Structures algébriques et algèbre homologique

Clemens Berger

Table des matières

CHAPITRE 1

Catégories et foncteurs

1. Définitions fondamentales

DÉFINITION 1.1. *Une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée conjointe d'une classe d'objets* $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *et, pour tout couple* $(A, B) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})^2$*, d'un ensemble de morphismes* $\mathcal{C}(A, B)$ *de source A et de but B, tels que*

(a) *tout objet A de $\mathcal{C}$ possède une identité $1_A \in \mathcal{C}(A, A)$;*

(b) *tout couple de morphismes $(f, g) \in \mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C)$ possède une composition $gf \in \mathcal{C}(A, C)$; la composition est associative et unitaire, i.e. pour $(f, g, h) \in \mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \times \mathcal{C}(C, D) : h(gf) = (hg)f$ et $1_B f = f = f 1_A$.*

Au lieu de $f \in \mathcal{C}(A, B)$, on note souvent $f : A \longrightarrow B$.

EXEMPLES 1.2. –

(a) La catégorie $\underline{\mathrm{Ens}}$ dont les objets sont les ensembles, et dont les morphismes sont les applications d'ensembles ;

(b) la catégorie $\underline{\mathrm{Top}}$ dont les objets sont les espaces topologiques, et dont les morphismes sont les applications continues ;

(c) La catégorie $\underline{\mathrm{Gp}}$ dont les objets sont les groupes, et dont les morphismes sont les morphismes de groupes ;

(d) La catégorie $\underline{\mathrm{Ab}}$ dont les objets sont les groupes abéliens, et dont les morphismes sont les morphismes de groupes ;

(e) la catégorie $\underline{\mathrm{Ann}}$ dont les objets sont les anneaux associatifs unitaires et dont les morphismes sont les morphismes d'anneaux ;

(f) pour tout anneau commutatif R, la catégorie $\underline{\mathrm{Mod}}_R$ dont les objets sont les R-modules, et dont les morphismes sont les morphismes de R-modules.

Rappelons qu'un R-module M est un groupe abélien $(M, +)$ muni d'une R-action $R \times M \to M : (r, m) \mapsto rm$; en particulier, pour un corps k, k-module est synonyme de k-espace vectoriel. Tout groupe abélien A est muni d'une $\mathbb{Z}$-action canonique qui fait de A un $\mathbb{Z}$-module.

DÉFINITION 1.3. *Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ de la catégorie $\mathcal{C}$ vers la catégorie $\mathcal{D}$ est la donnée conjointe d'une fonction $F : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ et, pour tout couple $(A, B) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})^2$, d'une application $F : \mathcal{C}(A, B) \to \mathcal{D}(F(A), F(B))$, telles que*

(a) *pour tout objet A de $\mathcal{C}$: $F(1_A) = 1_{F(A)}$;*

(b) *pour tout couple (f, g) de morphismes composables : $F(gf) = F(g)F(f)$.*

DÉFINITION 1.4. *Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est fidèle (plein, pleinement fidèle), si pour tout couple $(A, B) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})^2$, l'application $F : \mathcal{C}(A, B) \to \mathcal{D}(F(A), F(B))$ est injective (surjective, bijective).*

EXEMPLES 1.5. –

(a) *Inclusions de catégories.* La catégorie $\underline{\mathrm{Ab}}$ des groupes abéliens est incluse dans la catégorie $\underline{\mathrm{Gp}}$ des groupes. Le foncteur d'inclusion $I : \underline{\mathrm{Ab}} \to \underline{\mathrm{Gp}}$ est injectif sur les objets et pleinement fidèle sur les morphismes ; on dit aussi que $\underline{\mathrm{Ab}}$ est une *sous-catégorie pleine* de $\underline{\mathrm{Gp}}$. De même, la catégorie des corps est une sous-catégorie pleine de la catégorie des anneaux commutatifs qui elle-même est une sous-catégorie pleine de la catégorie des anneaux. Si l'on désigne par $\underline{\mathrm{Ens}}'$ la catégorie dont les objets sont les ensembles, et dont les morphismes sont les bijections d'ensembles, alors $\underline{\mathrm{Ens}}'$ est une sous-catégorie de $\underline{\mathrm{Ens}}$; le foncteur d'inclusion $I : \underline{\mathrm{Ens}}' \to \underline{\mathrm{Ens}}$ est bijectif sur les objets, et fidèle sur les morphismes, mais il n'est pas plein, donc $\underline{\mathrm{Ens}}'$ n'est pas une sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Ens}}$.

(b) *Foncteurs-oubli.* L'oubli d'une partie de la structure définit un foncteur, souvent noté U. Ainsi, on a des foncteurs-oubli $\underline{\mathrm{Mod}_R} \to \underline{\mathrm{Ab}} \to \underline{\mathrm{Ens}}$, de même que $\underline{\mathrm{Gp}} \to \underline{\mathrm{Ens}}$ et $\underline{\mathrm{Top}} \to \underline{\mathrm{Ens}}$. Les foncteurs-oubli sont fidèles.

(c) *Abélianisation.* Le quotient $G/[G,G]$ d'un groupe G par son sous-groupe des commutateurs $[G,G]$ (le plus petit sous-groupe de G contenant tous les éléments de la forme $xyx^{-1}y^{-1}, (x,y) \in G^2$), est un groupe abélien. La fonction $G \mapsto \alpha(G) = G/[G,G]$ s'étend en un foncteur $\alpha : \underline{\mathrm{Gp}} \to \underline{\mathrm{Ab}}$. Pour le démontrer, on utilise la propriété suivante (*) du passage au quotient $p_G : G \to G/[G,G]$: pour tout morphisme de groupes $f : G \to H$, il existe un et un seul morphisme de groupes $\alpha(f) : \alpha(G) \to \alpha(H)$ tel que $p_H f = \alpha(f) p_G$. Une relation entre différents composés de morphismes est souvent illustrée par un diagramme *commutatif* :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_G"] & H \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p_H"] & K \arrow[d, "p_K"] \\ G/[G,G] \arrow[r, "\alpha(f)"'] & H/[H,H] \arrow[r, "\alpha(g)"'] & K/[K,K]. \end{tikzcd}$$

La *commutativité* du diagramme exprime que toutes les façons d'aller d'un objet du diagramme vers un autre objet du diagramme en composant les morphismes du trajet donnent le même morphisme composé. La propriété (*), appliquée au morphisme composé $gf : G \to K$, entraine que $\alpha(g)\alpha(f) = \alpha(gf)$. De manière similaire, on voit que $\alpha(1_G) = 1_{\alpha(G)}$. Par conséquent, l'abélianisation $\alpha : \underline{\mathrm{Gp}} \to \underline{\mathrm{Ab}}$ est un foncteur.

2. Mono-, épi-, isomorphismes

DÉFINITION 2.1. *Un morphisme $f : X \to Y$ d'une catégorie $\mathcal{C}$ est un* isomorphisme *s'il existe $g : Y \to X$ tel que $gf = 1_X$ et $fg = 1_Y$.*

Le morphisme g est uniquement déterminé par f et est noté f^{-1}.

LEMME 2.2. *Tout foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$* préserve *les isomorphismes, i.e. si f est un isomorphisme de $\mathcal{C}$ alors $F(f)$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}$ et $F(f^{-1}) = F(f)^{-1}$.*

DÉFINITION 2.3. *Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est* conservatif *si un morphisme f de $\mathcal{C}$ est un isomorphisme dès que $F(f)$ est un isomrphisme de $\mathcal{D}$.*

REMARQUE 2.4. Les foncteurs-oublis sont souvent conservatifs, mais pas toujours ! Par exemple, le foncteur-oubli $U : \underline{\mathrm{Mod}_R} \to \underline{\mathrm{Ens}}$ est conservatif, car un morphisme de R-modules est un isomorphisme si et seulement si l'application sous-jacente $U(f)$ est une bijection d'ensembles. Idem pour le foncteur-oubli $U : \underline{\mathrm{Gp}} \to \underline{\mathrm{Ens}}$.

Par contre, le foncteur-oubli $U : \underline{\mathrm{Top}} \to \underline{\mathrm{Ens}}$ n'est pas conservatif ; en effet, il existe des applications continues $X \to Y$ qui ne sont pas des homéomorphismes bien que l'application sous-jacente $U(f)$ soit une bijection, p. ex. $[0,1[\to S^1 : t \mapsto e^{2\pi i t}$.

DÉFINITION 2.5. *Un morphisme $f : X \to Y$ est une section (resp. rétraction) s'il existe $g : Y \to X$ tel que $gf = 1_X$ (resp. $fg = 1_Y$).*

LEMME 2.6. *Tout foncteur préserve les sections (resp. les rétractions).*

DÉFINITION 2.7. *Un morphisme* $f : X \to Y$ *d'une catégorie* $\mathcal{C}$ *est un* monomorphisme *si pour tout couple* $(h_1, h_2) : Z \rightrightarrows X$ *de morphismes de* $\mathcal{C}$ *tels que* $fh_1 = fh_2$*, on a* $h_1 = h_2$*. Un morphisme* $f : X \to Y$ *est un* épimorphisme *si pour tout couple* $(h_1, h_2) : Y \rightrightarrows Z$ *de morphismes de* $\mathcal{C}$ *tels que* $h_1 f = h_2 f$*, on a* $h_1 = h_2$*.*

LEMME 2.8. *Soient* f *et* g *deux morphismes composables.*

(a) *Si* f *et* g *sont des monomorphismes, alors de même* gf *;*
(b) *Si* gf *est un monomorphisme, alors* f *est un monomorphisme ;*
(c) *Si* f *et* g *sont des épimorphismes, alors de même* gf *;*
(d) *Si* gf *est un épimorphisme, alors* g *est un épimorphisme.*

LEMME 2.9. *Toute section (resp. rétraction) est un mono- (resp. épi)morphisme.*

LEMME 2.10. *Un morphisme est un isomorphisme si et seulement si c'est à la fois une section et un épimorphisme (resp. une rétraction et un monomorphisme).*

PREUVE. Tout isomorphisme est à la fois section et rétraction, donc le lemme précedent permet d'établir une direction des équivalences affirmées. Inversement, soit $f : X \to Y$ à la fois une section et un épimorphisme. Alors il existe $g : Y \to X$ tel que $gf = 1_X$; comme $fgf = f1_X = f = 1_Y f$, il s'en suit que $fg = 1_Y$, donc f est un isomorphisme d'inverse g. De manière "duale" (cf. ci-dessous) on montre que si f est à la fois une rétraction un et monomorphisme, alors f est un isomorphisme. □

DÉFINITION 2.11. *Une catégorie est équilibrée si les isomorphismes sont les morphismes qui sont à la fois mono- et épimorphismes.*

EXEMPLES 2.12. –

(a) La catégorie des ensembles est équilibrée ; en effet, les monomorphismes (resp. épimorphismes) sont précisément les applications injectives (resp. surjectives), et les isomorphismes sont précisément les applications bijectives, i.e. à la fois injectives et surjectives. La preuve qu'une application surjective est un épimorphisme se fait par la contraposée et utilise donc le principe du *tiers exclus*. Le fait que $\underline{\mathrm{Ens}}$ est équilibrée est également un corollaire de l'*axiome du choix* : ce dernier exprime précisément que toute application surjective possède des sections, donc que tout épimorphisme d'ensembles est une rétraction ; on peut alors appliquer le lemme 2.10 ;
(b) La catégorie des R-modules est équilibrée. Ceci découle de (a) en utilisant qu'un morphisme f de R-modules est un mono- (resp. épi-) morphisme si et seulement si l'application sous-jacente $U(f)$ est injective (resp. surjective). Nous verrons plus loin pour quoi ceci est vrai ;
(c) La catégorie des anneaux n'est pas équilibrée : l'inclusion $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ est à la fois mono- et épimorphisme dans $\underline{\mathrm{Ann}}$ sans être un isomorphisme ;
(d) La catégorie $\underline{\mathrm{Top}}$ n'est pas équilibrée : les monomorphismes de $\underline{\mathrm{Top}}$ sont les injections continues, les épimorphismes de $\underline{\mathrm{Top}}$ sont les surjections continues, mais il existe des bijections continues qui ne sont pas des homéomorphismes, cf. remarque 2.4 ; la sous-catégorie $\underline{\mathrm{Top}}_{sep}$ des espaces séparés est encore "moins équilibrée" : l'inclusion d'une partie dense est un exemple d'une application continue non bijective qui est à la fois mono- et épimorphisme dans $\underline{\mathrm{Top}}_{sep}$;
(e) Les foncteurs-oubli préservent les monomorphismes, mais ils ne préservent pas en général les épimorphismes.

DÉFINITION 2.13. *Pour toute catégorie* $\mathcal{C}$*, la catégorie opposée* $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ *est définie en posant* $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *et* $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(A, B) = \mathcal{C}(B, A)$ *pour tout* $(B, A) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})^2$*.*

La composition dans $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ est définie en “renversant” le sens de la composition dans $\mathcal{C}$. Tout objet resp. morphisme de $\mathcal{C}$ donne donc lieu à un objet resp. morphisme dans $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ et vice-versa. Les propriétés des objets et morphismes de $\mathcal{C}$ *changent* quand on les considère dans $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. Il s'agit de renverser le sens des “flèches” et l'ordre de composition. La transformation que subissent les notions catégorielles ce faisant s'appelle *dualisation.*

Ainsi, les notions de monomorphisme et épimorphisme sont duales ; les notions de section et rétraction sont duales ; la notion d'isomorphisme est autoduale. Chaque énoncé de la théorie des catégories admet un énoncé dual. Démontrer un énoncé ou l'énoncé dual revient au même. Les lemmes de cette section contiennent tous un énoncé et son dual, et il suffit donc de ne démontrer que l'un d'entre eux.

3. Egalisateurs et coégalisateurs

DÉFINITION 3.1. *Pour tout couple de morphismes $f, g : X \rightrightarrows Y$, un égalisateur de f et de g est un morphisme $\alpha : \mathrm{Eg}(f, g) \to X$ tel que les deux propriétés suivantes soient satisfaites :*

(a) $f\alpha = g\alpha$ *;*

(b) *pour tout $\beta : Z \to X$ tel que $f\beta = g\beta$ il existe un et un seul morphisme $\phi : Z \to \mathrm{Eg}(f, g)$ avec $\alpha\phi = \beta$.*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Eg}(f,g) \arrow[r, "\alpha"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \\ Z \arrow[u, "\exists!\phi"] \arrow[ur, "\beta"'] & & \end{tikzcd}$$

Pour tout couple de morphismes $f, g : X \rightrightarrows Y$, un coégalisateur de f et de g est un morphisme $\alpha : Y \to \mathrm{Coeg}(f, g)$ tel que les deux propriétés suivantes soient satisfaites :

(a) $\alpha f = \alpha g$ *;*

(b) *pour tout $\beta : Y \to Z$ tel que $\beta f = \beta g$ il existe un et un seul morphisme $\phi : Z \to \mathrm{Coeg}(f, g)$ avec $\phi\alpha = \beta$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & \mathrm{Coeg}(f,g) \arrow[d, "\exists!\phi"] \\ & & Z \end{tikzcd}$$

L'objet $\mathrm{Eg}(f, g)$ (resp. $\mathrm{Coeg}(f, g)$) (s'il existe) est à isomorphisme près uniquement déterminé par les propriétés (a) et (b) ci-dessus. Comme la propriété (b) porte sur toute la catégorie et qu'elle exige l'existence d'un morphisme unique, on parle aussi de la *propriété universelle* de l'égalisateur (resp. du coégalisateur). Supposons en effet un autre morphisme $\alpha' : \mathrm{Eg}'(f, g) \to X$ satisfaisant (a) et (b) ci-dessus ; alors il existe $\phi : \mathrm{Eg}'(f, g) \to \mathrm{Eg}(f, g)$ et $\psi : \mathrm{Eg}(f, g) \to \mathrm{Eg}'(f, g)$ tels que $\alpha' = \alpha\phi$ et $\alpha = \alpha'\psi$. Il s'en suit que $\alpha'\psi\phi = \alpha'$ et $\alpha\phi\psi = \alpha$. Comme α et α' sont des monomorphismes (voir ci-dessous), on conclut que $\psi\phi = 1_{\mathrm{Eg}'(f,g)}$ et $\phi\psi = 1_{\mathrm{Eg}(f,g)}$. On observe que l'isomorphisme entre $\mathrm{Eg}(f, g)$ et $\mathrm{Eg}'(f, g)$ est également uniquement déterminé ; en pratique, on se permet d'*identifier* tous les égalisateurs de f et de g à travers ces isomorphismes. En conséquence, on parle de *l'* égalisateur (resp. *du* coégalisateur) de f et de g.

LEMME 3.2. *Le morphisme $\alpha : \mathrm{Eg}(f, g) \to X$ (resp. $\alpha : Y \to \mathrm{Coeg}(f, g)$) est un monomorphisme (resp. épimorphisme).*

Preuve. Soient $h_1, h_2 : Z \to X$ deux morphismes tels que $\alpha h_1 = \alpha h_2 = \beta$. En particulier, $f\beta = g\beta$. D'après la propriété universelle de l'égalisateur, il existe un et un seul morphisme $\phi : Z \to \mathrm{Eg}(f, g)$ tel que $\alpha\phi = \beta$; d'où $h_1 = \phi = h_2$. Il s'en suit que α est un monomorphisme. L'énoncé dual s'obtient de manière duale. □

Définition 3.3. *Un monomorphisme (resp. épimorphisme) est régulier s'il est l'égalisateur* $\mathrm{Eg}(f, g) \to X$ *(resp. le coégalisateur* $Y \to \mathrm{Coeg}(f, g)$*) d'un couple de morphismes* $f, g : X \rightrightarrows Y$.

En littérature on parle également de monomorphisme (resp. épimorphisme) *effectif* au lieu de monomorphisme (resp. épimorphisme) *régulier.*

Lemme 3.4. *Toute section (resp. rétraction) est un mono- (resp. épi)morphisme régulier.*

Preuve. Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ tels que $gf = 1_X$. Alors f est l'égalisateur de $gf, 1_X : X \rightrightarrows X$ et g est le coégalisateur de $fg, 1_Y : Y \rightrightarrows Y$. □

Proposition 3.5. *Soit un carré commutatif*

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "g"] \\ Y \arrow[r, "\beta"'] & Z \end{tikzcd}$$

avec f épimorphisme et g monomorphisme. Si l'un parmi f et g est régulier, alors il existe un et un seul morphisme $\delta : Y \to X$ tel que $\delta f = \alpha$ et $g\delta = \beta$.

Preuve. Supposons que f est régulier, i.e. le coégalisateur de $h_1, h_2 : V \rightrightarrows W$. (Le cas g régulier se traite de manière duale). Alors $\beta f h_1 = \beta f h_2$ implique $g\alpha h_1 = g\alpha h_2$. Par conséquent, $\alpha h_1 = \alpha h_2$, car g est un monomorphisme. La propriété universelle du coégalisateur f implique alors l'existence d'un unique morphisme $\delta : Y \to X$ tel que $\delta f = \alpha$. Comme f est un épimorphisme, $g\delta f = g\alpha = \beta f$ implique $g\delta = \beta$. □

Corollaire 3.6. *Tout morphisme qui est à la fois monomorphisme régulier et épimorphisme est un isomorphisme. En particulier, une catégorie dont tous les monomorphismes sont réguliers est équilibrée.*

De manière duale, tout morphisme qui est à la fois épimorphisme régulier et monomorphisme est un isomorphisme. En particulier, une catégorie dont tous les épimorphismes sont réguliers est équilibrée.

Preuve. La proposition précédente avec $f = g : X \to Y$ et $\alpha = 1_X$ et $\beta = 1_Y$ donne l'existence d'un inverse pour tout morphisme f qui est à la fois monomorphisme régulier et épimorphisme (resp. épimorphisme régulier et monomorphisme). □

Exemples 3.7. –

(a) Dans la catégorie $\underline{\mathrm{Ens}}$ tous les monomorphismes et tous les épimorphismes sont réguliers. Ceci découle du lemme 3.4, étant donné que toute application injective (resp. surjective) est une section (resp. rétraction), cf. exemple 2.12(a). Toutefois, la régularité des applications surjectives ne nécessite pas le recours à l'axiome du choix ; en effet, une application d'ensembles $f : X \to Y$ est surjective si et seulement si elle est le coégalisateur du couple $p_1, p_2 : X \times_Y X \rightrightarrows X$, où p_1, p_2 désignent les deux projections, et $X \times_Y X = \{(x_1, x_2) \in X^2 \mid f(x_1) = f(x_2)\}$.

(b) Nous verrons plus tard que dans $\underline{\mathrm{Mod}}_R$, tous les monomorphismes et tous les épimorphismes sont réguliers.

(c) Dans la catégorie Gp, tous les épimorphismes sont réguliers ; en effet, un épimorphisme de groupes $f : G \to H$ est le coégalisateur du couple $Ker(f) \rightrightarrows G$, où l'un des deux morphismes est l'inclusion du noyau, et l'autre est le morphisme trivial. Les monomorphismes de groupes ne sont pas en général réguliers. L'inclusion d'un sous-groupe normal $i : N \to G$ est toutefois un monomorphisme régulier, étant l'égalisateur du couple $G \rightrightarrows G/i(N)$, où l'un des deux morphismes est le passage au quotient et l'autre est le morphisme trivial.

(d) Dans Top, les épimorphismes réguliers sont les surjections $p : X \to Y$ ayant la propriété que Y porte la topologie-quotient (la topologie la plus fine pour laquelle p est continue). Les monomorphismes réguliers sont les injections $i : X \to Y$ ayant la propriété que X porte la topologie induite (la topologie la moins fine pour laquelle i est continue).

Remarque 3.8. Les foncteurs-oubli préservent les égalisateurs dans le sense suivant : Si $\alpha : \mathrm{Eg}(f,g) \to X$ est l'égalisateur du couple $f,g : X \to Y$, alors $U(\alpha)$ est un égalisateur du couple $U(f), U(g) : U(X) \rightrightarrows U(Y)$, en particulier $U\mathrm{Eg}(f,g)$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Eg}(U(f),U(g))$. Il s'en suit que les foncteurs-oubli préservent également les monomorphismes réguliers

Considérons par exemple le foncteur-oubli U : Gp $\to$ Ens. Soit $f,g : G \rightrightarrows H$ un couple de morphismes de groupes. Le couple $U(f), U(g) : U(G) \rightrightarrows U(H)$ admet alors l'inclusion d'ensembles $\alpha : \{x \in G \mid f(x) = g(x)\} \hookrightarrow G$ comme égalisateur, mais on vérifie aisément que $\{x \in G \mid f(x) = g(x)\}$ est en fait un sous-groupe de G de sorte que α est l'egalisateur de f et de g dans Gp.

Les foncteurs-oubli ne préservent pas en général les coégalisateurs ; par contre, il est assez fréquent que les foncteurs-oubli préservent les épimorphismes réguliers.

4. Produits et coproduits

Définition 4.1. *Soient X et Y deux objets d'une catégorie.*

Un produit de X et de Y est un couple $(p_X : X \times Y \to X,\ p_Y : X \times Y \to Y)$ ayant la propriété universelle que pour tout couple $(q_X : W \to X,\ q_Y : W \to Y)$, il existe un et un seul morphisme $\phi : W \to X \times Y$ tel que $q_X = p_X\phi$ et $q_Y = p_Y\phi$.

$$\begin{tikzcd}
 & X \\
W \arrow[ur, "q_X"] \arrow[r, "\exists!\phi"] \arrow[dr, "q_Y"'] & X \times Y \arrow[u, "p_X"'] \arrow[d, "p_Y"] \\
 & Y
\end{tikzcd}$$

Un coproduit de X et de Y est un couple $(i_X : X \to X \sqcup Y, i_Y : Y \to X \sqcup Y)$ ayant la propriété universelle que pour tout couple $(j_X : X \to W,\ j_Y : Y \to W)$, il existe un et un seul morphisme $\phi : X \sqcup Y \to W$ tel que $j_X = \phi i_X$ et $j_Y = \phi i_Y$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "i_X"'] \arrow[dr, "j_X"] & \\
X \sqcup Y \arrow[r, "\exists!\phi"] & W \\
Y \arrow[u, "i_Y"] \arrow[ur, "j_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

Remarque 4.2. –

(a) Produit (resp. coproduit) est à isomorphisme unique près unique, ce qui nous permet d'identifier tous les produits (resp. coproduits) et de parler *du* produit (resp. *du* coproduit) de deux objets.

Dans Ens, le produit $X \times Y$ est habituellement représenté par l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in X$ et $y \in Y$; le coproduit $X \sqcup Y$ est la réunion "disjointe" de X et de Y.

(b) Pour toute catégorie $\mathcal{C}$, la propriété universelle du produit $(X \times Y, p_X, p_Y)$ s'exprime aussi par la bijection

$$\mathcal{C}(W, X \times Y) \cong \mathcal{C}(W, X) \times \mathcal{C}(W, Y) : \phi \mapsto (p_X \phi, p_Y \phi),$$

et la propriété universelle du coproduit $(X \sqcup Y, i_X, i_Y)$ par la bijection

$$\mathcal{C}(X \sqcup Y, W) \cong \mathcal{C}(X, W) \times \mathcal{C}(Y, W) : \phi \mapsto (\phi i_X, \phi i_Y).$$

(c) L'ensemble des morphismes $\phi : X_1 \sqcup X_2 \to Y_1 \times Y_2$ est en bijection avec l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix}$ avec $\phi_{ij} = p_{Y_i} \phi i_{X_j} : X_j \to Y_i$.

(d) Les foncteurs-oubli préservent les produits, mais pas en général les coproduits. Par exemple, le foncteur-oubli $U : \underline{\mathrm{Mod}}_R \to \underline{\mathrm{Ens}}$ preserve le produit $M \times N$ de deux R-modules, car le produit des ensembles sous-jacents $U(M) \times U(N)$ porte une structure canonique de R-modules, donc $U(M \times N) = U(M) \times U(N)$. Par contre, le coproduit $M \sqcup N$ dans $\underline{\mathrm{Mod}}_R$ est *isomorphe* au produit, l'isomorphisme étant induit par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1_M & 0 \\ 0 & 1_N \end{pmatrix} : M \sqcup N \xrightarrow{\sim} M \times N$$

et il est évident que $U(M \sqcup N) \neq U(M) \sqcup U(N)$. En effet, la réunion disjointe de M et de N ne porte pas de structure de R-module !

5. Carrés cartésiens et cocartésiens

DÉFINITION 5.1. *Un carré commutatif*

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{f_2} & Y \\ {\scriptstyle f_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_1} \\ X & \xrightarrow[g_2]{} & Z \end{array}$$

est cartésien si pour tout couple $(h_1 : V \to X,\ h_2 : V \to Y)$ tel que $g_2 h_1 = g_1 h_2$ il existe un et un seul morphisme $\phi : V \to W$ tel que $h_1 = f_1 \phi$ et $h_2 = f_2 \phi$.

Il est cocartésien si pour couple $(h_1 : X \to V,\ h_2 : Y \to V)$ tel que $h_1 f_1 = h_2 f_2$ il existe un et un seul morphisme $\phi : Z \to V$ tel que $h_1 = \phi g_2$ et $h_2 = \phi g_1$.

PROPOSITION 5.2. *On considère le carré commutatif ci-dessus.*

(a) *Si le carré est cartésien et g_1 est un monomorphisme, une rétraction ou un isomorphisme, alors de même f_1.*

(b) *Si le carré est cocartésien et f_1 est un épimorphisme, une section ou un isomorphisme, alors de même g_1.*

(c) *Soit g_1 l'égalisateur du couple $h_1, h_2 : Z \rightrightarrows B$. Le carré est cartésien si et seulement si f_1 est l'égalisateur du couple $h_1 g_2, h_2 g_2 : X \rightrightarrows B$.*

(d) *Soit f_1 le coégalisateur du couple $e_1, e_2 : A \rightrightarrows W$. Le carré est cocartésien si et seulement si g_1 est le coégalisateur du couple $f_2 e_1, f_2 e_2 : A \rightrightarrows Y$.*

Preuve. Les énoncés (a) et (b) sont duaux ; montrons (a). En vertu du lemme 2.10, l'énoncé sur les isomorphismes est une conséquence des deux autres. Soit alors g_1 une rétraction ; notons $s : Z \to Y$ un morphisme vérifiant $g_1 s = 1_Z$. On peut alors appliquer la propriété universelle du carré au couple $(1_X, sg_2)$, ce qui fournit un morphisme $t : X \to W$ tel que $1_X = f_1 t$, i.e. f_1 est une rétraction. Soit enfin g_1 un monomorphisme et $h_1, h_2 : V \rightrightarrows W$ tels que $f_1 h_1 = f_1 h_2$. Il s'en suit que $g_2 f_1 h_1 = g_2 f_1 h_2$ et donc $g_1 f_2 h_1 = g_1 f_2 h_2$, d'où $f_2 h_1 = f_2 h_1$. La propriété universelle du carré cartésien implique alors que $h_1 = h_2$; par conséquent, f_1 est un monomorphisme.

Les énoncés (c) et (d) sont duaux ; montrons (c). Supposons d'abord que le carré est cartésien et que pour $\alpha : V \to X$ on a $h_1 g_2 \alpha = h_2 g_2 \alpha$. Alors la propriété universelle de l'égalisateur g_1 implique l'existence d'un morphisme $\phi : V \to Y$ tel que $g_1 \phi = g_2 \alpha$. La propriété universelle du carré cartésien implique l'existence d'un morphisme $\phi' : V \to W$ tel que $f_1 \phi' = \alpha$. Or, comme g_1 est un monomorphisme, f_1 également, d'après (a). Le morphisme ϕ' est donc uniquement déterminé par la relation $f_1 \phi' = \phi$ ce qui montre que f_1 est l'égalisateur du couple $h_1 g_2, h_2 g_2$. Supposons inversement que ceci est le cas et montrons que le carré est cartésien. Soient $\alpha_1 : V \to X$ et $\alpha_2 : V \to Y$ tels que $g_2 \alpha_1 = g_1 \alpha_2$. Comme $h_1 g_1 \alpha_2 = h_2 g_1 \alpha_2$ on a $h_1 g_2 \alpha_1 = h_2 g_2 \alpha_1$, d'où l'existence d'un morphisme unique $\phi : V \to W$ tel que $\alpha_1 = f_1 \phi$. De plus $g_1 f_2 \phi = g_2 f_1 \phi = g_2 \alpha_1 = g_1 \alpha_2$, d'où $f_2 \phi = \alpha_2$ car g_1 est un mnomorphisme. Ceci établit la propriété universelle d'un carré cartésien. □

On dit que les monomorphismes (réguliers), rétractions, isomorphismes sont préservés par *changement de base* le long de g_2. Les épimorphismes (réguliers), sections, isomorphismes sont préservés par *changement de cobase* le long de f_2.

Remarque 5.3. Le carré ci-dessus est cartésien si et seulement si le morphisme $W \longrightarrow X \times Y$ induit par f_2 et f_1 est l'egalisateur du couple $g_2 p_X, g_1 p_Y : X \times Y \rightrightarrows Z$. C'est la raison pour laquelle W s'appelle également *produit fibré* de X et de Y au-dessus de Z, et se note souvent $X \times_Z Y$, les morphismes g_2 et g_1 étant sous-entendus. Dans la catégorie <u>Ens</u>, on a $X \times_Z Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid g_2(x) = g_1(y)\}$.

De manière duale, le carré ci-dessus est cocartésien si et seulement si le morphisme $X \sqcup Y \stackrel{(g_2\ g_1)}{\longrightarrow} Z$ est le coégalisateur du couple $i_X f_2, i_Y f_1 : W \rightrightarrows X \sqcup Y$. C'est la raison pour laquelle Z s'appelle également *coproduit cofibré* de X et de Y au-dessous de W, et se note souvent $Z = X \cup_W Y$, les morphismes f_2 et f_1 étant sous-entendus. Dans la catégorie <u>Ens</u>, le coproduit cofibré $X \cup_{X \cap Y} Y$ de deux parties X et Y de Z s'identifie à la réunion de X et de Y. Le carré ci-dessus (avec $W = X \cap Y$ et $Z = X \cup Y$) est alors simultanément cartésien et cocartésien.

Proposition 5.4. *On considère le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & Z \arrow[d, "\gamma"'] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r, "g'"'] & Z' \end{tikzcd}$$

(a) *Si les deux carrés sont cartésiens (resp. cocartésiens), alors de même le rectangle extérieur.*

(b) *Si le rectangle extérieur et le carré droite sont cartésiens, alors de même le carré gauche.*

(c) *Si le rectangle extérieur et le carré gauche sont cocartésiens, alors de même le carré droite.*

Preuve. Laissée en exercice. □

6. Limites et colimites

DÉFINITION 6.1. *Une transformation naturelle* $\phi : F \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} G$ *de foncteurs* $F, G : \mathcal{C} \rightrightarrows \mathcal{D}$ *est la donnée pour tout objet* $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *d'un morphisme* $\phi(C) : F(C) \to G(C)$ *de la catégorie* $\mathcal{D}$ *de sorte que pour tout morphisme* $f : C_1 \to C_2$ *de la catégorie* $\mathcal{C}$*, le carré*

$$\begin{tikzcd} F(C_1) \arrow[r, "\phi(C_1)"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(C_1) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(C_2) \arrow[r, "\phi(C_2)"'] & G(C_2) \end{tikzcd}$$

commute.

Deux transformations naturelles $\phi : F \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} G$ et $\psi : G \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} H$ se composent, donnant lieu à la transformation naturelle $\psi\phi : F \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} H$ définie par $(\psi\phi)(C) = \psi(C)\phi(C)$. Cette composition est associative et admet les transformations $1_F : F \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} F$ définies par $1_F(C) = 1_{F(C)}$ comme unités. Pour un couple de foncteurs $F, G : \mathcal{C} \rightrightarrows \mathcal{D}$ les transformations naturelles $\phi : F \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} G$ ne forment un ensemble que si la catégorie-source $\mathcal{C}$ est *petite*, i.e. si $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ est un ensemble. Dans ce cas, on peut définir la catégorie $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ dont les objets sont les foncteurs $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et dont les ensembles de morphismes $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}(F, G)$ sont les transformations naturelles $F \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} G$.

Pour le reste de cette section, on désignera par I une petite catégorie. Le but est d'introduire des foncteurs $\lim_I : \mathcal{C}^I \to \mathcal{C}$ et $\mathrm{colim}_I : \mathcal{C}^I \to \mathcal{C}$ qui redonnent pour des petites catégories spécifiques I toutes les constructions universelles des sections précédentes. Pour un objet $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ nous désignerons par $\underline{X} : I \to \mathcal{C}$ le foncteur constant, défini par $\underline{X}(i) = X$ pour $i \in \mathrm{Ob}(I)$ et $\underline{X}(\phi) = 1_X$ pour tout $\phi : i \to i'$ dans I. Tout morphisme $f : X \to Y$ de la catégorie $\mathcal{C}$ induit une transformation naturelle de foncteurs constants $\underline{f} : \underline{X} \to \underline{Y}$. Inversement, toute transformation naturelle de foncteurs constants est de la forme $\underline{f}$.

DÉFINITION 6.2. *Pour un foncteur* $\xi : I \to \mathcal{C}$*, un* ξ*-cône (resp.* ξ*-cocône) est une transformation naturelle* $\underline{X} \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} \xi$ *(resp.* $\xi \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} \underline{X}$*). La catégorie* $\mathcal{C}/\xi$ *(resp.* $\xi/\mathcal{C}$*) est la catégorie dont les objets sont les* ξ*-cônes (resp.* ξ*-cocônes) et dont les morphismes sont les triangles commutatifs de transformations naturelles*

$$\begin{tikzcd} \underline{X} \arrow[r] \arrow[d] & \underline{Y} \arrow[dl] \\ \xi & \end{tikzcd} \quad \textit{resp.} \quad \begin{tikzcd} \xi \arrow[d] \arrow[dr] & \\ \underline{X} \arrow[r] & \underline{Y} \end{tikzcd}$$

DÉFINITION 6.3. *Un objet initial (resp. terminal) d'une catégorie* $\mathcal{D}$ *est un objet* $\emptyset_{\mathcal{D}}$ *(resp.* $\star_{\mathcal{D}}$*) tel que pour tout objet* $D \in \mathcal{D}$ *il existe un et un seul morphisme* $\emptyset_{\mathcal{D}} \to D$ *(resp.* $D \to \star_{\mathcal{D}}$*).*

Deux objets initiaux d'une catégorie sont canoniquement isomorphes ; de même, deux objets terminaux d'une catégorie sont canoniquement isomorphes. Nous nous permettrons donc d'identifier tous les objets initiaux (resp. terminaux) d'une catégorie à travers ces isomorphismes. Pour la catégorie $\underline{\mathrm{Ens}}$, l'ensemble vide est l'objet initial et le singleton est l'objet terminal. Pour $\underline{\mathrm{Mod}}_R$, le R-module trivial est simultanément initial et terminal.

DÉFINITION 6.4. *Soit* $\xi : I \to \mathcal{C}$ *un foncteur.*

La limite de ξ *est un objet terminal de la catégorie* $\mathcal{C}/\xi$*, i.e. un* ξ*-cône terminal, qu'on désigne par* $\underline{\lim_I \xi} \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} \xi$ *; les composantes* $\lim_I \xi \to \xi(i), i \in I$*, de la transformation naturelle s'apellent les projections de la limite.*

La colimite de ξ est un objet initial de la catégorie $\xi/\mathcal{C}$, i.e. un ξ-cocône initial, qu'on désigne par $\xi \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} \underline{\mathrm{colim}_I \xi}$; les composantes $\xi(i) \to \mathrm{colim}_I \xi$, $i \in I$, de la transformation naturelle s'appellent les injections de la colimite.

Exemples 6.5. –

(a) Pour la catégorie $I = (\bullet \rightrightarrows \bullet)$, un foncteur $I \to \mathcal{C}$ est donné par un couple $f, g : X \rightrightarrows Y$ de morphismes de $\mathcal{C}$, la limite $\lim_I \xi \to X$ s'identifie à l'égalisateur $\mathrm{Eg}(f,g) \to X$; la colimite $Y \to \mathrm{colim}_I \xi$ s'identifie au coégalisateur $Y \to \mathrm{Coeg}(f,g)$.

(b) Pour la catégorie I ne contenant que deux objets et leur identités, un foncteur $I \to \mathcal{C}$ est donné par un couple X, Y d'objets de $\mathcal{C}$. La limite $\lim_I \xi$ est le produit $X \times Y$, la colimite $\mathrm{colim}_I \xi$ est le coproduit $X \sqcup Y$; les projections de la limite sont les projections p_X, p_Y du produit, les injections de la colimite sont les injections i_X, i_Y du coproduit.

(c) Pour la catégorie $I = (\bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet)$, un foncteur $\xi : I \to \mathcal{C}$ est donné par un diagramme $X \longrightarrow Z \longleftarrow Y$ dans $\mathcal{C}$. La limite $\lim_I \xi$ est alors le produit fibré $X \times_Z Y$; en complétant le diagramme par les projections de la limite, on obtient un carré cartésien.

(d) Pour la catégorie $I = (\bullet \longleftarrow \bullet \longrightarrow \bullet)$, un foncteur $\xi : I \to \mathcal{C}$ est donné par un diagramme $X \longleftarrow W \longrightarrow Y$ dans $\mathcal{C}$. La colimite $\mathrm{colim}_I \xi$ est alors le coproduit cofibré $X \cup_W Y$; en complétant le diagramme par les injections de la colimite, on obtient un carré cocartésien.

Il y a donc multitude de (co)limites différentes. Cependant, les exemples ci-dessus recouvrent les cas les plus importants. On dit qu'une (co)limite est *finie* si la catégorie I n'a qu'un nombre fini d'objets et de morphismes. Il est clair que l'exemple (b) ci-dessus se généralise à une petite catégorie I quelconque n'ayant que d'objets et leurs identités, donnant lieu aux produits généraux $\prod_{i \in I} X_i$ et coproduits généraux $\coprod_{i \in I} X_i$.

Proposition 6.6. *Une catégorie possède toutes les (co)limites finies si et seulement si elle possède des (co)égalisateurs et des (co)produits finis.*

Définition 6.7. *Une catégorie est (co)complète si pour toute petite catégorie I et tout foncteur $\xi : I \to \mathcal{C}$, la limite $\lim_I \xi$ (resp. colimite $\mathrm{colim}_I \xi$) existe.*

Proposition 6.8. *Une catégorie est (co)complète si et seulement si elle a des (co)égalisateurs et des (co)produits généraux.*

Lemme 6.9. *Pour une catégorie (co)complète, la (co)limite s'étend en foncteur $\lim_I : \mathcal{C}^I \to \mathcal{C}$ (resp. $\mathrm{colim}_I : \mathcal{C}^I \to \mathcal{C}$) pour toute petite catégorie I.*

Preuve. Soient $\xi_1 : I \to \mathcal{C}$ et $\xi_2 : I \to \mathcal{C}$ et $\xi_3 : I \to \mathcal{C}$ trois foncteurs, et $\phi : \xi_1 \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} \xi_2$ et $\psi : \xi_2 \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} \xi_3$ deux transformations naturelles. On obtient alors le diagramme commutatif suivant de transformations naturelles :

$$\begin{tikzcd}
\underline{\lim_I \xi_1} \arrow[r] \arrow[d, "\underline{\lim_I \phi}"'] & \xi_1 \arrow[d, "\phi"] \\
\underline{\lim_I \xi_2} \arrow[r] \arrow[d, "\underline{\lim_I \psi}"'] & \xi_2 \arrow[d, "\psi"] \\
\underline{\lim_I \xi_3} \arrow[r] & \xi_3
\end{tikzcd}$$

Les morphismes verticaux gauches découlent de la propiété universelle des cônes terminaux. De même, il existe un unique morphisme $\underline{\lim_I \psi\phi} : \underline{\lim_I \xi_1} \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} \underline{\lim_I \xi_3}$ rendant commutatif le rectangle extérieur. Il s'en suit que $\underline{\lim_I \psi\phi} = \underline{\lim_I \psi} \underline{\lim_I \phi}$, et $\lim_I$ s'étend donc en foncteur $\mathcal{C}^I \to \mathcal{C}$. Raisonnement dual pour colim_I. $\square$

REMARQUE 6.10. Les catégories $\underline{\text{Ens}}$, $\underline{\text{Gp}}$, $\underline{\text{Ann}}$, $\underline{\text{Mod}_R}$ et $\underline{\text{Top}}$ sont complètes et cocomplètes.

REMARQUE 6.11. Tout morphisme de but une limite $f : X \to \lim_I \xi$ est entièrement déterminé par ses "projections" $(p_k f)_{k \in \mathrm{Ob}(I)}$; de même, tout morphisme de source une colimite $f : \mathrm{colim}_I \xi \to X$ est entièrement déterminé par ses "restrictions" $(f i_k)_{k \in \mathrm{Ob}(I)}$. On dit également que la famille des projections $p_k : \lim_I \xi \to \xi(k),$, $k \in \mathrm{Ob}(I)$, est une *famille monomorphe* tandis que la famille des injections $i_k : \xi(k) \to \mathrm{colim}_I \xi$, $k \in \mathrm{Ob}(I)$, est une *famille épimorphe.*

DÉFINITION 6.12. *Soit $\xi : I \to \mathcal{C}$ un foncteur admettant une (co)limite dans $\mathcal{C}$. Le foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ préserve la limite $\lim_I \xi \to \xi$ si $F\lim_I \xi \to F\xi$ est un $F\xi$-cône terminal; Le foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ préserve la colimite $\xi \to \mathrm{colim}_I \xi$ si $F\xi \to F\mathrm{colim}_I \xi$ est un $F\xi$-cocône initial.*

Il en résulte en particulier des isomorhismes $F\lim_I \xi \cong \lim_I F\xi$ et $\mathrm{colim}_I F\xi \cong F\mathrm{colim}_I \xi$ compatibles avec les (co)cones respectifs.

7. Foncteurs adjoints

DÉFINITION 7.1. *Une paire de foncteurs $F : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : G$ est une adjonction si l'on dispose pour tout couple $(C, D) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ d'une bijection*

$$\phi(C, D) : \mathcal{D}(FC, D) \cong \mathcal{C}(C, GD)$$

qui est naturelle en C et en D.

Le foncteur F s'appelle alors l'*adjoint à gauche* de G, et le foncteur G s'appelle l'*adjoint à droite* de F. Ces deux notions sont *duales* (en passant simultanément à $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ et à $\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$) et possèdent donc des propriétés duales. L'adjoint à droite G d'un foncteur F est unique à isomorphisme de foncteurs unique près, et vice-versa.

La binaturalité de $\phi(-,-)$ exprime la commutativité des deux carrés suivants :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}(FC', D) \arrow[r, "\phi(C',D)"] \arrow[d, "(Ff)^*"'] & \mathcal{C}(C', GD) \arrow[d, "f^*"] \\ \mathcal{D}(FC, D) \arrow[r, "\phi(C,D)"'] & \mathcal{C}(C, GD) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{D}(FC, D) \arrow[r, "\phi(C,D)"] \arrow[d, "g_*"'] & \mathcal{C}(C, GD) \arrow[d, "(Gg)_*"] \\ \mathcal{D}(FC, D') \arrow[r, "\phi(C,D')"'] & \mathcal{C}(C, GD') \end{tikzcd}$$

où $f : C \to C'$ et $g : D \to D'$ sont des morphismes de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}$ respectivement, et où ϕ^* désigne la précomposition avec ϕ, et ϕ_* la postcomposition avec ϕ.

Nous noterons toutes les adjonctions de foncteurs $F : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : G$ en mettant la flèche de l'adjoint à gauche en bas, et la flèche de l'adjoint à droite en haut. On aurait pu noter la même adjonction par $G : \mathcal{D} \rightleftarrows \mathcal{C} : F$. En littérature, on note souvent $F \vdash G$ pour dire que F est l'adjoint à gauche de G. Par contre, différentes conventions coexistent pour la notation des flèches.

Pour toute adjonction $F : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : G$, et tout $(C, D) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$, on pose $\eta_C = \phi(C, FC)(1_{FC}) : C \to GFC$ et $\epsilon_D = \phi(GD, D)^{-1}(1_{GD}) : FGD \to D$. Les deux familles $(\eta_C)_{C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$ et $(\epsilon_D)_{D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})}$ forment les composantes de transormations naturelles $\eta : Id_{\mathcal{C}} \overset{\cdot}{\longrightarrow} GF$ et $\epsilon : FG \overset{\cdot}{\longrightarrow} Id_{\mathcal{D}}$, qui sont appelées l'*unité* et la *co-unité* de l'adjonction. La bijection $\phi(-,-)$ est entièrement déterminée par la donnée du foncteur G et de l'unité η, ou, de manière duale, par la donnée du foncteur F et de la co-unité ϵ.

PROPOSITION 7.2. *Soit $F : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : G$ une adjonction de foncteurs.*

(a) *La composante $\eta_C : C \to GFC$ de l'unité de l'adjonction possède la propriété universelle que tout morphisme $f : C \to GD$ s'écrit d'une et d'une seule manière comme morphisme composé*

$$C \xrightarrow{\eta_C} GFC \xrightarrow{Gg} GD$$

pour un morphisme $g : FC \to D$.

(b) *La composante $\epsilon_D : GFD \to D$ de la co-unité de l'adjonction possède la propriété universelle que tout morphisme $g : FC \to D$ s'écrit d'une et d'une seule manière comme morphisme composé*

$$FC \xrightarrow{Ff} FGD \xrightarrow{\epsilon_D} D$$

pour un morphisme $f : C \to GD$.

(c) *La bijection $\phi(C,D)$ applique $g : FC \to D$ sur $(Gg)\eta_C : C \to GD$; la bijection inverse $\phi(C,D)^{-1}$ applique $f : C \to GD$ sur $\epsilon_D(Ff) : FC \to D$. En particulier, unité et co-unité de l'adjonction vérifient les identités :*

$$1_F = \epsilon F \circ F\eta \text{ et } 1_G = G\epsilon \circ \eta G.$$

(d) *Le foncteur F applique $f : C \to C'$ sur $\phi(C,FC')^{-1}(\eta_{C'}f) : FC \to FC'$; le foncteur G applique $g : D \to D'$ sur $\phi(GD,D')(g\epsilon_D) : GD \to GD'$.*

Preuve. (a) et (b) traduisent la binaturalité de la bijection $\phi(-,-)$. Dans (a) et (b), les morphismes f et g se correspondent sous la bijection $\phi(C,D)$. On en déduit la première moitié de (c). Par définition, $\phi(GD,D)(\epsilon_D) = 1_{GD}$, d'où $(G\epsilon_D)(\eta_{GD}) = 1_{GD}$ pour tout $D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$. De même, $\phi(C,FC)^{-1}(\eta_C) = 1_{FC}$, d'où $(\epsilon_{FC})(F\eta_C) = 1_{FC}$ pour tout $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, ce qui montre la deuxième moitié de (c). Enfin pour (d), on a $\phi(C,FC')(Ff) = (GFf)\eta_C = \eta_{C'}f$ par naturalité de η ; et, $\phi(GD,D')^{-1}(Gg) = \epsilon_{D'}(FGg) = g\epsilon_D$ par naturalité de ϵ. □

Remarque 7.3. Les propriétés (a), (b) et (c) ci-dessus sont *caractéristiques* pour l'adjonction. En effet, (a) caractérise l'existence d'un adjoint à gauche pour $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Il est remarquable, que l'existence de l'adjoint à gauche F se résume par l'existence, pour tout $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, d'un morphisme $\eta_C : C \to GFC$ vérifiant (a). On se donne donc uniquement un *objet* $FC \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ pour tout $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$; c'est la propiété universelle de η qui permet d'étendre F en foncteur, et d'établir l'adjonction entre F et G. Dualement, l'existence d'un adjoint à droite G pour $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ se résume par l'existence, pour tout $D \in \mathcal{D}$, d'un morphisme $\epsilon_D : FGD \to D$ vérifiant (b). Enfin, la donnée d'un quadruplet

$$(F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}, G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}, \eta : Id_{\mathcal{C}} \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} GF, \epsilon : FG \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} Id_{\mathcal{D}})$$

vérifiant les deux identités de (c) entraine l'existence d'une adjonction entre F et G, la bijection ϕ et son inverse étant définies par les formules de (c).

Proposition 7.4. *Soit $F : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : G$ une adjonction.*

(a) *L'adjoint à gauche F est fidèle (plein, pleinement fidèle) si et seulement si les composantes $\eta_C : C \to GFC$ de l'unité de l'adjonction sont des monomorphismes (rétractions, isomorphismes).*

(b) *L'adjoint à droite G est fidèle (plein, pleinement fidèle) si et seulement si les composantes $\epsilon_D : FGD \to D$ de la co-unité de l'adjonction sont des épimorphismes (sections, isomorphismes).*

Preuve. D'après 7.2(d), l'application $F : \mathcal{C}(C,C') \to \mathcal{D}(FC,FC')$ est injective/surjective/bijective si et seulement si la postcomposition avec $\eta_{C'}$ l'est, ce qui est le cas si et seulement si $\eta_{C'}$ est monomorphisme/rétraction/isomorphisme. Ceci établit (a). La preuve de (b) est duale. □

Définition 7.5. *Une adjonction $F : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : G$ est une équivalence de catégories si les composantes de l'unité et de la co-unité de l'adjonction sont des isomorphismes.*

Lemme 7.6. *Les conditions suivantes sur l'adjonction $F : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : G$ sont équivalentes :*

(a) *L'adjonction est une équivalence de catégories ;*
(b) *F et G sont pleinement fidèles ;*
(c) *F est pleinement fidèle et G est conservatif ;*
(d) *F est conservatif et G est pleinement fidèle.*

Preuve. D'après 7.4, les conditions (a) et (b) sont équivalentes. Tout foncteur pleinement fidèle est conservatif, donc (b) implique (c) et (d). Inversement, sous l'hypothèse (c), les composantes $\eta_C : C \to GFC$ de l'unité sont des isomorphismes, donc en particulier les morphismes $\eta_{GD} : GD \to GFGD$. D'après 7.2(c), il s'en suit que les morphismes $G\epsilon_D : GFGD \to GD$ sont également des isomorphismes ; par conséquent, comme G est conservatif, les composantes $\epsilon_D : FGD \to D$ de la co-unité sont des isomorphismes et (c) implique (a). De manière duale, on montre que (d) implique (a). $\square$

Proposition 7.7. *Pour toute adjonction $F : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : G$, l'adjoint à gauche F préserve les colimites, et l'adjoint à droite G préserve les limites.*

Preuve. Il suffit de montrer que pour tout foncteur $\xi : I \to \mathcal{C}$, F applique ξ-cocone initial $\phi : \xi \overset{\cdot}{\longrightarrow} \underline{C}$ sur $F\xi$-cocône initial $F\phi : F\xi \overset{\cdot}{\longrightarrow} \underline{FC}$. Or tout $F\xi$-cocône $f : F\xi \overset{\cdot}{\longrightarrow} \underline{D}$ correspond par adjonction à un ξ-cocône $g : \xi \overset{\cdot}{\longrightarrow} \underline{GD}$; la propriété universelle du ξ-cocône initial fournit alors un morphisme unique $C \to GD$ tel que la composition $\xi \overset{\cdot}{\longrightarrow} \underline{C} \overset{\cdot}{\longrightarrow} \underline{GD}$ donne g. Par adjonction, ceci établit l'existence d'un unique morphisme $\rho : FC \to D$ tel que $f = \underline{\rho}(F\phi)$. Ceci exprime que $F\phi$ est initial. La préservation des limites par G se montre de manière duale. $\square$

Corollaire 7.8. *Tout adjoint à gauche préserve les épimorphismes, les coégalisateurs, les coproduits et les carrés cocartésiens ; tout adjoint à droite préserve les monomorphismes, les égalisateurs, les produits et les carrés cartésiens.*

Preuve. Ceci découle de la proposition précédente étant donné qu'un morphisme $f : X \to Y$ est un épi (resp. mono)morphisme si et seulement si Y s'identifie au coproduit cofibré $Y \cup_X Y$ (resp. X s'identifie au produit fibré $X \times_Y X$). $\square$

Exemples 7.9. (a) Les foncteurs-oubli $\underline{\mathrm{Gp}} \to \underline{\mathrm{Ens}}$, $\underline{\mathrm{Ab}} \to \underline{\mathrm{Ens}}, \underline{\mathrm{Mod}_R} \to \underline{\mathrm{Ens}}, \underline{\mathrm{Ann}} \to \underline{\mathrm{Ens}}$ ont tous des adjoints à gauche qu'on appelle les foncteurs libres, car ils associent à un ensemble X, le groupe, resp. le groupe abélien, resp. le R-module, resp. l'anneau librement engendré par X. La proposition 7.2(a) avec $\mathcal{C} = \underline{\mathrm{Ens}}$, G le foncteur-oubli, et F le foncteur libre, exprime précisément la propriété universelle d'un objet libre. C'est la raison pour laquelle les foncteurs-oubli sont compatibles avec toutes les constructions-limite tandis que les foncteurs libres sont compatibles avec toutes les constructions-colimite.

(b) L'inclusion $I : \underline{\mathrm{Ab}} \hookrightarrow \underline{\mathrm{Gp}}$ admet une adjoint à gauche $\alpha : \underline{\mathrm{Gp}} \to \underline{\mathrm{Ab}}$, le foncteur d'*abélianisation* étudiée dans l'exemple 1.5(c). La propriété universelle de α est précisément 7.2(a) avec $\mathcal{C} = \underline{\mathrm{Gp}}$, $\mathcal{D} = \underline{\mathrm{Ab}}$, $F = \alpha, G = I$. On dit aussi que $\underline{\mathrm{Ab}}$ est une sous-catégorie *reflexive* de $\underline{\mathrm{Gp}}$. Comme l'inclusion $I : \underline{\mathrm{Ab}} \to \underline{\mathrm{Gp}}$ est un adjoint à droite, les limites dans $\underline{\mathrm{Ab}}$ s'identifient aux limites dans $\underline{\mathrm{Gp}}$; par contre, les colimites dans $\underline{\mathrm{Ab}}$ sont différentes des colimites dans $\underline{\mathrm{Gp}}$: le coproduit $\mathbb{Z} \sqcup \mathbb{Z}$ dans $\underline{\mathrm{Ab}}$ s'identifie à $\mathbb{Z}^2$, tandisque le coproduit $\mathbb{Z} \sqcup \mathbb{Z}$ dans $\underline{\mathrm{Gp}}$ s'identifie au groupe (non-commutatif) libre à deux générateurs.

(c) Le foncteur-oubli $U : \underline{\mathrm{Top}} \to \underline{\mathrm{Ens}}$ admet un adjoint à gauche $\underline{\mathrm{Ens}} \to \underline{\mathrm{Top}} : X \to X_\delta$ et un adjoint à droite $\underline{\mathrm{Ens}} \to \underline{\mathrm{Top}} : X \to X^\delta$, où X_δ est X muni de la topologie discrète (toutes les parties de X sont ouvertes), et X^δ est X muni de la topologie indiscrète (seulement $\emptyset$ et X sont ouverts).

(d) Une catégorie $\mathcal{C}$ est complète (resp. cocomplète) si et seulement si pour toute petite catégorie I, le foncteur $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^I : X \mapsto \underline{X}$ admet un adjoint à droite (resp. à gauche). En effet, les propriétés universelles 7.2(b) (resp. 7.2(a)) expriment précisément que cet adjoint à droite (resp. à gauche) s'identifie à $\lim_I : \mathcal{C}^I \to \mathcal{C}$ (resp. $\operatorname{colim}_I : \mathcal{C}^I \to \mathcal{C}$).

CHAPITRE 2

Catégories abéliennes

1. Catégories linéaires, additives et abéliennes

Définition 1.1. *Une catégorie $\mathcal{C}$ est linéaire si pour tout couple $(X,Y) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})^2$ l'ensemble de morphismes $\mathcal{C}(X,Y)$ est muni d'une structure de groupe abélien de sorte que la composition $\mathcal{C}(X,Y) \times \mathcal{C}(Y,Z) \to \mathcal{C}(X,Z)$ soit bilinéaire.*

Une catégorie linéaire $\mathcal{C}$ est dite d'avoir des sommes directes si pour tout couple $(X,Y) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})^2$ il existe un quadruplet

$$(i_X : X \to X \oplus Y,\, i_Y : Y \to X \oplus Y,\, p_X : X \oplus Y \to X,\, p_Y : X \oplus Y \to Y)$$

tel que les relations suivantes soient satisfaites :

$$p_X i_X = 1_X,\, p_Y i_Y = 1_Y,\, p_Y i_X = 0,\, p_X i_Y = 0,\, i_X p_X + i_Y p_Y = 1_{X\oplus Y}.$$

Proposition 1.2. *Dans une catégorie linéaire, une somme directe $X \oplus Y$ est simultanément coproduit $(X \oplus Y, i_X, i_Y)$ et produit $(X \oplus Y, p_X, p_Y)$. En particulier, dans une catégorie linéaire avec sommes directes, coproduits finis et produits finis existent et sont canoniquement isomorphes.*

Définition 1.3. *Un objet d'une catégorie est appelé objet nul s'il est à la fois initial et terminal. Un morphisme d'une catégorie est appelé morphisme nul s'il se factorise par un objet nul. Une catégorie additive est une catégorie linéaire avec objet nul et sommes directes.*

Lemme 1.4. *Dans une catégorie additive $\mathcal{C}$, le morphisme nul $X \to Y$ est l'élément neutre du groupe abélien $\mathcal{C}(X,Y)$.*

Preuve. Soit N un objet nul de $\mathcal{C}$; alors $\mathcal{C}(N,N)$ contient exactement un élément, i.e. 1_N est l'élément neutre du groupe trivial $\mathcal{C}(N,N)$. Le morphisme nul $X \to Y$ se factorise $X \to N \to N \to Y$ et s'identifie donc par bilinéarité de la composition à l'élément neutre du groupe $\mathcal{C}(X,Y)$. □

Pour alléger la notation dans une catégorie additive, on désignera par 0 à la fois l'*objet* nul et les *morphismes* nuls. Le contexte devrait empêcher toute confusion.

Définition 1.5. *Dans une catégorie additive, le noyau $\mathrm{Ker}(f) \to X$ (resp. conoyau $Y \to \mathrm{Coker}(f)$) d'un morphisme $f : X \to Y$ est l'égalisateur (resp. le coégalisateur) du couple $f, 0 : X \rightrightarrows Y$.*

Le noyau de $f : X \to Y$ a donc la propriété universelle suivante : pour tout morphisme $\alpha : Z \to X$ tel que $f\alpha = 0$ il existe un et un seul morphisme $\phi : Z \to \mathrm{Ker}(f)$ tel que le morphisme composé $Z \to \mathrm{Ker}(f) \to X$ est α. La propriété universelle du conoyau est duale. De manière équivalente, les propriétés universelles de noyau et conoyau s'expriment en disant que le carré gauche ci-dessous est cartésien et le carré droite ci-dessous est cocartésien :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}(f) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Coker}(f) \end{tikzcd}$$

Par définition, tout (co)noyau est un (co)égalisateur ; la réciproque est vraie : tout (co)égalisateur d'une catégorie additive est un (co)noyau. En effet, pour le couple $f, g : X \rightrightarrows Y$, on a $\mathrm{Eg}(f, g) = \mathrm{Ker}(f - g)$ et $\mathrm{Coeg}(f, g) = \mathrm{Coker}(f - g)$.

Lemme 1.6. *Pour un morphisme $f : X \to Y$ d'une catégorie additive les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *f est un monomorphisme (épimorphisme) ;*

(b) $\forall \alpha : Z \to X : f\alpha = 0 \implies \alpha = 0$ *(*$\forall \alpha : Y \to Z : \alpha f = 0 \implies \alpha = 0$*) ;*

(c) $\mathrm{Ker}(f) = 0$ *(*$\mathrm{Coker}(f) = 0$*).*

Lemme 1.7. *Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux morphismes d'une catégorie additive. Si g est un monomorphisme, alors* $\mathrm{Ker}(f) \cong \mathrm{Ker}(gf)$*. Dualement, si f est un épimorphisme, alors* $\mathrm{Coker}(gf) \cong \mathrm{Coker}(g)$.

Proposition 1.8. *Un monomorhisme régulier d'une catégorie additive s'identifie au noyau de son conoyau. Dualement, un épimorphisme régulier d'une catégorie additive s'identifie au conoyau de son noyau.*

Preuve. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "g"'] & \mathrm{Coker}(f) \arrow[d, "\exists!\,\phi"] \\
Z \arrow[u, "\exists!\psi"] \arrow[ur, "\alpha"'] & & W
\end{tikzcd}$$

dans le quel on suppose que f est le noyau de g et β le conoyau de f, d'où l'existence d'un morphisme unique ϕ tel que $\phi\beta = g$. Nous voulons montrer que f possède la propriété universelle du noyau de β. Soit α un morphisme quelconque tel que $\beta\alpha = 0$. Il s'en suit que $g\alpha = \phi\beta\alpha = 0$, d'où par la propriété universelle du noyau de g l'existence d'un morphisme unique $\psi : Z \to X$ tel que $f\psi = \alpha$. □

Proposition 1.9. *Soit un carré commutatif*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "g"] \\
C \arrow[r, "\beta"'] & D
\end{tikzcd}$$

d'une catégorie additive.

(a) *Si le carré est cartésien alors le morphisme canonique* $\mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Ker}(g)$ *est un isomorphisme ;*

(b) *Si le carré est cocartésien, alors le morphisme canonique* $\mathrm{Coker}(f) \to \mathrm{Coker}(g)$ *est un isomorphisme ;*

(c) *Le carré est cartésien si et seulement si* $\begin{pmatrix} \alpha \\ f \end{pmatrix} : A \to B \oplus C$ *est le noyau de* $(g \ \ -\beta) : B \oplus C \to D$ *;*

(d) *Le carré est cocartésien si et seulement si* $(g \ \ \beta) : B \oplus C \to D$ *est le conoyau de* $\begin{pmatrix} -\alpha \\ f \end{pmatrix} : A \to B \oplus C$.

Preuve. On déduit de I.5.4(b) que pour un carré cartésien $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}(g)$ ont la même propriété universelle, et sont donc isomorphes. De manière duale, on déduit de I.5.4(c) que pour un carré cocartésien $\mathrm{Coker}(f)$ et $\mathrm{Coker}(g)$ ont la même propriété universelle, et sont donc isomorphes. Les assertions (c) et (d) reformulent la remarque I.5.3. □

Définition 1.10. *Une catégorie abélienne est une catégorie additive ayant des noyaux et conoyaux et vérifiant que tous les mono- et épimorphismes sont réguliers.*

Lemme 1.11. *Une catégorie abélienne est équilibrée et possède toutes les limites finies et toutes les colimites finies.*

Preuve. Cela résulte de II.1.2 à l'aide de I.3.6 et I.6.6. □

Proposition 1.12. *Soit un carré commutatif*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "\beta"'] & D \end{tikzcd}$$

d'une catégorie abélienne.

(a) *Si le carré est cartésien et g est un épimorphisme, alors le carré est également cocartésien et f est un épimorphisme ;*

(b) *Si le carré est cocartésien et f est un monomorphisme, alors le carré est également cartésien et g est un monomorphisme.*

Preuve. Les assertions (a) et (b) sont duales. Sous l'hypothèse de (a), proposition II.1.9(c) montre que le morphisme $(g\ -\beta)$ est un épimorphisme, et donc, d'après proposition II.1.8, le conoyau de son noyau. Selon II.1.9(d), cela montre que le carré est cocartésien ; en utilisant II.1.9(b), on en tire que f est un épimorphisme. □

Proposition 1.13. *Tout morphisme $f : X \to Y$ d'une catégorie abélienne se factorise de manière essentiellement unique en un épimorphisme suivi d'un monomorphisme. L'épimorphisme est le conoyau du noyau de f ; le monomorphisme est le noyau du conoyau de f.*

Preuve. Nous avons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}(f) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta'"'] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\beta"'] & Y \\ \mathrm{Ker}(\phi) \arrow[r, "\alpha'"'] & \mathrm{Coker}(\alpha) \arrow[ur, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

dans lequel β est un épimorphisme par construction ; il s'agit de montrer que ϕ est un monomorphisme. Le carré gauche est cartésien par I.5.2(c). Il s'en suit que β' est un épimorphisme par II.1.12(a). Comme α' est un monomorphisme et comme $\beta\alpha = 0 = \alpha'\beta'$, on tire de II.1.6 que $\mathrm{Ker}(\phi) = 0$, et donc ϕ est un monomorphisme.

Que ϕ est le noyau du conoyau de f est une conséquence de II.1.7 et II.1.8. □

Remarque 1.14. Les deux dernières propositions sont fondamentales pour toute la théorie des catégories abéliennes. Proposition II.1.13 établit l'existence d'une *factorisation par l'image*. Proposition II.1.12 exprime que cette factorisation est préservée par changement de base et par changement de cobase.

Le conoyau du noyau de $f : X \to Y$ s'appelle *co-image de* f et se note $X \to \mathrm{Coim}(f)$. Le noyau du conoyau de f s'appelle *image de* f et se note $\mathrm{Im}(f) \to Y$. La proposition II.1.13 se résume alors à l'aide du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}(f) \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[r] & \mathrm{Coker}(f) \\ & \mathrm{Coim}(f) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Im}(f) \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

Par la suite, on identifiera image et coimage et on notera $Im(f) \cong X/\mathrm{Ker}(f)$.

Exemples 1.15. L'exemple fondamental d'une catégorie abélienne est $\underline{\mathrm{Mod}}_R$, la catégorie des R-modules pour un anneau associatif et unitaire R. La structure linéaire est évidente : pour $f, g : X \rightrightarrows Y$, on pose $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$, $x \in X$. L'objet nul est le R-module trivial ; la somme directe $X \oplus Y$ a sa déscription habituelle. Le noyau est donné par $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$; l'image est donnée par $\mathrm{Im}(f) = \{y \in Y \mid \exists x \in X : y = f(x)\}$; le conoyau de f est donné par le quotient $Y/\mathrm{Im}(f)$. La régularité des mono- et épimorphismes est alors immédiate.

Pour toute catégorie abélienne $\mathcal{C}$ et petite catégorie I, la catégorie des foncteurs $\mathcal{C}^I$ est à nouveau une catégorie abélienne.

2. Suites exactes dans une catégorie abélienne

Dans toute cette section on se place dans une catégorie abélienne.

Définition 2.1. *Une suite*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

est exacte en Y *si* $gf = 0$ *et si le morphisme canonique* $\mathrm{Im}(f) \to \mathrm{Ker}(g)$ *est un isomorphisme.*

Exemples 2.2. –

(a) La suite $0 \to A \xrightarrow{f} B$ est exacte en A si et seulement si f est un monomorphisme ;

(b) La suite $B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ est exacte en C si et seulement si g est un épimorphisme ;

(c) La suite $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ est exacte en A et B si et seulement si f est le noyau de g ;

(d) La suite $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ est exacte en B et C si et seulement si g est le conoyau de f ;

(e) La suite $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow 0$ est exacte en X et Y si et seulement si f est un isomorphisme.

En effet, (a) et (b) reflètent II.1.6, (c) et (d) reflètent II.1.8, et (e) reflète II.1.11.

Lemme 2.3. *Les conditions suivantes sur la suite*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

sont équivalentes :

(a) *La suite est exacte en* A, B, C *;*

(b) f *est le noyau de* g*, et* g *est le conoyau de* f *;*

(c) f *est le noyau de* g*, et* g *est un épimorphisme ;*

(d) g *est le conoyau de* f *et* f *est un monomorphisme.*

Le cas échéant, on dira que la suite est une *suite exacte courte*. Il est clair que les conditions (a) et (b) sont équivalentes, et que (b) entraine (c) et (d). Inversement, il découle de II.1.8 que (c) entraine (b), et que (d) entraine (b).

Proposition 2.4. *Pour toute suite de morphismes* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$*, on a une suite exacte longue*

$$0 \to \mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Ker}(gf) \to \mathrm{Ker}(g) \to \mathrm{Coker}(f) \to \mathrm{Coker}(gf) \to \mathrm{Coker}(g) \to 0.$$

Preuve. La suite longue s'inscrit dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Ker}(gf) \arrow[r, "\bar f"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "1"] & \mathrm{Ker}(g) \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta\alpha"] & \\
\mathrm{Ker}(f) \arrow[ur] \arrow[r] & X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "2"] & \mathrm{Coker}(f) \arrow[d, "\bar g"] \\
& & Z \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Coker}(gf) \arrow[dl] \\
& & \mathrm{Coker}(g) &
\end{tikzcd}$$

Le carré 1 est cartésien par I.5.2(c), le carré 2 est cocartésien par I.5.2(d). Proposition II.1.9(a-b) entraine alors que $\mathrm{Ker}(f) \cong \mathrm{Ker}(\bar f)$ et $\mathrm{Coker}(\bar g) \cong \mathrm{Coker}(g)$; par conséquent, la suite longue est exacte en $\mathrm{Ker}(f), \mathrm{Ker}(gf)$ et en $\mathrm{Coker}(gf), \mathrm{Coker}(g)$. Reste à montrer l'exactitude en $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Coker}(f)$. La commutativité du diagramme entraine que $\beta\alpha\bar f = 0$. Le noyau de $\beta\alpha$ s'identifie au changement de base le long de α du noyau de β, i.e. (par II.1.13) de l'image de f. Par II.1.12(a), ce changement de base donne l'image de $\bar f$, donc $\mathrm{Im}(\bar f) \cong \mathrm{Ker}(\beta\alpha)$. L'exactitude en $\mathrm{Coker}(g)$ se montre de manière duale. □

Définition 2.5. *Pour une suite* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ *on définit l'objet* $H(g, f)$ *comme l'image du morphisme composé* $\mathrm{Ker}(g) \longrightarrow Z \longrightarrow \mathrm{Coker}(f)$.

Lemme 2.6. *Une suite* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ *vérifiant* $gf = 0$ *est exacte en* Y *si et seulement si l'une des trois conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*

(a) *Le morphisme canonique* $\mathrm{Im}(f) \to \mathrm{Ker}(g)$ *est un isomorphisme ;*

(b) $H(g, f) = 0$ *;*

(c) *Le morphisme canonique* $\mathrm{Coker}(f) \to \mathrm{Coim}(g)$ *est un isomorphisme.*

Preuve. Comme $gf = 0$, on a $\mathrm{Ker}(gf) \cong X$ et $Z \cong \mathrm{Coker}(gf)$. La suite exacte II.2.4 contient donc la suite exacte

$$X \longrightarrow \mathrm{Ker}(g) \longrightarrow \mathrm{Coker}(f) \longrightarrow Z.$$

En factorisant premier et dernier morphisme par l'image, on obtient grace à II.1.7 la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}(f) \longrightarrow \mathrm{Ker}(g) \longrightarrow \mathrm{Coker}(f) \longrightarrow \mathrm{Coim}(g) \longrightarrow 0.$$

En factorisant enfin le morphisme médian par son image, on obtient deux suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}(f) \longrightarrow \mathrm{Ker}(g) \longrightarrow H(g, f) \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow H(g, f) \longrightarrow \mathrm{Coker}(f) \longrightarrow \mathrm{Coim}(g) \longrightarrow 0.$$

Cela établit l'équivalence des conditions (a),(b) et (c). □

L'objet $H(g, f)$ mesure donc le *défaut d'exactitude* en Y, et s'appelle également l'*objet d'homologie* de la suite.

PROPOSITION 2.7. *On considère le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' & \end{tikzcd}$$

dans lequel les lignes sont des suites exactes.

(a) *Si α et γ sont des monomorphismes, alors β est un monomorphisme ;*

(b) *Si α et γ sont des épimorphismes, alors β est un épimorphisme ;*

(c) (Lemme du serpent) *On a une suite exacte longue canonique :*

$$\mathrm{Ker}(\alpha) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\beta) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\gamma) \longrightarrow \mathrm{Coker}(\alpha) \longrightarrow \mathrm{Coker}(\beta) \longrightarrow \mathrm{Coker}(\gamma).$$

PREUVE. (a) et (b) sont des corollaires de (c) et du fait que l'exactitude de la suite $0 \to X \to 0$ entraine que $X = 0$. Pour établir (c), observons d'abord que $\mathrm{Ker}(\alpha) \cong \mathrm{Ker}(f'\alpha) = \mathrm{Ker}(\beta f)$, car f' est un monomorphisme et II.1.7 s'applique. D'après II.2.6, on a donc une suite exacte $\mathrm{Ker}(\alpha) \to \mathrm{Ker}(\beta) \to \mathrm{Coker}(f) = C$. Comme $\mathrm{Ker}(\gamma) \to C$ est un monomorphisme, on en déduit la suite exacte des noyaux $\mathrm{Ker}(\alpha) \to \mathrm{Ker}(\beta) \to \mathrm{Ker}(\gamma)$; de manière duale, on montre que la suite des conoyaux $\mathrm{Coker}(\alpha) \to \mathrm{Coker}(\beta) \to \mathrm{Coker}(\gamma)$ est exacte. Il reste à construire le morphisme $\mathrm{Ker}(\gamma) \to \mathrm{Coker}(\alpha)$ et à montrer l'exactitude en $\mathrm{Ker}(\gamma)$ et $\mathrm{Coker}(\alpha)$.

Comme la suite des noyaux est exacte, l'image de $\mathrm{Ker}(\beta) \to \mathrm{Ker}(\gamma)$ s'identifie au conoyau de $\mathrm{Ker}(\alpha) = \mathrm{Ker}(\beta f) \to \mathrm{Ker}(\beta)$ qui s'identifie à $H(\beta, f)$. De manière duale, le noyau de $\mathrm{Coker}(\beta) \to \mathrm{Coker}(\gamma)$ s'identifie à $H(g', \beta)$. Il reste alors à établir les isomorphismes $\mathrm{Ker}(\gamma) \cong H(g'\beta, f)$ et $\mathrm{Coker}(\alpha) \cong H(g', \beta f)$, car la proposition II.2.8 permet alors de recoller la suite exacte des noyaux avec la suite exacte des conoyaux à l'aide de la suite exacte

$$0 \longrightarrow H(\beta, f) \longrightarrow H(g'\beta, f) \longrightarrow H(g', \beta f) \longrightarrow H(g', \beta) \longrightarrow 0.$$

Or, $H(g'\beta, f)$ est l'image du morphisme composé

$$\mathrm{Ker}(g'\beta) = \mathrm{Ker}(\gamma g) \to B \to \mathrm{Coker}(f) = C.$$

Cette image s'identifie à $\mathrm{Ker}(\gamma)$ en vertu du carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}(\gamma g) \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(\gamma) \arrow[d] \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

et du fait que g et $\bar{g}$ sont des épimorphismes. L'autre isomorphisme se montre de manière duale. □

PROPOSITION 2.8. *Pour toute suite $W \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{h} Z$ il existe une suite exacte canonique :*

$$0 \longrightarrow H(g, f) \longrightarrow H(hg, f) \longrightarrow H(h, gf) \longrightarrow H(h, g) \longrightarrow 0.$$

PREUVE. Un carré

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ C \arrow[r] & D \end{tikzcd}$$

est dit *exact* si le morphisme canonique $A \to B \times_D C$ est un épimorphisme, ou ce qui revient au même, si le morphisme canonique $B \cup_A C \to D$ est un monomorphisme. En effet, les deux conditions expriment que la suite $A \to B \oplus C \to D$ défini par le carré est exact. Il découle de I.5.4 et de II.1.12 que le rectangle obtenu en juxtaposant deux carrés exacts est encore exact. Il est clair qu'aussi bien les carrés cartésiens que les carrés cocartésiens sont exacts. Inversement, tout carré exact s'écrit comme une juxtaposition d'un carré cocartésien et d'un carré cartésien, en factorisant deux morphismes parallèles du carré par leur image.

Considérons alors le rectangle commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(hg) \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, "g"] & \mathrm{Coker}(f) \arrow[d] \\
\mathrm{Ker}(h) \arrow[r] & Y \arrow[r] & \mathrm{Coker}(gf)
\end{tikzcd}$$

Le carré gauche est cartésien par I.5.2(c), le carré droite est cocartésien par I.5.2(d), donc le rectangle extérieur est exact. En factorisant les deux morphismes horizontaux de ce rectangle par leur image, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & H(g,f) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & H(g,f) \arrow[d] \\
\mathrm{Ker}(hg) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "1"] & H(hg,f) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "2"] & \mathrm{Coker}(f) \arrow[d] \\
\mathrm{Ker}(h) \arrow[r] \arrow[d] & H(h,gf) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Coker}(gf) \\
H(h,g) \arrow[r, "\cong"] & H(h,g) &
\end{tikzcd}$$

dont le carré 1 est cocartésien et le carré 2 est cartésien. La suite médiane verticale est alors la suite exacte cherchée. □

Lemme 2.9. (Lemme des trois) *On considère le diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dont les lignes sont exactes. Si deux parmi α, β, γ sont des isomorphismes, alors de même le troisième.

Preuve. Si α, β (resp. β, γ) sont des isomorphismes, alors la fonctorialité du conoyau (resp. du noyau) implique que γ (resp. α) est également un isomorphisme. Si α et γ sont des isomorphismes, alors de même β par II.2.7(a-b). □

Lemme 2.10. (Lemme des cinq) *On considère le diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\delta"] & E \arrow[d, "\epsilon"] \\
A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r, "h'"'] & D' \arrow[r, "i'"'] & E'
\end{tikzcd}$$

dont les lignes sont exactes. Si $\alpha, \beta, \delta, \epsilon$ sont des isomorphismes, alors de même γ.

Preuve. En factorisant g, h, g', h' par leur image on se ramène au Lemme des trois. □