x + y| \leqslant a\}$ pour $2 \leqslant a \leqslant \infty$;
b) $S_b = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -b|x| \leqslant y \leqslant 1 - x^2\}$ pour $b \in \mathbb{R}^+$;
c) $P_1 = \{(0, 0)\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{\frac{1}{n}\} \times [0, \frac{1}{n}], \quad P_2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{n\} \times [0, \frac{1}{n}]$;
d) $S = \{(0, 0)\} \cup \{(x, x \sin(\frac{1}{x})) \,|\, 0 < x \leqslant 1\}$;
e) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant 1\}, \quad D_{\mathbb{Q}} = D \cap \mathbb{Q}^2, \quad D_{\mathbb{Z}} = D \cap \mathbb{Z}^2$.

8) Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ une partie compacte et $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie usuelle.

a) Montrer que $A \times A$ est un fermé de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$.

b) Montrer que $A \times A$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^{2n}$.

c) En déduire qu'il existe $(x, y) \in A \times A$ réalisant le diamètre de A, i.e. tel que $d(x, y) = \sup_{(z_1,z_2)\in A\times A} d(z_1, z_2)$. Ici, d désigne une distance associée à une norme.

d) On suppose que A n'est pas singleton. Montrer qu'une application contractante $\phi : A \to A$ ne peut être surjective. On pourra considérer les antécédants de deux points x, y de A ayant la propriété (c).

9) Soient $A \subset \mathbb{R}^m$ et $B \subset \mathbb{R}^n$ des parties compactes. On rappelle que $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(\|x_1 - y_1\|_2^{\mathbb{R}^m}, \|x_2 - y_2\|_2^{\mathbb{R}^n})$ définit une distance sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

a) Montrer que la boule de rayon ϵ et de centre (x_1, x_2) de l'espace métrique $(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, d)$ s'identifie au produit de la boule $B(x_1, \epsilon)$ de l'espace normé $(\mathbb{R}^m, \|-\|_2)$ et de la boule $B(x_2, \epsilon)$ de l'espace normé $(\mathbb{R}^n, \|-\|_2)$.

b) En déduire qu'il existe pour tout $\epsilon > 0$ un nombre fini de boules de rayon ϵ de l'espace métrique $(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, d)$ dont la réunion recouvre $A \times B$.

c) Montrer que parmi les triangles de $\mathbb{R}^2$ ayant leurs sommets sur le cercle-unité S^1, il en existe un d'aire maximale. On rappelle que l'aire $A(a, b, c)$ du triangle de sommets a, b, c se calcule par la formule

$$A(a, b, c) = \frac{1}{2}|det(b - a, c - a)|.$$

6.4 Espaces connexes.

1) Soient $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy \geqslant 0\}$ et $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| \leqslant y \leqslant x^2\}$.

a) Déterminer si D, H resp. L est *ouvert*, *fermé*, *compact*, *connexe.*

b) Même question pour $\mathbb{R}^2 - D$, $\mathbb{R}^2 - H$ resp. $\mathbb{R}^2 - L$.

c) Indiquer le nombre de composantes connexes de $\mathbb{R}^2 - D$, de $\mathbb{R}^2 - H$, de $\mathbb{R}^2 - L$, et de $\mathbb{R}^2 - (D \cup H \cup L)$.

2) Soient A, B deux parties d'un espace topologique E.

a) Montrer que si A est connexe et $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ alors B est connexe.

b) Montrer que si A et B sont connexes et s'il existe un point de A qui adhère à B (ou vice versa) alors $A \cup B$ est connexe.

3) Soit E un espace topologique ayant la propriété (*) que chaque point $x \in E$ possède un voisinage connexe.

a) Donner des exemples d'espaces ayant la propriété (*).

b) Montrer que les composantes connexes de E sont ouvertes. Montrer inversement que cette propriété entraine (*).

c) Déduire de (b) que si E est également compact, alors E ne possède qu'un nombre fini de composantes connexes.

d) On considère la partie $F = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}_*\}$ de $\mathbb{R}$, munie de la topologie induite. Montrer que l'espace topologique F ne vérifie pas (*). Montrer que F est compact et déterminer les composantes connexes de F.

e) On suppose que E vérifie la propriété (**) que pour tout $x \in E$, tout voisinage de x contient un voisinage connexe de x. Montrer alors que les composantes connexes de tout ouvert de E sont ouvertes.

f) Montrer inversement que si les composantes connexes de tout ouvert de E sont ouvertes, alors E vérifie la propriété (**). Donner des exemples d'espaces vérifiant (**). De tels espaces sont appelés *localement connexes*.

4) Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que $e^{2\pi i f} = e^{2\pi i g} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

a) Rappeler pourquoi une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ est constante.

b) Démontrer l'existence d'une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $f = g + \lambda$.

5) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in U$.

a) Montrer qu'une boule d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé est convexe.

b) Soient $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to U$ des chemins continus tels que $\gamma_1(0) = a$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, $\gamma_2(1) = b$. Montrer qu'il existe un chemin continu $\gamma : [0,1] \to U$ tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

c) Soit A l'ensemble des points $b \in U$ pour lesquels il existe un chemin continu $\gamma : [0,1] \to U$ tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. Déduire de (a) et de (b) que A est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

d) Montrer que $U - A$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

e) Montrer qu'un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs.

6) Montrer que parmi les six espaces suivants : le cercle-unité S^1, la sphère-unité S^2, l'intervalle-unité $[0,1]$, le carré-unité $[0,1]^2$, la droite réelle $\mathbb{R}$ et le plan réel $\mathbb{R}^2$, aucun n'est homéomorphe à un autre.

7) Montrer qu'un espace non vide qui est à la fois connexe et discret est réduit à un point. En déduire qu'une application continue $f : X \to Y$ d'espaces topologiques est un homéomorphisme si et seulement si elle vérifie

(i) Les fibres $f^{-1}(y)$ sont connexes pour tout $y \in Y$.

(ii) pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert V_x tel que la restriction de f à V_x est un homéomorphisme de V_x sur un ouvert $f(V_x)$ de Y.

Une application f vérifiant (ii) est appelée *homéomorphisme local*. On pourra montrer que les fibres d'un homéomorphisme local sont discrètes.

8) a) Soit $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$. Montrer que l'application $\mathbb{R} \to S^1 : t \mapsto e^{it}$ est un homéomorphisme local, qui n'est pas un homéomorphisme.

b) Soient $f : X \to Y$ un homéomorphisme local et Y localement connexe. Montrer que X est localement connexe. Montrer inversement que, si f est un homéomorphisme local surjectif et X est localement connexe, alors Y est localement connexe.

6.5 Espaces de Hilbert.

1) Soient E un espace de Hilbert et $u : E \to E$ linéaire et continue.

a) Montrer que pour $x \in E$ fixe, l'application

$$u_x : E \to \mathbb{C} : y \mapsto < x, u(y) >$$

est continue. En déduire qu'il existe un unique vecteur $u^*(x)$ tel que $< u^*(x), y >=< x, u(y) >$.

b) Montrer que l'application ainsi définie est linéaire, continue et vérifie $\|u^*\| \leqslant \|u\|$. En déduire l'égalité $\|u^*\| = \|u\|$ en observant que $u^{**} = u$.

2) Soit $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un système total de vecteurs linéairements indépendants d'un espace de Hilbert E. On pose par récurrence sur n :

$$f_0 = e_0/\|e_0\|, \quad F_n = \mathbb{C}f_0 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}f_n,$$
$$f_{n+1} = (e_{n+1} - (e_{n+1})_{F_n})/\|e_{n+1} - (e_{n+1})_{F_n}\|.$$

a) Montrer que $F_n = \mathbb{C}e_0 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}e_n$ et que $f_i \perp f_j$ pour $i \neq j$.

b) En déduire que $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de E.

3) Soit $((x_i, y_i))_{i\in I}$ un ensemble fini de points de $\mathbb{R}^2$.

a) Montrer que $\mathbb{R}^I$ muni du produit scalaire $< x, y >= \frac{1}{\#I} \sum_{i\in I} x_i y_i$ est un espace de Hilbert réel de dimension finie (alias espace euclidien).

b) Montrer que pour $a, b \in \mathbb{R}$, les points $(a+bx_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{R}^I$ forment un sous-espace de Hilbert F dont une base hilbertienne est donnée par $(1)_{i\in I}$ et $(\frac{x_i-\overline{x}}{\|x_i-\overline{x}\|})_{i\in I}$ où $\overline{x}$ désigne la moyenne des x_i, $i \in I$.

c) Calculer la projection orthogonale de $(y_i)_{i\in I}$ sur F. C'est ce qu'on appelle *la droite des moindres carrés* de l'ensemble $((x_i, y_i))_{i\in I}$ de $\mathbb{R}^2$.

4) Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = t$ pour $0 \leqslant t \leqslant \pi$ et $f(t) = 2\pi - t$ pour $\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$. Déterminer les coefficients de Fourier de f. Evaluer en $t = 0$. Que donne l'identité de Parseval ?

5) Calculer la série de Fourier réelle de la fonction 2π-périodique définie en $t \in [0, 2\pi]$ par $f(t) = t(2\pi - t)$. Évaluer en $t = \pi$. Utiliser l'identité de Parseval pour déterminer $\sum_{k>0} \frac{1}{k^4}$.

6.6 Partiel du 28 novembre 2000.

1) Soient E, E' deux espaces métriques et $f : E \to E'$ une application continue. On suppose que E est compact.

a) Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un recouvrement de E par un nombre *fini* de boules ouvertes $B(x_i; \delta_i/2)$ telles que pour tout i

$$f(B(x_i; \delta_i)) \subset B(f(x_i); \epsilon/2).$$

b) On pose $\delta = \frac{1}{2}\min_i \delta_i$. Montrer que si deux points x, y de E vérifient $d(x, y) < \delta$, alors il existe un i tel que la boule $B(x_i; \delta_i)$ contienne x et y.

c) Déduire de ce qui précède que f est *uniformément* continue.

d) Montrer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue. On pourra raisonner par l'absurde en posant $\epsilon = 1$. Commentaire.

2) Soient E un espace topologique séparé et $x \in E$.

a) Montrer que si A est une partie compacte de E et $x \notin A$, alors il existe un ouvert V tel que $A \subset V$ et $x \notin \overline{V}$.

b) En déduire que si E est compact, alors pour tout ouvert U contenant x il existe un fermé F tel que $x \in \overset{o}{F} \subset F \subset U$. On pourra poser $A = E \backslash U$.

c) Établir la même propriété si E est un espace métrique non compact.

3) Soit E un espace métrique complet.

a) Montrer qu'une partie U de E est dense dans E si et seulement si tout ouvert V de E rencontre U.

b) Pour tout entier $n \geqslant 0$, soit B_n une boule *fermée* de rayon ϵ_n dans E. On suppose que $B_n \supset B_{n+1}$ pour tout n et que $\lim_n \epsilon_n = 0$. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ des *centres* des B_n est une suite de Cauchy et que la limite de cette suite appartient à toutes les boules B_n.

c) Soit $(U_n)_{n \geqslant 0}$ une famille d'ouverts denses de E et soit V un ouvert quelconque de E. Montrer qu'il existe une suite de boules *fermées* B_n de rayon ϵ_n telle que $B_0 \subset U_0 \cap V$ et $B_{n+1} \subset U_{n+1} \cap \overset{o}{B_n}$ et $\lim_n \epsilon_n = 0$.

d) En déduire que l'intersection $U = \bigcap_{n \geqslant 0} U_n$ est dense dans E.

6.7 Examen du 26 janvier 2001

1) Parties de $\mathbb{R}^2$. On considère $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geqslant 0\}$ et $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leqslant y \leqslant x^2\}$.

a) Déterminer si D, H resp. L est *ouvert*, *fermé*, *compact*, *connexe.*

b) Même question pour $\mathbb{R}^2 - D$, $\mathbb{R}^2 - H$ resp. $\mathbb{R}^2 - L$.

c) Indiquer le nombre de composantes connexes de $\mathbb{R}^2 - D$, de $\mathbb{R}^2 - H$, de $\mathbb{R}^2 - L$, et de $\mathbb{R}^2 - (D \cup H \cup L)$.

2) Adhérence. Soient A, B des parties d'un espace topologique E.

a) Montrer que si $A \subset B$ alors $\overline{A} \subset \overline{B}$.

b) Établir que $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.

c) En déduire que $\overset{o}{A} \cap \overset{o}{B} = (A \cap B)^o$ par passage au complémentaire.

3) Point fixe. On considère la fonction $f : [1, \infty[\to [1, \infty[: x \mapsto \sqrt{1 + x}$ ainsi que la suite $(a_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $a_0 = 1$ et $a_n = f(a_{n-1})$.
On rappelle que le théorème des accroissements finis implique que f est k-lipschitzienne dès que $\|f'\|_\infty \leqslant k$.

a) Montrer que f est k-lipschitzienne pour une constante $k < 1$. En déduire que la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ converge. Déterminer $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

b) Montrer que pour tout $x \in [1, \infty[$ et tout $n > 0$ on a

$$d(x, f^n(x)) \leqslant (1 + k + k^2 + \cdots + k^{n-1})d(x, f(x)).$$

En déduire que $d(x, a) \leqslant \frac{1}{1-k} d(x, f(x))$ et que $d(f^n(x), a) \leqslant \frac{k^n}{1-k} d(x, f(x))$.

c) Trouver une fonction $\epsilon : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{n\to\infty} \epsilon(n) = 0$ et $d(a_n, a) \leqslant \epsilon(n)$ pour tout $n > 0$.

4) Compacité. Soient $A \subset \mathbb{R}^m$ et $B \subset \mathbb{R}^n$ des parties compactes, et $C \subset \mathbb{R}^2$ le cercle-unité.

a) Montrer que $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(\|x_1 - y_1\|_2^{\mathbb{R}^m}, \|x_2 - y_2\|_2^{\mathbb{R}^n})$ définit une distance sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

b) Montrer que la boule de rayon ϵ et de centre (x_1, x_2) de l'espace métrique $(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, d)$ s'identifie au produit de la boule $B(x_1, \epsilon)$ de l'espace normé $(\mathbb{R}^m, \|-\|_2)$ et de la boule $B(x_2, \epsilon)$ de l'espace normé $(\mathbb{R}^n, \|-\|_2)$.

c) En déduire qu'il existe pour tout $\epsilon > 0$ un nombre fini de boules de rayon ϵ de l'espace métrique $(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, d)$ dont la réunion recouvre $A \times B$. En conclure que $C \times C \times C$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^6$ et que parmi les triangles de $\mathbb{R}^2$ ayant leurs sommets sur C, il en existe un d'aire maximale.

5) Connexité. On pose $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|x = y\}$.

a) Déterminer les composantes connexes de $\mathbb{R}^2 - \Delta$.

b) Montrer qu'une partie connexe Γ de $\mathbb{R}^2$ qui rencontre toutes les composantes connexes de $\mathbb{R}^2 - \Delta$ rencontre également Δ.

c) Soit Γ une partie connexe de $\mathbb{R}^2$ telle que $pr_1(\Gamma) = \mathbb{R}$ et telle que $pr_2(\Gamma)$ est bornée, où $pr_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est la projection $(x_1, x_2) \mapsto x_i$. Montrer alors en utilisant (b) que Γ rencontre Δ.

d) En déduire qu'une fonction continue bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet un point fixe (on pourra utiliser le graphe Γ_f de f).

6) Série de Fourier. On définit par récurrence une suite de polynômes $(Q_n(X))_{n\geqslant 0}$ vérifiant : $Q_0 = 1, \quad \frac{dQ_n}{dX} = Q_{n-1}, \quad \int_0^{2\pi} Q_n(t)dt = 0.$
Chaque polynôme détermine une fonction 2π-périodique $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f_n(t + 2\pi k) = Q_n(t)$ pour $t \in]0, 2\pi[$ et $f_n(2\pi k) = \frac{1}{2}(Q_n(0) + Q_n(2\pi))$, $k \in \mathbb{Z}$.

a) Montrer que $Q_1(X) = X - \pi$ et que pour $n \geqslant 2$, $Q_n(0) = Q_n(2\pi)$. Que peut-on en déduire pour la convergence de la série de Fourier de f_n ?

b) Montrer que les polynômes $Q_n(X) = \sum_{k=0}^n \pi^{n-k} q_{n-k} \frac{X^k}{k!}$ satisfont aux conditions de récurrence si et seulement si les nombres réels q_n vérifient

$$q_0 = 1 \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{(k+1)!} q_{n-k} = 0 \text{ pour tout } n \geqslant 1.$$

c) Montrer par récurrence sur n que pour $n > 0$, les coefficients de Fourier de f_n sont donnés par $c_0(f_n) = 0$ et $c_k(f_n) = -\frac{1}{(ik)^n}$, $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

d) Soit $n > 0$ pair. Montrer que f_n est une fonction paire dont on explicitera la série de Fourier réelle. Déterminer la valeur de la série numérique $\sum_{k>0} \frac{1}{k^n}$ à l'aide du polynôme $Q_n(X)$. Utiliser (b) pour donner les valeurs exactes si $n = 2, 4, 6$.

6.8 Examen du 7 septembre 2001

1) Parties de $\mathbb{R}^2$. On considère les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} H_1 =& \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leqslant y \leqslant x + 2\},\\ H_2 =& \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2 \leqslant y \leqslant x^2\},\\ H_3 =& \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leqslant x^2 \text{ et } y \leqslant x + 2\},\\ H_4 =& \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant x^2 \text{ et } y \geqslant x + 2\}.\end{aligned}$$

a) Déterminer lesquelles de ces parties sont fermées, lesquelles sont connexes, lesquelles sont compactes et lesquelles sont complètes pour la métrique euclidienne.

b) Décrire algébriquement les composantes connexes C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 de $\{(x, y) \mid y \neq x^2 \text{ et } y \neq x + 2\}$. Sont-elles fermées ou ouvertes dans $\mathbb{R}^2$?

c) Exprimer les $H_j, j = 1, \ldots, 4$, en fonction des $C_i, i = 1, \ldots, 5$.

2) Frontière. Soient $A \subseteq \mathbb{R}^m$ et $B \subseteq \mathbb{R}^n$. On rappelle que la frontière $\mathrm{Front}(A)$ est définie comme l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^m$ tels que tout ouvert contenant x rencontre à la fois A et $\mathbb{R}^m \backslash A$.

a) Etablir l'égalité $\mathrm{Front}(A) = \overline{A} \cap \overline{\mathbb{R}^m \backslash A}$.

b) Ecrire $\mathbb{R}^m \backslash \mathrm{Front}(A)$ comme une réunion d'ouverts de $\mathbb{R}^m$. En déduire que si $\mathbb{R}^m \backslash \mathrm{Front}(A)$ est connexe alors soit A soit $\mathbb{R}^m \backslash A$ est dense dans $\mathbb{R}^m$.

c) Montrer $(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \backslash (A \times B) = ((\mathbb{R}^m \backslash A) \times \mathbb{R}^n) \cup (\mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^n \backslash B))$. En déduire l'inclusion $(\mathrm{Front}(A) \times B) \cup (A \times \mathrm{Front}(B)) \subseteq \mathrm{Front}(A \times B)$.

d) Expliciter (c) dans le cas $A = B = [0, 1]$. Que constatez-vous ?

3) Homéomorphie.

a) Montrer que tout homéomorphisme $\phi : [0, 1] \to [0, 1]$ vérifie soit $\phi(0) = 0$ et $\phi(1) = 1$ soit $\phi(0) = 1$ et $\phi(1) = 0$. On pourra étudier la restriction de ϕ à l'intervalle ouvert $]0, 1[$ et raisonner par l'absurde.

b) Montrer que parmi les cinq espaces topologiques : $\mathbb{R}^1$ (la droite), $\mathbb{R}^2$ (le plan), S^1 (le cercle), S^2 (la sphère), $\mathrm{S}^1 \times \mathbb{R}^1$ (le cylindre), il n'y en a pas deux qui soient homéomorphes. On pourra étudier cas par cas en raisonnant par l'absurde.

4) Compacité. Un espace topologique E est *localement compact* si pour tout $x \in E$ il existe un ouvert de E contenant x et ayant une adhérence compacte. Une partie A de E est *paracompacte* s'il existe une suite croissante de parties compactes $(K_n)_{n \geqslant 0}$ de E telle que $A = \bigcup_{n \geqslant 0} K_n$.

a) Montrer que $\mathbb{R}^m$ est localement compact et paracompact.

b) Montrer que toute partie fermée de $\mathbb{R}^m$ est paracompacte.

c) Montrer que toute partie ouverte de $\mathbb{R}^m$ est paracompacte. On pourra étudier les parties $\{x \in \mathbb{R}^m \mid d(x,a) \leqslant n+1 \text{ et } d(x,\mathbb{R}^m \backslash U) \geqslant \frac{1}{n+1}\}$ où d désigne une distance sur $\mathbb{R}^m$ et a désigne un point de U.

d) Montrer que l'intersection de deux parties paracompactes de $\mathbb{R}^m$ est paracompacte.

5) Série de Fourier.

a) Montrer qu'il existe une et une seule fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui soit paire et 2π-périodique et qui prenne les valeurs $f(x) = \pi/2 - x$ pour $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

b) Déterminer les coefficients de Fourier complexes et réels de f. En déduire la série de Fourier de f. Est-ce qu'elle converge vers f ? Si oui, quelle est la nature de convergence ?

c) Calculer à l'aide de la série de Fourier de f les valeurs des séries numériques $z_2 = \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$ et $z_4 = \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{(2k+1)^4}$.

d) La fonction zeta de Riemann est définie par $\zeta(n) = \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^n}$. Montrer la relation $\zeta(2) = z_2 + \zeta(2)/4$ et en déduire la valeur de $\zeta(2)$. De même, déterminer la valeur de $\zeta(4)$.

6.9 Partiel du 28 novembre 2001

1) On considère la droite réelle $\mathbb{R}$ munie de la topologie canonique et on pose $S = \{\frac{1}{n} \mid n \geqslant 1, n \text{ entier}\}$ et $T = \bigcup_{n\geqslant 1,\, n \text{ entier}} [\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}]$.

a) Déterminer l'adhérence de S et l'adhérence de T.

b) Déterminer la frontière de S et la frontière de T.

c) Déterminer l'intérieur de S et l'intérieur de T.

2) Soit E un espace topologique et soit $x \in E$.

a) Rappeler la définition d'un voisinage de x. Montrer que l'intersection de deux voisinages de x est un voisinage de x.

b) On se donne une famille $(V_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{B}_x}$ de voisinages de x telle que tout voisinage de x contienne un V_α pour un $\alpha \in \mathcal{B}_x$. Montrer qu'une partie A de E est ouverte si et seulement si A contient pour tout $x \in A$ un voisinage V_α pour un $\alpha \in \mathcal{B}_x$.

c) Montrer que dans un espace métrique (E, d) on peut choisir une famille *dénombrable* de voisinages de x ayant la propriété (b).

3) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Une partie A de E est dite *convexe* si pour $a, b \in A$, le segment $[a, b] = \{(1-t)a + tb \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ est contenu dans A. On notera $C \neq \emptyset$ une partie ouverte et convexe de E.

a) Pour $v \neq 0$, on note $I_v \subset \mathbb{R}$ l'ensemble des réels $\lambda > 0$ tels que $\lambda v \in C$. Montrer que I_v est non-vide et que c'est un intervalle borné de $\mathbb{R}$. On pourra considérer la demi-droite de E d'origine 0 et passant par v.

b) Pour $v \neq 0$ on pose $s(v) = \sup I_v$. Montrer que pour des vecteurs non nuls v, w, on a $\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}(v+w) \in C$, si $\lambda < s(v)$ et $\mu < s(w)$. En déduire l'inégalité $s(v+w) \geqslant \frac{s(v)s(w)}{s(v)+s(w)}$.

c) On suppose que C est stable par la symétrie $x \mapsto -x$. En déduire que $s(v) = s(-v)$ et que pour un réel non nul α on a $s(\alpha v) = \frac{1}{|\alpha|}s(v)$.

d) Montrer que l'application $N : E \to \mathbb{R}$ définie par $N(0) = 0$ et $N(v) = \frac{1}{s(v)}$ pour $v \neq 0$, est une norme sur E. Quelle est la boule-unité centrée à l'origine pour cette norme ?

6.10 Examen du 25 janvier 2002

1) Point fixe. On considère l'application $f : [-\pi/2, \pi/2] \to [-\pi/2, \pi/2]$ définie par $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$.

a) Déterminer l'image I de $[-\pi/2, \pi/2]$ par f.

b) Montrer que la restriction $f_{|I} : I \to I$ est contractante.

c) En déduire que 0 est le seul point fixe de f.

2) Homéomorphisme. Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé, soit g une application continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$ et, si $x \neq g(x)$, soit $j(x) = \frac{x-g(x)}{\|x-g(x)\|}$.

a) Montrer que l'application $j : \{x \in [a, b] \,|\, x \neq g(x)\} \to \{1, -1\}$ est continue. En déduire que g admet au moins un point fixe.

b) Montrer que si g est un homéomorphisme, alors $g(\{a, b\}) = \{a, b\}$.

c) On suppose que g est un homéomorphisme n'ayant qu'un seul point fixe, noté ξ. Montrer alors que $g(a) = b$ et $g(b) = a$. Déterminer $j([a, \xi[)$ et $j(]\xi, b])$. En déduire $g([a, \xi])$ et $g([\xi, b])$.

3) Compacité. Soit E un espace topologique séparé.

a) Montrer qu'une intersection de compacts de E est compacte. Montrer qu'une réunion *finie* de compacts de E est compacte.

b) Soit $\hat{E} = E \cup \{\infty_E\}$. Par définition, une partie de $\hat{E}$ est dite ouverte si soit A est une partie ouverte de E soit A contient ∞_E et $\hat{E} - A$ est un compact de E. Montrer que cela définit une topologie $\hat{\mathcal{T}}$ sur $\hat{E}$.

c) Montrer que de tout recouvrement de $\hat{E}$ par des ouverts on peut extraire un recouvrement fini (traiter à part l'ouvert qui contient ∞_E). En déduire que si dans E tout point admet un voisinage compact, alors l'espace topologique $(\hat{E}, \hat{\mathcal{T}})$ est compact.

3) Suites. On conservera les notations et résultats de l'exercice précédent. On dira qu'une suite $(x_p)_{p\geqslant 0}$ de points de $(\mathbb{R}^n, \|-\|)$ *diverge* si la suite numérique $(\|x_p\|)_{p\geqslant 0}$ tend vers ∞.

a) Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $(x_p)_{p\geqslant 0}$ diverge dans $\mathbb{R}^n$;

(ii) tout compact de $\mathbb{R}^n$ ne contient qu'un nombre fini de x_p;

(iii) $(x_p)_{p\geqslant 0}$ converge vers $\infty_{\mathbb{R}^n}$ dans $\widehat{\mathbb{R}^n}$.

b) Montrer que pour une application continue $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f transforme suites divergentes en suites divergentes;

(ii) l'application $\hat{f} : \widehat{\mathbb{R}^n} \to \widehat{\mathbb{R}^m}$ définie par $\hat{f}(x) = f(x)$ si $x \in \mathbb{R}^n$ et $\hat{f}(\infty_{\mathbb{R}^n}) = \infty_{\mathbb{R}^m}$ est continue;

(iii) pour tout compact K de $\mathbb{R}^m$, $f^{-1}(K)$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.

5) Connexité. On considère les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$:

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy \geqslant 0\} \text{ et } S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = \sin(x)\}.$$

a) Montrer que C et S sont connexes.

b) Montrer que $C - \{(0,0)\}$ et $S - \{(0,0)\}$ ne sont pas connexes.

c) Expliciter (en justifiant !) l'ensemble des composantes connexes de $\mathbb{R}^2 - C$, de $\mathbb{R}^2 - S$ et de $\mathbb{R}^2 - (C \cup S)$.

6.11 Examen du 10 septembre 2002

1) Parties de $\mathbb{R}^2$. On considère les parties de $\mathbb{R}^2$ définies par

$$H_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|xy \leqslant \frac{1}{n}\} \text{ et } B_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|x^2 + y^2 < \frac{1}{n^2}\},$$

où n est un entier positif nonnul. On note $H_\infty = \bigcap_{n>0} H_n$ et $B_\infty = \bigcap_{n>0} B_n$.

a) Déterminer pour quels n, H_n est ouvert (resp. fermé resp. connexe resp. compact).

b) Déterminer pour quels n, B_n est ouvert (resp. fermé resp. connexe resp. compact).

c) Calculer la distance euclidienne de la frontière de H_n à l'origine.

d) Déterminer pour quels m, n, la différence $H_m \backslash B_n$ est ouverte (resp. fermée resp. connexe resp. compacte).

e) Déterminer pour quels m, n, la différence $B_n \backslash H_m$ est ouverte (resp. fermée resp. connexe resp. compacte).

2) Connexité. On appelle *zigzag* de $\mathbb{R}^n$ reliant p à q toute réunion finie de segments $[p_0, p_1] \cup [p_1, p_2] \cup \cdots \cup [p_{k-1}, p_k]$ telle que $p = p_0$ et $q = p_k$. Un zigzag peut être stationnaire, i.e. ne contenir qu'un point. Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est dite *fortement connexe*, si pour tout couple de points $(p,q) \in A^2$ il existe un zigzag contenu dans A et reliant p à q.

a) Montrer qu'une partie fortement connexe est connexe.

b) Montrer que s'il existe un zigzag reliant p à q et un zigzag reliant q à r, alors il existe un zigzag reliant p à r.

c) Montrer que les boules ouvertes de $\mathbb{R}^n$ sont fortement connexes.

d) Montrer (à l'aide de b et c) que pour une partie ouverte A de $\mathbb{R}^n$ et un point $p \in A$, l'ensemble des points $q \in A$ qui sont reliés à p par un zigzag dans A forment une partie ouverte. Montrer de même que l'ensemble des points $q \in A$ qui ne sont pas reliés à p par un zigzag dans A forment une partie ouverte.

e) Déduire de d) qu'une partie ouverte connexe de $\mathbb{R}^n$ est fortement connexe. Donner l'exemple d'une partie connexe de $\mathbb{R}^n$ qui n'est pas fortement connexe.

3) Compacité. On suppose que E est un espace compact. On désigne par p un point de E et par A une partie fermée de E ne contenant pas p.

a) Rappeler la définition d'un espace compact. Que peut-on dire des parties fermées d'un espace compact ?

b) Montrer qu'il existe des ouverts $U_0, U_1, \ldots, U_k (k \geqslant 1)$ de E tels que $p \in U_0, A \subset U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_k$ et $U_0 \cap U_i = \emptyset$ pour $i = 1, \ldots, k$.

c) Déduire de b) que l'adhérence de U_0 ne rencontre pas A.

d) Soit V un voisinage ouvert de p. Montrer l'existence d'un voisinage ouvert de p dont l'adhérence est compacte et contenue dans V. On pourra utiliser c) en posant $A = E - V$.

e) Montrer la propriété d) pour un espace métrique quelconque (E, d).

4) Point fixe. On considère la fonction $f : [1, \infty[\to [1, \infty[: x \mapsto \sqrt{3 + x}$ ainsi que la suite $(a_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $a_0 = 1$ et $a_n = f(a_{n-1})$.
On rappelle que le théorème des accroissements finis implique que f est k-lipschitzienne dès que $\|f'\|_\infty \leqslant k$.

a) Montrer que f est k-lipschitzienne pour une constante $k < 1$.

b) Montrer que la suite $(a_n)_{n \geqslant 0}$ converge. Déterminer sa limite a.

c) Montrer que pour tout $x \in [1, \infty[$ et tout $n > 0$ on a

$$|x - f^n(x)| \leqslant (1 + k + k^2 + \cdots + k^{n-1})|x - f(x)|.$$

d) Établir les inégalités

$$|x - a| \leqslant \frac{1}{1-k}|x - f(x)| \text{ et } |f^n(x) - a| \leqslant \frac{k^n}{1-k}|x - f(x)|.$$

e) Trouver une fonction $\epsilon : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{n\to\infty} \epsilon(n) = 0$ et $d(a_n, a) \leqslant \epsilon(n)$ pour tout $n > 0$.

6.12 Partiel du 19 novembre 2002

1) On considère le plan réel $\mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne d_2. On pose $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0\}$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\}$.

a) Montrer que H et D sont des ouverts de $(\mathbb{R}^2, d_2)$.

b) Déterminer l'adhérence de H, de D et de $H \cap D$ dans $(\mathbb{R}^2, d_2)$.

c) Rappeler pourquoi la frontière Front(A) d'une partie *ouverte* A d'un espace topologique est l'ensemble des points adhérents de A non contenus dans A. En déduire Front(H), Front(D) et Front$(H \cap D)$ dans $(\mathbb{R}^2, d_2)$.

2) On définit une application $\delta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $\delta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |y_1 - y_2|$ si $x_1 = x_2$ et $\delta((x_1, y_1), (x_2, y_2) = |x_1 - x_2| + |y_1| + |y_2|$ si $x_1 \neq x_2$. Les parties H et D sont définies comme ci-dessus.

a) Montrer que δ est une distance sur $\mathbb{R}^2$.

b) Déterminer la boule $B((x, y); r)$ de l'espace métrique $(\mathbb{R}^2, \delta)$ dans le cas $y \neq 0$, $r < |y|$, et dans le cas $y = 0, r$ quelconque.

c) Montrer que H et D sont des ouverts de $(\mathbb{R}^2, \delta)$. Montrer que pour tout $(0, y)$ tel que $y \neq 0$ il existe une boule ouverte de $(\mathbb{R}^2, \delta)$ centrée en $(0, y)$ et ne rencontrant pas H.

d) Déterminer l'adhérence de H, de D et de $H \cap D$ dans $(\mathbb{R}^2, \delta)$. En déduire Front(H), Front(D) et Front$(H \cap D)$ dans $(\mathbb{R}^2, \delta)$.

3) Soit E un espace topologique et soient A, B deux parties de E.

a) Montrer l'inclusion Front$(A \cup B) \subset$ Front$(A) \cup$ Front(B). Indiquer deux parties A, B de $\mathbb{R}$ telles que Front$(A \cup B) \neq$ Front$(A) \cup$ Front(B).

b) Supposons qu'il n'existe aucun point de E à la fois adhérent de A et adhérent de B. Montrer alors l'égalité Front$(A \cup B) =$ Front$(A) \cup$ Front(B).

c) Supposons que A et B soient des parties ouvertes et denses dans E. Montrer alors l'identité Front$(A \cup B) =$ Front$(A) \cap$ Front(B).

6.13 Examen du 5 février 2003

1) Parties de $\mathbb{R}^2$.
On considère $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -x^2 \leqslant y \leqslant x^2\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ et $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| = |y|\}$.

a) Lesquelles parmi les parties suivantes sont compactes, lesquelles sont connexes : $A, B, C, A \cap B, A \cap C, B \cap C, \mathbb{R}^2 \backslash (A \cup B \cup C)$?

b) Expliciter les composantes connexes de $\mathbb{R}^2 \backslash A, \mathbb{R}^2 \backslash B, \mathbb{R}^2 \backslash C$ et de $\mathbb{R}^2 \backslash (A \cup C)$.

2) Vrai ou faux ? On déterminera si les énoncés suivants sont vrais ou faux ; pour les énoncés vrais on donnera une preuve, pour les énoncés faux on donnera un contre-exemple.

a) Une composante connexe d'un espace compact est compacte.

b) Une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ est compacte si et seulement si les n projections $pr_k(A), k = 1, .., n$, sont des parties compactes de la droite réelle.

c) Une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ est connexe si et seulement si les n projections $pr_k(A), k = 1, .., n$, sont des parties connexes de la droite réelle.

d) Les parties à la fois compactes et connexes de la droite réelle sont précisément les intervalles fermés de longueur finie.

e) On considère la sphère-unité $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ et la boule-unité $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\}$ par rapport à une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$. Alors, toute partie connexe de $\mathbb{R}^n$ contenant des points de l'intérieur et de l'extérieur de B^n rencontre S^{n-1}.

3) Espaces ultramétriques, ensemble triadique de Cantor. Soit d une distance sur un ensemble E satsfaisant l'inégalité (dite ultramétrique)

$$d(x,z) \leqslant \max(d(x,y), d(y,z)) \qquad \text{(U)}.$$

a) Montrer que (U) entraîne l'inégalité triangulaire, donc (E,d) est un espace métrique.

b) On suppose ici que $d(x,y) > d(y,z)$ (H).
i) Montrer que $d(x,z) \leqslant d(x,y)$.
ii) En permutant z et y dans (U), montrer que $d(x,y) \leqslant d(x,z)$.
iii) Conclure que sous l'hypothèse (H) on a l'égalité dans (U).

c) Montrer que les boules ouvertes de (E,d) sont des parties à la fois ouvertes et fermées de (E,d). En déduire que les composantes connexes de (E,d) sont les parties singletons de E.

d) Montrer qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est de Cauchy si et seulement si elle vérifie $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$.

e) Soit $E_X = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \mid x_n \in X\}$ l'ensemble des suites d'éléments d'un ensemble X. Soit $k((x_n),(y_n))$ le plus petit entier tel que $x_n \neq y_n$. On pose $d_X((x_n),(y_n)) = \frac{1}{k((x_n),(y_n))}$.

i) Montrer que d_X est une distance ultramétrique sur E_X.
ii) Montrer que (E_X, d_X) est un espace métrique complet.

f) On pose $X = \{0,2\}$ et on définit $\phi : E_{\{0,2\}} \to \mathbb{R} : (x_n) \mapsto \sum_{n>0} \frac{x_n}{3^n}$.

i) Déduire de (eii) que $(E_{\{0,2\}}, d_{\{0,2\}})$ est un espace métrique compact.
ii) Montrer que ϕ est injective. En déduire que ϕ est un homéomorphisme sur son image (connue sous le nom d'*ensemble triadique de Cantor*).

4) Locale connexité. Un espace topologique E est dit *localement connexe* si pour tout $x \in E$ et tout ouvert U contenant x, il existe un ouvert connexe V tel que $x \in V \subset U$.

a) Montrer que $\mathbb{R}^n$ est localement connexe.

b) Montrer que les composantes connexes d'un espace localement connexe sont ouvertes.

c) Déduire de (b) qu'un espace à la fois compact et localement connexe n'a qu'un nombre fini de composantes connexes.

d) Montrer que dans un espace localement connexe, toute partie ouverte, munie de la topologie induite, forme un espace localement connexe.

6.14 Examen du 3 septembre 2003

1) Compacité.

a) Laquelle des deux propriétés suivantes d'un espace topologique E est la propriété dite de Borel-Lebesgue :

1. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un recouvrement de E par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ϵ ;
2. De tout recouvrement de E par des parties ouvertes on peut extraire un recouvrement fini.

Quand un espace métrique vérifiant (1) est-il compact ? Quand un espace topologique vérifiant (2) est-il compact ?

b) Soit E un espace compact et soit $(U_n)_{n\geqslant 0}$ une suite croissante de parties ouvertes de E telles que $E = \bigcup_{n\geqslant 0} U_n$. Montrer qu'il existe un entier naturel N tel que $U_N = E$.

c) Soit E un espace compact et soit $(F_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante de parties fermées de E telles que $\emptyset = \bigcap_{n\geqslant 0} F_n$. Montrer qu'il existe un entier naturel N tel que $F_N = \emptyset$.

d) Déduire de (1c) que toute suite décroissante de parties compactes non vides de $\mathbb{R}^m$ a une intersection non vide. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les compacts pour que leur intersection soit singleton.

2) Parties denses et parties minces. On dit qu'une partie A d'un espace topologique E est *dense* (resp. *mince*) si $\overline{A} = E$ (resp. $\overset{o}{A} = \emptyset$).

a) Montrer que A est dense si et seulement si tout ouvert non vide de E rencontre A.

b) Montrer que A est mince si et seulement si le seul ouvert de E inclus dans A est l'ensemble vide.

c) Montrer qu'une partie est dense si et seulement si son complémentaire est mince. Donner l'exemple d'une partie de $\mathbb{R}$ à la fois dense et mince.

d) Montrer que la réunion de deux parties minces est mince pourvu que l'une des deux soit fermée. Que peut-on dire de l'intersection de deux parties denses ?

3) $\mathbb{R}^m$ et la propriété de Baire. On dit qu'un espace topologique E vérifie la propriété de Baire si toute intersection dénombrable de parties ouvertes denses de E est dense dans E.

a) Montrer que toute partie ouverte non vide de $\mathbb{R}^m$ contient une partie ouverte non vide dont l'adhérence est compacte. On pourra utiliser des boules associées à une norme sur $\mathbb{R}^m$.

b) Soit $U = \bigcap_{n\geqslant 0} U_n$ une intersection dénombrable d'ouverts denses de $\mathbb{R}^m$ et soit V un ouvert non vide de $\mathbb{R}^m$. Construire par récurrence à l'aide de (3a) et (2a) une suite décroissante de parties compactes non vides $(K_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}^m$ telles que pour tout n, K_n soit inclus dans $U_n \cap V$.

c) Déduire de (1d) qu'avec les notations de (3b), $U \cap V$ est non vide. Conclure que $\mathbb{R}^m$ vérifie la propriété de Baire.

d) Formuler la propriété de Baire à l'aide des parties minces (cf. 2c). En déduire à l'aide de (3c) que si $m \geqslant 1$, alors $\mathbb{R}^m$ contient une infinité non dénombrable de points.

4) Connexité et points fixes. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Le graphe de f est l'ensemble $\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$ muni de la topologie induite par la topologie usuelle de $\mathbb{R}^2$.

a) Montrer que Γ_f est connexe. On pourra se servir de l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto (x, f(x))$.

b) Montrer que f a un point fixe si et seulement si Γ_f rencontre la bisectrice $\Delta = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2\}$.

c) Expliciter (en justifiant) les composantes connexes de $\mathbb{R}^2 - \Delta$.

d) Déduire de (4a-c) que si f n'a pas de point fixe alors l'application $id_{\mathbb{R}} - f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de signe constant. En déduire qu'une application continue bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ a des points fixes.

6.15 Partiel du 20 novembre 2003

Dans tous les exercices, on se place dans un espace métrique (E,d). Les parties de E seront notées $A, B, etc.$, les points de E seront notés $x, y, etc.$

1) Suites.

a) Exprimer la convergence d'une suite de points de E à l'aide des boules ouvertes de E. En déduire que toute sous-suite d'une suite convergente est convergente.

b) Montrer qu'une suite (x_n) converge sous l'hypothèse que ses sous-suites $(x_{2n}), (x_{2n+1}), (x_{3n})$ convergent. Montrer à l'aide d'un contre-exemple que l'hypothèse que (x_{3n}) converge est nécessaire pour conclure.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on se donne une suite convergente $(x_{n,m})_{m \geqslant 0}$ de limite x_n. On suppose que la suite des limites $(x_n)_{n \geqslant 0}$ converge vers x. Montrer que tout voisinage de x contient une infinité de termes $x_{n,m}$.

2) Points adhérents.

a) Rappeler la définition d'un point adhérent d'une partie A de E.

b) Montrer que x adhère à A si et seulement si $\inf_{z \in A} d(x,z) = 0$.

c) On pose $d(x,A) = \inf_{z \in A} d(x,z)$. Montrer que pour $x, y \in E$, on a l'inégalité $d(x,A) \leqslant d(x,y) + d(y,A)$. En déduire que pour tout réel $\epsilon > 0$, l'ensemble $\{x \in E \,|\, d(x,A) < \epsilon\}$ est ouvert et contient l'adhérence de A.

d) Montrer que tout fermé de E est intersection *dénombrable* d'ouverts.

3) Points intérieurs et points isolés. Un point $x \in A$ est *intérieur* si A est voisinage de x. Un point $x \in A$ est *isolé* si $A \cap B(x,\epsilon) = \{x\}$ pour un réel $\epsilon > 0$ suffisamment petit.

a) Montrer que l'ensemble des points intérieurs (i.e. l'intérieur $\overset{o}{A}$) de A est le plus grand ouvert de E contenu dans A.

b) Montrer que l'intersection des intérieurs de A et de B est l'intérieur de l'intersection de A et de B.

c) Montrer qu'aucun ouvert de $\mathbb{R}^n$ n'a de points isolés.

d) Montrer que si une partie A de $\mathbb{R}^n$ n'a pas de points isolés, alors l'adhérence $\overline{A}$ non plus.

e) Montrer que les points isolés d'une partie fermée A de $\mathbb{R}^n$ n'adhèrent pas à l'intérieur $\overset{o}{A}$.